

UNIVERZITET CRNE GORE
ELEKTROTEHNIČKI FAKULTET

Miloš Daković

MJERENJE KONCENTRACIJE
VREMENSKO-FREKVENCIJSKIH
DISTRIBUCIJA

Magistarska teza

Podgorica, 2001.

Sadržaj

1. Uvod	1
1.1. Signali i Furijeova transformacija	2
1.2. Frakciona Furijeova transformacija.....	5
1.3. Polinomijalna Furijeova transformacija	8
2. Vremensko-frekvencijska analiza signala	9
2.1. Princip neodređenosti	10
2.2. Trenutna frekvencija i grupno kašnjenje	11
2.3. Idealna vremensko-frekvencijska distribucija.....	12
2.4. Osobine vremensko-frekvencijskih distribucija.....	12
2.5. Kratkotrajna Furijeova transformacija	17
2.6. Spektrogram	18
2.7. Wavelet transformacija.....	20
2.8. Wignerova distribucija	21
2.9. Cohen-ova klasa distribucija	22
2.10. S-metod	23
2.11. Spektri višeg reda	24
2.12. L-Wignerova distribucija	25
2.13. Diskretne forme vremensko-frekvencijskih distribucija	26
2.14. Modifikovane vremensko-frekvencijske reprezentacije	27
2.15. Numerički pristup vremensko-frekvencijskim reprezentacijama signala	28
3. Koncentracija vremensko-frekvencijskih reprezentacija	29
3.1. Analitički pristup određivanju koncentracije vremensko-frekvencijskih distribucija.....	29
Analiza koncentracije spektrograma.....	30
Analiza koncentracije pseudo Wignerove distribucije	35
Analiza koncentracije distribucija iz Cohen-ove klase.....	39

3.2.	Mjerenje koncentracije vremensko-frekvencijskih reprezentacija signala.....	40
3.3.	Energetska mjera koncentracije vremensko-frekvencijskih reprezentacija	47
3.4.	Poređenje analitičkog i numeričkog pristupa mjerenju koncentracije vremensko-frekvencijskih reprezentacija signala	49
3.5.	Lokalne mjere koncentracije	54
3.6.	Analiza algoritama za računanje mjere koncentracije vremensko-frekvencijskih reprezentacija.....	55
	Numerička kompleksnost određivanja mjere koncentracije.....	55
	Algoritam za računanje energetske mjere koncentracije	56
	I način (algoritam A1).....	57
	II način (algoritam A2)	58
3.7.	Metod za ubrzavanje pronalaženja optimalno koncentrisane distribucije.....	59
4.	Primjena mjera koncentracije	61
4.1.	Odabiranje najkvalitetnije vremensko-frekvencijske reprezentacije iz zadatog skupa reprezentacija.....	61
4.2.	Primjena mjera u poređenju različitih vremensko-frekvencijskih distribucija	71
4.3.	Primjena mjera koncentracije za dobijanje frakcionih vremensko-frekvencijskih reprezentacija.....	73
4.4.	Primjena lokalne mjere koncentracije na spektrogram	76
5.	Zaključak	81
6.	Prilog	83
7.	Literatura	96
8.	Bibliografija	100

Sažetak

Vremensko-frekvencijska analiza je važna oblast analize signala i digitalne obrade signala. Postoji veoma široka klasa signala koji ne mogu biti analizirani klasičnim metodama, posmatranjem signala u vremenskom domenu, odnosno upotrebom Furijeove transformacije i analizom frekvencijskog sadržaja signala. Signali u ovoj klasi su veoma nestacionarni, imaju konačno trajanje i njihov spektar se mijenja u vremenu. Postoji veliki broj alata za analizu navedenih signala. Prije svega to su kratkotrajna Furijeova transformacija, spektrogram, wavelet transformacija, Wignerova distribucija, Cohen-ova klasa vremensko-frekvencijskih distribucija, Spektri višeg reda ... I pored velikog broja postojećih alata ne postoji opšti odgovor koji je alat najbolje primijeniti u slučaju konkretno zadatog signala. Stoga je razvijen veliki broj adaptivnih metoda zavisnih, od analiziranog signala, koje daju kvalitetnu vremensko-frekvencijsku reprezentaciju (TFR) datog signala, pri čemu se pod kvalitetnom reprezentacijom smatra reprezentacija kod koje su komponente signala dobro koncentrisane u vremensko-frekvencijskoj ravni i kod kojih je nivo neželjenih komponenti u reprezentaciji nizak. Jedan od najvažnijih problema u ovakvim metodama je dobijanje kriterijuma za poređenje dvije različite TFR posmatranog signala.

Osnovna tema ove teze je analiza poznatih kriterijuma za poređenje različitih TFR istog signala koji se nazivaju i mjere koncentracije i uvođenje novog metoda, energetske mjere koncentracije vremensko-frekvencijskih distribucija. Takođe je naveden i analitički pristup problemu mjerenja koncentracije TFR, gdje se za veoma usku klasu signala mogu numerički metodi mjerenja koncentracije porediti sa analitički dobijenim optimalnim vrijednostima. Definisanjem mjera koncentracije možemo poboljšati postojeće adaptivne metode i uvesti nove metode za dobijanje dobro koncentrisanih vremensko-frekvencijskih reprezentacija.

Abstract

Time-frequency analysis is a very important area in signal analysis and digital signal processing. There is a very wide class of signals, which cannot be analyzed by classical methods, considering the signal in time domain or using Fourier transform and analyzing the signal in frequency domain. Signals in this class are very nonstationary, many of them have finite duration, and their spectra vary in time. Many useful tools are derived for analysis of the signals. First of all, there is a short time Fourier transform, spectrogram, Wavelet transform, Wigner distribution, Cohen class of time-frequency distributions, higher order spectra... Although there is a wide class of analysis tools, there is no general answer which class is the best for the specific signal. Many adaptive signal dependent methods are developed for obtaining good time-frequency representation (TFR) of the given signal where good TFR means well-concentrated signal components in time-frequency plane, and low level of disturbing terms. One of the most important problems in these methods is finding criteria for the comparison of two different TFR of a given signal.

Main topic of this thesis is the analysis of the known criteria for the comparison of different TFRs known as time-frequency concentration measures and introduction of the new method called energetic measure of the time-frequency representations. Analytic approach to the problem is also given, where for very narrow class of signals we can compare results obtained by numerical methods with analytically obtained optimal values. By defining concentration measures we can improve existing adaptive methods and introduce new methods for obtaining well-concentrated TFRs.

1. Uvod

Osnovni problem analiziran u ovoj tezi je mjerenje koncentracije vremensko-frekvencijskih reprezentacija signala. Rješavanje ovog problema uveliko olakšava analizu jako nestacionarnih signala, kod kojih nam nije unaprijed poznat njihov spektralni sadržaj, kao ni njegova promjena sa vremenom. Definisane numeričkih kriterijuma za odabir optimalne vremensko-frekvencijske reprezentacije posmatranog signala eliminiše potrebu za učešćem čovjeka u procesu analize. Na kraju postupka korisnik dobija najbolju moguću informaciju o karakteristikama posmatranog signala.

Teza je koncipirana u 6 poglavlja, prvo, uvodno poglavlje definiše osnovne pojmove neophodne za uvođenje pojma vremensko-frekvencijskih reprezentacija signala. To su definicija signala, Furijeova transformacija signala, kao i njene varijante: frakciona Furijeova transformacija, harmonijska frakciona Furijeova transformacija i polinomijalna Furijeova transformacija.

U drugom poglavlju definisan je osnovni problem vremensko-frekvencijske analize, dati su primjeri vremensko-frekvencijskih reprezentacija, kao i njihove osnovne osobine.

Treće poglavlje definiše osnovni problem analiziran u ovoj tezi – koncentraciju vremensko-frekvencijskih reprezentacija signala. U okviru ovog poglavlja, poslije definicije osnovnih pojmova provedena je analitička analiza koncentracije spektrograma, Wignerove distribucije i distribucija iz Cohenove klase. Iako je analitički pristup ovom problemu ograničen na veoma mali skup signala i veoma mali broj distribucija na koji se može primijeniti tako da su dobijeni zaključci praktično upotrebljivi, predstavlja važan dio u analizi problema mjerenja koncentracije vremensko-frekvencijskih reprezentacija signala, jer se na osnovu dobijenih rezultata mogu vrednovati numerički metodi za određivanje koncentracije uvedeni u ostalim djelovima ovog poglavlja. Navedeni su postojeći metodi određivanja koncentracije i uveden novi metod baziran na posmatranju raspodjele ukupne energije signala u vremensko-frekvencijskoj ravni.

Četvrto poglavlje predstavlja primjere upotrebe mjera koncentracije definisanih u prethodnom poglavlju. Razmatran je veliki broj signala i analizirano ponašanje mjera koncentracije u različitim slučajevima. Dobijeni rezultati potvrđuju opravdanost uvođenja

energetske mjere koncentracije, jer ona u gotovo svim slučajevima daje dobro koncentrisanu vremensko-frekvencijsku reprezentaciju signala.

U petom poglavlju sumirani su rezultati istraživanja navedeni u tezi, dok je u šestom poglavlju navedena korišćena literatura.

1.1. Signali i Furijeova transformacija

Pod pojmom signala podrazumijevamo fizički proces koji se rasprostire, odnosno mijenja se u prostoru ili u vremenu a koji se može koristiti za upravljanje drugim fizičkim procesima ili za vršenje neposrednog uticaja na organe organizovanog sistema, posebno na čulne organe živih organizama. Na primjer, zvučni signal predstavlja lokalnu varijaciju vazdušnog pritiska, generisanu nekim fizičkim procesom koja se po poznatim zakonima prostire kroz materijalnu sredinu i direktno ili posredno djeluje na organ čula sluha čovjeka. Pojam signala usko je vezan sa pojmom informacije. Od samog opažanje signala u većini slučajeva nema neposredne koristi, potrebno je izdvojiti one karakteristike signala koje nose neku informaciju. Na primjer, kod govornog signala poznavanje zakonitosti promjene vazdušnog pritiska na organ čula sluha ne daje pravu informaciju, već se taj signal obradom u centralnom nervnom sistemu pretvara u korisnu informaciju, drugim riječima mi razumijemo izgovorenu poruku. Informacija može biti "utisnuta" u signal na mnogo različitih načina. U nekim slučajevima je sasvim jasan postupak kojim se informacija ugrađuje u signal (na primjer radio difuzni signal kod kojeg je primijenjena frekvencijska modulacija) i u takvim slučajevima na relativno jednostavan način možemo obezbijediti izdvajanje korisne informacije iz signala. Pored navedenih slučajeva postoje i slučajevi gdje nam nije poznato na koji je način informacija koju želimo dobiti uključena u signal, pa tada moramo analizirati veliki broj karakteristika signala ne bismo li pronašli način za izdvajanje informacije iz njega. Primjer signala ovog tipa su seizmički signali, na osnovu čije se analize može dobiti velika količina informacija, o prirodi seizmičke aktivnosti, o sastavu zemljine kore na mjestu seizmičke aktivnosti i slično. Korisna alatka u analizi signala su razvijeni metodi: Furijeova analiza, posmatranje vremenskog oblika signala, vremensko-frekvencijska analiza, statistička analiza parametara signala ... Sve navedene metode usko su vezane sa matematikom, odnosno predstavljaju matematički model analize signala, pa da bi se primijenile na konkretnom signalu mora i taj signal biti matematički modelovan. Opisane metode takođe predstavljaju transformaciju signala, odnosno signal prikazujemo na onaj način koji će nam omogućiti lako

izdvajanje informacije iz njega. Formiranje matematičkog modela signala uveliko zavisi od karakteristika signala. Tako je na primjer matematički model radio signala koji se prostire kroz trodimenzioni prostor, mijenjajući svoje karakteristike u vremenu različit od modela binarnog signala koji prenosi informacije između procesora i memorijske jedinice računara, odnosno od zvučnog signala u telefonskoj slušalici. U ovoj tezi razmatrano je ponašanje signala koji se mogu svrstati u klasu jednodimenzionih kontinualnih signala, odnosno jednodimenzionih diskretnih signala.

Pod matematičkim modelom kontinualnog signala smatramo funkciju koja preslikava skup realnih brojeva \mathbf{R} (ili neki njegov povezan podskup) na skup kompleksnih brojeva \mathbf{C} : $f: t \rightarrow f(t)$. Ukoliko je kodomen signala skup realnih brojeva za takav signal kažemo da je realan. Za signal kod kojeg je $f(t) = 0$ van nekog konačnog intervala $[a, b]$ kažemo da je signal sa ograničenim trajanjem. Ukoliko postoji vrijednost integrala:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = E_f \quad (1)$$

tu vrijednost nazivamo energijom signala, a klasu signala kod kojih je navedeni integral definisan i konačan nazivamo signalima sa konačnom energijom. Za signal kod kojeg postoji pozitivan broj T takav da je $f(t+T) = f(t)$ za sve vrijednosti argumenta t kažemo da je periodičan. Minimalna vrijednost za T za koju navedena osobina važi naziva se osnovni period signala.

Diskretni signal je preslikavanje skupa cijelih brojeva \mathbf{Z} na skup \mathbf{C} : $f: n \rightarrow f(n)$. Diskretni signal je konačnog trajanja ukoliko je različit od nule samo u konačno mnogo tačaka. Energiju diskretnog signala definišemo sa:

$$E = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |f(n)|^2 \quad (2)$$

i signale kod kojih navedena suma konvergira nazivamo diskretni signali sa konačnom energijom. Diskretni signal se naziva periodičnim ukoliko postoji prirodan broj N takav da vrijedi $f(n+N) = f(n)$ za sve vrijednosti n . Minimalni broj N koji zadovoljava navedenu relaciju naziva se osnovnim periodom diskretnog signala.

Osnovna ideja za uvođenje i korišćenje transformacija u procesiranju signala je mogućnost da određenu klasu problema možemo rješavati na jednostavan način koristeći se transformisanom verzijom signala u odnosu na njegovu originalnu verziju. Pod originalnom verzijom signala, najčešće smatramo signal zadat u vremenskom domenu, odnosno praćenje promjene neke posmatrane veličine u vremenu.

Furijeova transformacija [1], [2] predstavlja osnovni način za analizu signala kod kojih je informacija sadržana u njihovom spektru odnosno u frekvencijama i amplitudama komponenti koje sačinjavaju signal. Ova transformacija definiše se za slučaj kontinualnog signala $f(t)$ kao:

$$FT_f(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt \quad (3)$$

Dovoljan uslov da je transformacija (3) dobro definisana je da energija posmatranog signala bude konačna. U svim praktičnim slučajevima ovaj uslov je ispunjen, jer karakteristike prirodnih pojava moraju uzimati samo konačne vrijednosti i mogu biti praćene, to jest definisane na konačnom vremenskom intervalu. Pored toga većina fizičkih veličina može se opisati neprekidnom funkcijom, ili funkcijom koja ima konačan (u najgorem slučaju prebrojiv) skup tačaka prekida te je stoga ona integrabilna i integral (3) postoji i konačan je.

Bitna osobina Furijeove transformacije je njena reverzibilnost. Na osnovu reverzibilnosti transformacije možemo biti sigurni da reprezentacija signala u novom, transformacionom domenu sadrži sve informacije koje se nalaze u originalnom signalu. Ukoliko nam je poznata Furijeova transformacija signala $x(t)$, označimo je sa $X(\omega)$, tada možemo na osnovu nje rekonstruisati signal $x(t)$ na sledeći način:

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)e^{j\omega t} d\omega \quad (4)$$

Od velikog teoretskog interesa su određeni matematički definisani signali, koji se ne mogu pojaviti u praksi, kao što je na primjer sinusoidalni signal. Znamo da je sinusoidalni signal definisan za svaku vrijednost varijable t što u realnim slučajevima ne možemo postići jer signal možemo posmatrati samo u konačnom vremenskom intervalu.

Pri analizi diskretnih signala transformacija analogna sa (3) je diskretna Furijeova transformacija kod koje imamo nekoliko varijanti u zavisnosti od karakteristika posmatranog signala. Na primjer, ukoliko je diskretni signal $x(n)$ definisan na čitavom skupu \mathbf{Z} i uz to aperiodičan tada se koristi Furijeova transformacija diskretizovana po vremenu (discrete-time Fourier transform), koja se definiše relacijama:

$$X(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\omega n} \quad (5)$$

$$x(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(\omega)e^{j\omega n} d\omega \quad (6)$$

Ukoliko je diskretni signal $x(n)$ periodičan sa osnovnim periodom N , tada se on može analizirati diskretnim Furijeovim redom definisanim sa:

$$X(k) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-j2\pi nk/N} \quad (7)$$

$$x(n) = \sum_{k=0}^{N-1} X(k)e^{j2\pi nk/N} \quad (8)$$

Diskretni neperiodični signal konačnog trajanja možemo smatrati jednom periodom periodičnog signala i analizirati ga primjenom formula (7) i (8). Tada tu transformaciju nazivamo diskretna Furijeova transformacija. Ona je veoma pogodna za realizaciju korišćenjem digitalnih računara jer su oba domena, vremenski i frekvencijski, diskretni i konačni, što je neophodan uslov za tačno izračunavanje transformacije primjenom računara.

1.2. Frakciona Furijeova transformacija

Furijeova transformacija se pokazala izuzetno korisnom za slučajeve signala čija se frekvencija ne mijenja u razmatranom vremenskom intervalu. Veliki broj signala od praktičnog interesa zadovoljava taj uslov, ali postoji i široka klasa signala kod kojih ovaj uslov ne može biti ostvaren. Najjednostavniji primjer je linearno frekvencijski modulisani signal. U cilju poboljšanja mogućnosti analize ovakvih signala, Furijeova transformacija se može modifikovati uvođenjem dodatnog parametra θ . Dobijena transformacija naziva se Frakcionom Furijeovom transformacijom [3] i može se definisati kao:

$$FRFT(\omega, \theta) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) e^{-j(\omega + \tan(\theta)\tau/2)\tau} d\tau \quad (9)$$

Za slučaj linearno frekvencijski modulisanog signala:

$$x(t) = A \exp(j(\omega_0 t + at^2 / 2)) \quad (10)$$

imamo da je za $\theta = \arctan(a)$ $FRFT(\omega, \theta) = A\delta(\omega - \omega_0)$, odnosno moguće je pronaći parametar θ , za koji se frakciona Furijeova transformacija posmatranog signala ponaša na sličan način kao Furijeova transformacija signala nepromjenjive frekvencije. Posmatrani zaključak važi i za slučaj multikomponentnog signala oblika:

$$x(t) = \sum_k A_k \exp(j(\omega_k t + at^2 / 2)) \quad (11)$$

U praktičnim primjenama često se srećemo sa harmonijskim signalima, odnosno signalima koji se sastoje od više komponenti na različitim frekvencijama koje imaju osobinu da je svaka od njih jednaka cjelobrojnom umnošku osnovne frekvencije:

$$x(t) = \sum_k A_k \exp(jk\omega_0 t) \quad (12)$$

Ukoliko se osnovna frekvencija mijenja sa vremenom, pretpostavimo da je ta promjena linearna, tada Furijeova transformacija neće dati zadovoljavajuće rezultate. Naime tada imamo signal oblika:

$$x(t) = \sum_k A_k \exp(j(k(\omega_0 + at / 2)t)) = \sum_k A_k \exp(j(k\omega_0 t + kat^2 / 2)) \quad (13)$$

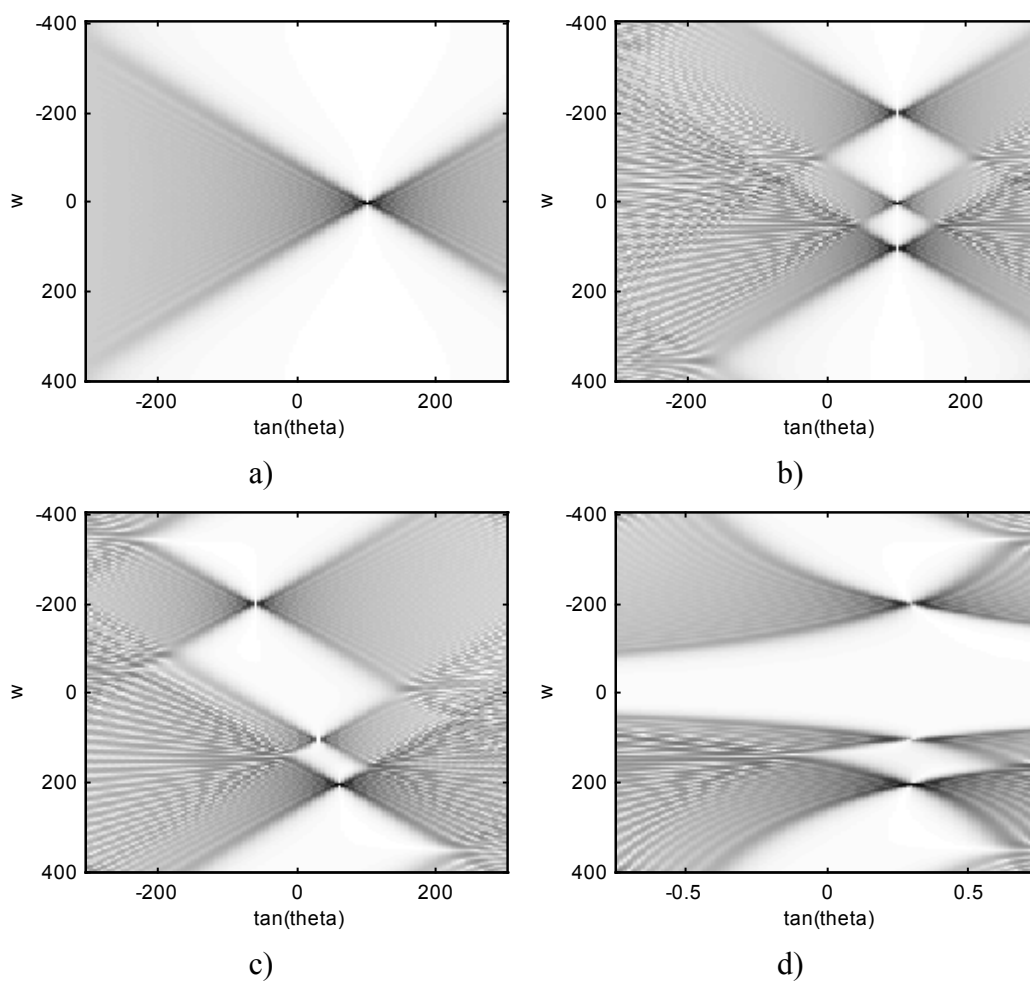
Posmatrani signal nije pogodan ni za analizu sa frakcionom Furijeovom transformacijom, jer svakoj komponenti signala odgovara druga vrijednost parametra $\theta = \arctan(ka)$. Modifikacija frakcione Furijeove transformacije prilagođena analizi signala ovog oblika naziva se Harmonijska frakciona Furijeova transformacija [4] i definiše se kao:

$$HFRFT(\omega, \theta) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) e^{-j\omega(1 + \tan(\theta)\tau/2)\tau} d\tau \quad (14)$$

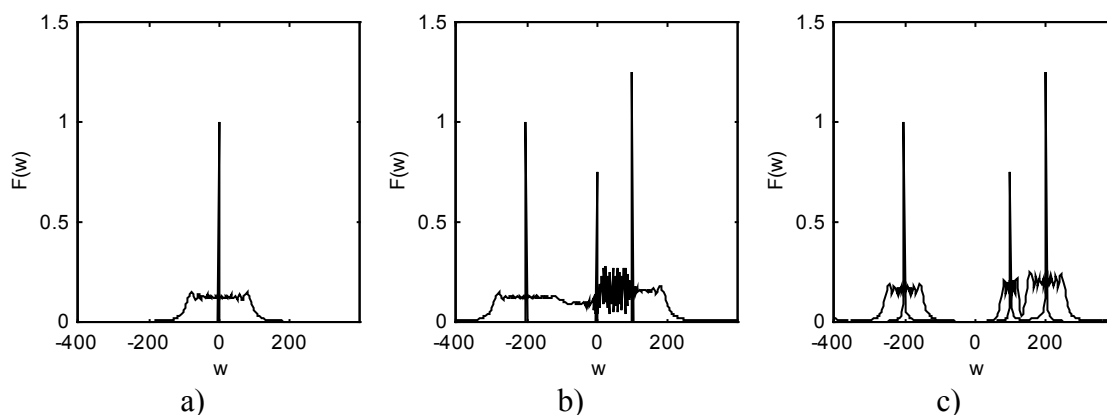
Za posmatrani signal imamo da je za $\theta = \arctan(a / \omega_0)$:

$$HFRFT(\omega, \theta) = \sum_k A_k \delta(\omega - k\omega_0) \quad (15)$$

Na slici 1a je prikazana frakciona Furijeova transformacija signala oblika (10), kod koga je $A=1$, $\omega_0=0$ i $a=100$. Na slici 2a su prikazani slučajevi $\theta=0$ (Furijeova transformacija) i $\theta=100$. Slika 1b predstavlja frakcionu Furijeovu transformaciju signala oblika (11), pri čemu k uzima vrijednosti 1,2 i 3, $(A_1, \omega_1) = (3/4, 0)$, $(A_2, \omega_2) = (5/4, 32\pi)$, $(A_3, \omega_3) = (1, 64\pi)$ i $a=100$, dok su na slici 2b prikazani slučajevi $\theta=0$ i $\theta=100$. Slika 1c je frakciona Furijeova transformacija signala oblika (13), gdje k uzima vrijednosti -2, 1 i 2, $\omega_0=32\pi$, $a=30$, $A_2=1$, $A_1=3/4$ i $A_2=5/4$. Slika 1d predstavlja Harmonijsku frakcionu Furijeovu transformaciju istog signala. Na slici 2c su prikazani karakteristični slučajevi $\theta=0$ (Furijeova transformacija) i $\theta = \arctan(a/\omega_0)$. U sva četiri slučaja signali su posmatrani na intervalu $-1 \leq t < 1$.



Sl. 1. Frakciona Furijeova transformacija (a, b i c) i Harmonijska frakciona Furijeova transformacija (d).



Sl. 2. Frakciona Furijeova transformacija i Harmonijska frakciona Furijeova transformacija za karakteristične vrijednosti parametra θ .

1.3. Polinomijalna Furijeova transformacija

Polinomijalna Furijeova transformacija može se dobiti uopštavanjem frakcione Furijeove transformacije, dozvoljavajući da se u eksponentu definicionog izraza za Furijeovu transformaciju mogu naći i viši stepeni promjenljive τ , tako da za signal $x(\tau)$ polinomijalnu Furijeovu transformaciju možemo definisati kao:

$$PFT(\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) e^{-j\Theta(\Omega, \tau)} d\tau \quad (16)$$

gdje je:

$$\Theta(\Omega, \tau) = \omega_1 \tau + \omega_2 \tau^2 / 2 + \dots + \omega_n \tau^n / n! \quad (17)$$

polinom po promjenljivoj τ , dok je $\Omega = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n)$ vektor koeficijenata tog polinoma. Ukoliko posmatramo signal $x(t) = Ae^{j\phi(t)}$ kod kojega je faza polinom n -tog stepena po promjenljivoj t , tada se maksimum polinomijalne Furijeove transformacije posmatranog signala dobija za $\omega_1 = \phi'(0)$, $\omega_2 = \phi^{(2)}(0)$, ..., $\omega_n = \phi^{(n)}(0)$, odnosno pronalaženjem maksimuma $PFT(\Omega)$ možemo dobiti procjenu trenutne frekvencije, kao i njenih izvoda do $n-1$ reda u trenutku $t=0$, pri čemu je trenutna frekvencija definisana kao prvi izvod faze: $\omega(t) = \phi'(t)$. Vidimo da se za $n=1$ PFT svodi na standardnu Furijeovu transformaciju, dok za $n=2$ dobijamo frakcionu Furijeovu transformaciju.

2. Vremensko-frekvencijska analiza signala

Furijeova transformacija i njene varijacije, frakciona Furijeova transformacija i harmonijska frakciona Furijeova transformacija su pogodne za analizu signala čiji se spektar ne mijenja u vremenu, odnosno u slučaju frakcionih transformacija promjena spektra je ograničena na slučaj linearno frekvencijski moduliranih signala. Signali sa brzim promjenama spektra se često javljaju u raznim slučajevima, biomedicinski signali, signali sonara i radara, vibracije nastale radom mašina... U svim ovim slučajevima odvojene analize (samo u vremenskom, odnosno samo u frekvencijskom domenu) ne daju potpunu informaciju, te su u tom cilju razvijeni posebni metodi za združenu vremensko-frekvencijsku analizu signala. Kao što ćemo vidjeti u narednim poglavljima, kod ovakvih signala definišu se pojmovi trenutne frekvencije i grupnog kašnjenja, po analogiji sa prostoperiodičnim signalima čije se spektralne komponente ne mijenjaju u vremenu, odnosno sa signalima kratkog trajanja kod kojih su jasno definisani početak i kraj signala u vremenskom domenu (delta impuls). Kao jedan od prvih problema na koji se nailazi je princip neodređenosti u vremensko-frekvencijskoj analizi signala, koji postavlja jasne granice primjenjivosti opisanih metoda i fizikalnom tumačenju dobijenih rezultata. Vremensko-frekvencijska analiza signala detaljno je obrađivana u [5-10].

Osnovna ideja vremensko-frekvencijske analize je preslikavanje, odnosno transformacija signala iz jednodimenzionalnog vremenskog u dvodimenzionalni vremensko-frekvencijski domen – vremensko-frekvencijsku (TF) ravan. Na taj način se definiše transformacija signala, a predstavu signala u novom domenu nazivamo vremensko-frekvencijskom reprezentacijom (TFR) signala. Najčešći slučaj je posmatranje raspodjele energije signala u vremensko-frekvencijskom domenu, i u takvim slučajevima korišćenu transformaciju nazivamo vremensko-frekvencijskom distribucijom (TFD). U daljem izlaganju korišćene su navedene skraćenice TFR i TFD, pri čemu skraćenicom TFR ukazujemo na činjenicu da navedena transformacija ne predstavlja potpuno korektnu raspodjelu energije signala u TF ravni.

Treba napomenuti da se pojam vremensko-frekvencijske transformacije može proširiti i na slučajeve višedimenzionog domena, kada govorimo o multi-time, odnosno multi-frequency transformacijama.

2.1. Princip neodređenosti

Posmatrajmo signal $x(t)$. Pretpostavimo da je signal lokalizovan po vremenu i po frekvenciji. Trajanje signala $x(t)$ može se definisati kao:

$$T = \int_{-\infty}^{\infty} (t - t_c)^2 x(t) dt \quad (18)$$

gdje je:

$$t_c = \int_{-\infty}^{\infty} tx(t) dt \quad (19)$$

pozicija signala na vremenskoj osi, dok se frekvencijski opseg signala definiše kao:

$$B = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (\omega - \omega_c)^2 X(\omega) d\omega \quad (20)$$

gdje je:

$$\omega_c = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \omega X(\omega) d\omega \quad (21)$$

pozicija signala na frekvencijskoj osi a $X(\omega)$ Furijeova transformacija signala $x(t)$. Može se pokazati da za sve signale $x(t)$ vrijedi:

$$BT > \frac{1}{2} \quad (22)$$

Ova relacija naziva se principom neodređenosti u vremensko-frekvencijskoj analizi signala.

Princip neodređenosti [5-8] govori nam o tome da nije moguće ostvariti proizvoljno dobru koncentraciju energije signala po vremenskoj i po frekvencijskoj osi. On se može tumačiti i na sledeći način: Posmatrajmo prostoperiodični signal na konačnom vremenskom intervalu. Ukoliko je interval duži, te u njemu postoji nekoliko perioda signala, tada mi možemo tačno odrediti njegovu učestanost. Smanjivanjem vremenskog intervala, on obuhvata sve manji i manji dio posmatranog signala, i u nekom momentu mi više nijesmo sigurni da je to što posmatramo dio nekog periodičnog signala, te samim tim ne možemo odrediti ni njegovu učestanost. Granični slučaj bi bio kada se vremenski interval svodi na jednu tačku i tada je sasvim jasno da na osnovu vrijednosti signala u tom vremenskom trenutku ne možemo

donositi sud o njegovoj učestanosti. Treba napomenuti da se u ovom primjeru radi o signalu kod kojega nam je apriori poznato njegovo ponašanje (smatramo da je prostoperiodičan), dok u realnim slučajevima posjedujemo samo informaciju o talasnom obliku dijela signala a ne i o njegovoj prirodi.

2.2. Trenutna frekvencija i grupno kašnjenje

Za signal:

$$x(t) = A(t)e^{j\phi(t)} \quad (23)$$

kod kojega je amplituda $A(t)$ sporopromjenjiva¹ funkcija u odnosu na fazu $\phi(t)$, može se definisati trenutna frekvencija [5]:

$$\omega_i(t) = \frac{d\phi(t)}{dt} = \frac{d}{dt} \arg[x(t)] \quad (24)$$

kao frekvencija signala u trenutku t . Za slučaj prostoperiodičnih signala dobija se da je njihova trenutna frekvencija jednaka frekvenciji signala u svakom trenutku t . Stoga je navedena definicija jedan od načina za proširivanje pojma frekvencije i na signale koji nijesu prostoperiodični. Treba naglasiti da je ovako definisan pojam jako vezan sa uslovima nametnutim signalu $x(t)$, te da ukoliko navedeni uslovi nijesu ispunjeni, pojam trenutne frekvencije postaje čisto matematički pojam lišen svakog fizičkog smisla. Uslov da pojmu trenutne frekvencije dodijelimo fizički smisao se može formulisati tako da zahtijevamo da u trenutku t vrijedi da je $\omega'_i(\tau) \ll 1$ za $\tau \in [t - 2k\pi / \omega_i(t), t + 2k\pi / \omega_i(t)]$, gdje veličina k određuje koliko perioda signala želimo da imamo da bismo donijeli zaključak o njegovoj frekvenciji.

Dualan pojam pojmu trenutne frekvencije je grupno kašnjenje signala. Ono se definiše za signale čija se Furijeova transformacija može napisati u obliku:

$$X(\omega) = A(\omega)e^{j\phi(\omega)} \quad (25)$$

gdje je funkcija $A(\omega)$ sporopromjenjiva u odnosu na funkciju $\phi(\omega)$. Tada je:

¹ Za funkciju $x(t)$ kažemo da je sporopromjenjiva u odnosu na funkciju $y(t)$ ukoliko je $|x'(t)| \ll |y'(t)|$.

$$t_g(\omega) = -\frac{d\phi(\omega)}{d\omega} = -\frac{d}{dt}\arg[X(\omega)] \quad (26)$$

Grupno kašnjenje možemo posmatrati kao lokaciju komponente signala koja ima frekvenciju ω na vremenskoj osi.

2.3. Idealna vremensko-frekvencijska distribucija

Polazeći od pojma trenutne frekvencije $\omega_i(t)$ signala možemo definisati idealnu vremensko-frekvencijsku distribuciju signala $x(t) = A(t)e^{j\phi(t)}$ [5-8] kao:

$$ITFD_x^o = 2\pi|A(t)|^2 \delta(\omega - \omega_i(t)) \quad (27)$$

gdje je $\delta(\cdot)$ Dirakova funkcija, a gornji indeks ω ukazuje na to da je idealna TFD izvedena na osnovu trenutne frekvencije signala.

Dualno navedenoj definiciji, polazeći od grupnog kašnjenja t_g možemo definisati idealnu TFD za signal kod kojeg je $X(\omega) = A(\omega)e^{j\phi(\omega)}$ kao:

$$ITFD_x^i(t, \omega) = |A(\omega)|^2 \delta(t - t_g) \quad (28)$$

Na ovaj način definisane idealne TFD nemaju velikog praktičnog značaja, jer je za određivanje veličine $\omega_i(t)$ (odnosno t_g) neophodno vršiti diferenciranje faze signala (odnosno njegove Furijeove transformacije), što daje rezultat samo u slučajevima kada je signal analitički zadat, a već i najmanja prisutnost šuma u signalu čini veličine dobijene na ovaj način potpuno neupotrebljivim. Značaj idealnih TFD je u tome što one mogu poslužiti kao dobra referenca za ocjenu i poređenje ostalih TFD.

2.4. Osobine vremensko-frekvencijskih distribucija

U ovom dijelu rada biće naveden spisak osobina koje su poželjne kod vremensko-frekvencijskih distribucija. Detaljno objašnjenje pojedinih osobina može se naći u [5], [7], [8], [11]. Nijedna distribucija ne ispunjava sve poželjne osobine, već u zavisnosti od konkretnog slučaja primjene biramo onu TFD koja ima željene karakteristike. U navedenim osobinama

$TFD_x(t, \omega)$ označava vremensko-frekvencijsku distribuciju signala $x(t)$, $X(\omega)$ je Furijeova transformacija signala $x(t)$, N_0 je skup prirodnih brojeva zajedno sa nulom, veličine t_0 , t_1 , t_2 , ω_0 , ω_1 , ω_2 , a i c su realne.

P0 – TFD treba biti realna funkcija. Ova osobina u direktnoj je vezi sa tumačenjem vremensko-frekvencijskih distribucija kao raspodjela energije signala u vremensko-frekvencijskoj ravni. Sa druge strane, računanje distribucija, kao i njihovo analiziranje i grafičko predstavljanje umnogome je jednostavnije ukoliko se radi sa realnim vrijednostima.

P1 – TFD treba biti nenegativna funkcija, iz istih razloga kao i kod osobine P0. Ove dvije osobine su razdvojene jer za razliku od osobine P0 koja je zadovoljena u velikom broju slučajeva, samo mali broj praktično upotrebljivih TFD zadovoljava osobinu nenegativnosti, naročito u slučajevima analize multikomponentnih signala.

P2 – Pomjeranje po vremenu. Ova osobina ukazuje na očekivanu činjenicu da ako analiziramo dva signala koji su istog oblika, ali pomjereni po vremenskoj osi, odnosno locirani u različitim vremenskim intervalima, dobijamo TFD koje su takođe istog oblika, uz isto pomjeranje po vremenskoj osi. Ukoliko računanje TFD predstavimo sistemom kod kojeg je ulaz signal $x(t)$ a izlaz TFD tog signala, tada ova osobina zahtijeva da taj sistem bude vremenski invarijantan. Analitički ovu osobinu možemo zapisati kao:

$$TFD_y(t, \omega) = TFD_x(t - t_0, \omega) \text{ za } y(t) = x(t - t_0) \quad (29)$$

P3 – Pomjeranje po frekvenciji. Ova osobina je dualna osobini P2. Naime, ukoliko se posmatraju dva signala čiji su spektri (misli se na spektar dobijen Furijeovom transformacijom) pomjereni jedan u odnosu na drugi, odnosno ako je jedan signal modulisan sa $e^{j\omega_0 t}$, tada se TFD jednog signala može dobiti od TFD drugog signala transliranjem po frekvencijskoj osi. Ova osobina ukazuje na to da TFD treba ravnopravno da tretira sve komponente signala, bez obzira na njihov položaj na frekvencijskoj osi. Analitički ovu osobinu iskazujemo formulom:

$$TFD_y(t, \omega) = TFD_x(t, \omega - \omega_0) \text{ za } y(t) = x(t)e^{j\omega_0 t} \quad (30)$$

P4 – Trenutna snaga signala. Kako TFD predstavlja raspodjelu energije signala po vremenu i po frekvenciji, za očekivati je da suma tih energija na svim frekvencijama u

jednom vremenskom trenutku t bude jednaka energiji signala u tom trenutku, odnosno trenutnoj snazi signala. Analitički ovu osobinu zapisujemo sa:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} TFD_x(t, \omega) d\omega = |x(t)|^2 \quad (31)$$

P5 – Spektar snage signala. Dualno prethodnoj osobini, možemo očekivati da suma svih energija na jednoj frekvenciji računatih za sve vremenske trenutke t bude jednaka spektralnoj gustini snage posmatranog signala za posmatranu frekvenciju:

$$\int_{-\infty}^{\infty} TFD_x(t, \omega) dt = |X(\omega)|^2 \quad (32)$$

P6 – Vremenski momenti. Ova osobina predstavlja korak dalje u odnosu na osobinu P4. Slučaj $n = 1$ možemo tumačiti kao računanje pozicije signala na vremenskoj osi. Tada prema ovoj osobini imamo da se pozicija signala na vremenskoj osi može sračunati kao prvi moment TFD u odnosu na vremensku koordinatu. Slučaj $n = 2$ ima fizikalno tumačenje kod signala koji su centrirani u trenutku $t = 0$. Tada prema ovoj osobini dužinu trajanja signala, koju možemo određivati kao drugi moment signala u odnosu na vrijeme t , možemo odrediti i kao drugi moment TFD računat u odnosu na vremensku koordinatu.

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} t^n TFD_x(t, \omega) dt d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} t^n |x(t)|^2 dt \quad \text{za svako } n \in N_0 \quad (33)$$

P7 – Frekvencijski momenti. Dualno osobini P6 možemo zahtijevati da frekvencijski momenti TFD budu jednaki momentima spektra signala, pri čemu ovu osobinu možemo fizikalno tumačiti za $n = 1$ (pozicija signala na frekvencijskoj osi) i za $n = 2$ (procjena frekvencijskog opsega signala).

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \omega^n TFD_x(t, \omega) dt d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} \omega^n |X(\omega)|^2 d\omega \quad \text{za svako } n \in N_0 \quad (34)$$

P8 – Skaliranje signala po vremenu. Ova osobina proistekla je iz odgovarajuće osobine Furijeove transformacije, gdje na jednostavan način možemo odrediti FT skaliranog signala, ukoliko je poznata FT osnovnog signala.

$$TFD_y(t, \omega) = TFD_x(at, \omega / a) \text{ za } y(t) = \sqrt{|a|}x(at), a \neq 0. \quad (35)$$

P9 – Trenutna frekvencija signala. Ispunjenje ove osobine od interesa je u analizi monokomponentnih signala, sporopromjenjive frekvencije, kada možemo sa sigurnošću tvrditi šta je trenutna frekvencija signala:

$$\frac{\int_{-\infty}^{\infty} \omega TFD_x(t, \omega) d\omega}{\int_{-\infty}^{\infty} TFD_x(t, \omega) d\omega} = \omega_i(t) = \frac{d}{dt} \arg[x(t)] \quad (36)$$

Sa $\omega_i(t)$ je označena trenutna frekvencija signala $x(t)$ u trenutku t , pri čemu se podrazumijeva da se signal $x(t)$ može napisati u obliku $x(t) = A(t)e^{j\phi(t)}$, gdje je $A(t)$ sporopromjenjiva funkcija u odnosu na fazu $\phi(t)$.

P10 – Grupno kašnjenje (osobina dualna osobini P9):

$$\frac{\int_{-\infty}^{\infty} t TFD_x(t, \omega) dt}{\int_{-\infty}^{\infty} TFD_x(t, \omega) dt} = t_g(\omega) = \frac{d}{d\omega} \arg[X(\omega)] \quad (37)$$

Sa $t_g(\omega)$ je označeno grupno kašnjenje komponente signala na učestanosti ω , pri čemu se podrazumijeva da su komponente signala na svim frekvencijama ω dobro vremenski lokalizovane.

P11 – Ograničenja po vremenu: Ako je $x(t) = 0$ van segmenta $[t_1, t_2]$, tada je i $TFD_x(t, \omega) = 0$ za vrijednosti t van $[t_1, t_2]$ i za svaku vrijednost ω . Ovom osobinom zahtijevamo da TFD dobro prikazuje ponašanje signala u vremenskom domenu.

P12 – Ograničenja po frekvenciji: Ako je $X(\omega) = 0$ van segmenta $[\omega_1, \omega_2]$, tada je i $TFD_x(t, \omega) = 0$ za vrijednosti ω van $[\omega_1, \omega_2]$ i za svako t . Ovom osobinom iskazuje se činjenica da u TFD trebaju biti prisutne samo one komponente signala (u frekvencijskom domenu) koje su prisutne i u spektru signala.

P13 – Konvolucija signala. Ukoliko imamo sistem koji na svom ulazu ima signal $x(t)$, a impulсни odziv sistema je $h(t)$, ova nam osobina omogućava da na osnovu TFD signala i TFD impulsnog odziva sistema dobijemo TFD izlaznog signala $y(t)$.

$$TFD_y(t, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} TFD_h(t - \tau, \omega) TFD_x(\tau, \omega) d\tau \text{ za } y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t - \tau)x(\tau) d\tau \quad (38)$$

P14 – Proizvod signala. Dualno prethodnoj osobini, po analogiji sa ponašanjem Furijeove transformacije od TFD zahtijevamo da se TFD proizvoda dva signala dobija kao konvolucija TFD pojedinih signala po frekvencijskoj koordinati.

$$TFD_y(\tau, \omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} TFD_h(t, \omega - \theta) TFD_x(t, \theta) d\theta \text{ za } y(t) = h(t)x(t) \quad (39)$$

P15 – Furijeova transformacija signala. I ova osobina je izvedena po analogiji sa osobinom Furijeove transformacije, da ukoliko nam je poznata Furijeova transformacija signala $x(t)$, označimo je sa $X(\omega)$, tada lako možemo sračunati i Furijeovu transformaciju signala $y(t) = X(t)$ dobijenog od $X(\omega)$ zamjenom frekvencijske promjenljive vremenskom.

$$TFD_y(t, \omega) = TFD_x(-\omega, t) \text{ za } y(t) = X(t) \quad (40)$$

P16 – Čirp konvolucija. Ispunjenje ove osobine, kao i osobine P17 poželjno je u slučajevima kada analiziramo linearno frekvencijski modulisane signale.

$$TFD_y(t, \omega) = TFD_x\left(t - \frac{\omega}{c}, \omega\right) \text{ za } y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t - \tau) \sqrt{|c|} e^{jc\tau^2/2} d\tau, c \neq 0 \quad (41)$$

P17 – Čirp proizvod:

$$TFD_y(t, \omega) = TFD_x(t, \omega - ct) \text{ za } y(t) = x(t)e^{jct^2/2} \quad (42)$$

P18 – Moyal-ova osobina:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} TFD_x(t, \omega) TFD_y(t, \omega) dt d\omega = \left(\int_{-\infty}^{\infty} x(t)y(t) dt \right)^2 \quad (43)$$

Vremensko-frekvencijske distribucije, tumačene kao raspodjele energije signala, ne mogu biti linearne, mada je linearnost veoma poželjna osobina svake transformacije. Nemogućnost linearnosti TFD lako možemo dokazati ukoliko posmatramo signale $x(t)$ i $-x(t)$. Oba signala trebaju imati identičnu TFD, dok TFD njihovog zbira treba biti identički jednaka nuli. Znači TFD zbira ova dva signala ne može biti jednaka zbiru TFD pojedinačnih signala. Ovaj primjer pokazuje koliko je zahtjev za linearnošću protivrječan samom pojmu vremensko-frekvencijske distribucije. Treba napomenuti da većina TFD zadovoljava uslov:

$$TFD_y(t, \omega) = |A|^2 TFD_x(t, \omega) \quad (44)$$

ukoliko je $y(t) = Ax(t)$ gdje je A konstanta.

2.5. **Kratkotrajna Furijeova transformacija**

Najjednostavniji način proširivanja mogućnosti Furijeove transformacije u smislu vremenske lokalizacije pojedinih komponenti signala je kratkotrajna Furijeova transformacija (STFT). Nju je prvi definisao Gabor [12] četrdesetih godina prošlog vijeka motivisan problemima koji su nastupili u analizi govornog signala metodama klasične spektralne analize. Osnovna ideja je odsjeći dio signala, funkcijom prozora $w(t)$, i zatim naći njegovu Furijeovu transformaciju. Pomjeranjem prozora $w(t)$ po vremenskoj osi dobija se dvodimenziona reprezentacija signala $x(t)$, koja se naziva kratkotrajna Furijeova transformacija.

$$STFT(t, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} w^*(\tau - t) \cdot x(\tau) \cdot e^{-j\omega\tau} d\tau \quad (45)$$

U navedenoj definiciji parametar t predstavlja položaj prozora na vremenskoj osi. Da bi STFT signala adekvatno opisivala osobine signala u posmatranom trenutku t poželjno je da funkcija prozora $w(\tau)$ bude parna funkcija sa maksimumom u $\tau = 0$. Sa stanovišta numeričke realizacije STFT poželjno je da funkcija prozora ima konačno trajanje, jer se tada integral može aproksimirati konačnom sumom.

Posmatrajmo dva slučaja: konstantni signal $x_1(t) = 1$ i delta impuls $x_2(t) = \delta(t)$. STFT ovih signala su:

$$STFT_{x_1}(t, \omega) = W(\omega)e^{-j\omega t} \text{ i } STFT_{x_2}(t, \omega) = w(t) \quad (46)$$

Idealne distribucije ova dva signala su:

$$ITFD_{x_1} = 2\pi\delta(\omega) \text{ i } ITFD_{x_2} = \delta(t) \quad (47)$$

dakle da bi STFT signala po karakteristikama bila bliska idealnom slučaju potrebno je da prozor bude što bliža delta impulsu, a takođe i da Furijeova transformacija prozora bude bliska delta impulsu. Ova dva zahtjeva su kontradiktorni, pa se stoga traži kompromisni oblik funkcije prozora koji daje zadovoljavajuće rezultate u oba slučaja. Zaključimo da je poželjno da prozor bude funkcija kratkog trajanja u oba domena i vremenskom i frekvencijskom.

Kratkotrajna Furijeova transformacija je linearna transformacija. Ona takođe zadovoljava osobine P2, P3, P13 i P14. Pored toga ova transformacija je reverzibilna, odnosno moguće je potpuno rekonstruisati signal na osnovu njegove STFT. Veliki nedostatak STFT je to što njene vrijednosti nijesu realne odnosno što ne zadovoljava osobinu P0. Detaljna analiza osobina kratkotrajne Furijeove transformacije može se naći u [13].

2.6. Spektrogram

Spektrogram je energetska verzija kratkotrajne Furijeove transformacije. Definiše se kao:

$$SPEC(t, \omega) = |STFT(t, \omega)|^2 \quad (48)$$

Iz definicije se vidi da spektrogram uzima samo realne nenegativne vrijednosti. Spektrogram zadovoljava osobine P0, P1, P2, P3. Detaljna analiza osobina spektrograma može se naći u [14]. Glavni nedostatak spektrograma u odnosu na STFT je gubitak osobine linearnosti i nemogućnost rekonstrukcije signala na osnovu njegovog spektrograma. Jednostavno računanje kratkotrajne Furijeove transformacije, a samim tim i spektrograma, čini ovu distribuciju jednom od najčešće korišćenih. Dobra osobina spektrograma je pored lakoće računanja i odsustvo neželjenih kros-članova što omogućava jednostavnu analizu multikomponentnih signala. Naime, ukoliko analiziramo signal sastavljen od n komponenti:

$$x(t) = \sum_{i=1}^n A_i(t)e^{j\phi_i(t)} \quad (49)$$

gdje su $A_i(t)$ sporopromjenjive funkcije, tako da možemo smatrati da su konstantne u intervalu jednakom širini prozora koji se koristi za računanje spektrograma, dobijamo da se spektrogram ovog signala može aproksimirati sa:

$$STFT_x(t, \omega) \approx \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n A_i(t) A_j(t) e^{j(\phi_i(t) - \phi_j(t))} W(\omega - \phi'_i(t)) W^*(\omega - \phi'_j(t)) \quad (50)$$

pri čemu je pretpostavljeno da su drugi izvodi faza pojedinih komponenti signala zanemarljivi. U gornjoj formuli $W(\omega)$ predstavlja Furijeovu transformaciju korišćene funkcije prozora. U izrazu (50) članove kod kojih je $i = j$ nazivamo auto-članovima dok članove dobijene za $i \neq j$ nazivamo kros-članovima. Uvođenje ove terminologije zasnovano je na činjenici da za slučaj monokomponentnog signala $n = 1$ imamo samo auto-član, dok se kros-članovi javljaju kao posledica međusobne interferencije različitih komponenti signala. Ranije smo vidjeli da je poželjno da funkcija prozora i njena Furijeova transformacija budu ograničenog trajanja. Neka je:

$$W(\omega) = 0 \text{ za } |\omega| > B$$

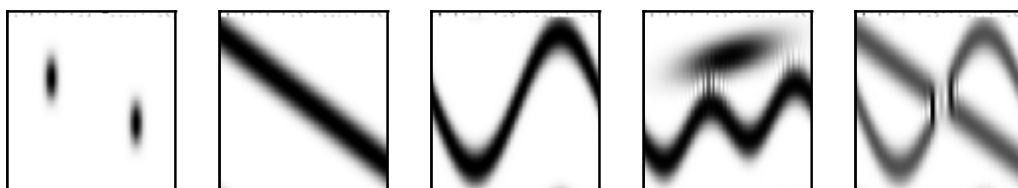
Tada za neko i i neko j , $i \neq j$ kros-član neće postojati ukoliko je:

$$|\phi'_i(t) - \phi'_j(t)| > 2B \quad (51)$$

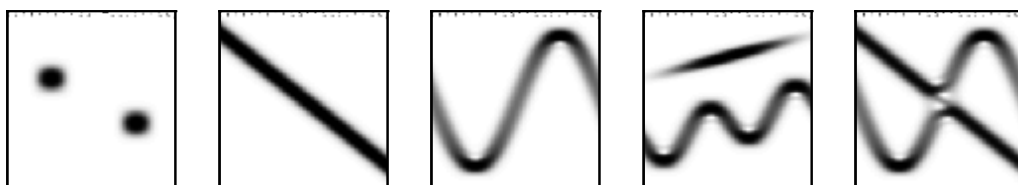
odnosno uslov za nepostojanje kros-članova kod spektrograma je da su komponente signala dovoljno razdvojene u TF ravni. Kros članovi kod spektrograma detaljno su analizirani u [15].

Na slikama 3, 4 i 5 prikazani su spektrogrami 5 različitih signala, pri čemu je korišćen Hanningov prozor male širine (slika 3), prozor kompromisne širine, kod kojega je relativna širina u vremenskom domenu jednaka relativnoj širini u frekvencijskom domenu (slika 4) i veoma širok prozor (slika 5). Prvi signal predstavlja dva signala razdvojena i po vremenu pojavljivanja i po frekvencijskom sadržaju, drugi slučaj je linearno frekvencijski modulirani signal, treći slučaj je signal sa sinusoidalnom promjenom frekvencije (izuzetno nelinearna faza signala), četvrti slučaj je dvokomponentni signal kod kojega su komponente razdvojene u TF ravni i peti slučaj je signal čije se komponente sijeku u TF ravni. Kros-članovi su primjetni u slučaju uskog prozora (njegova Furijeova transformacija ima veliku širinu) kod četvrtog signala, i kod petog signala, u tački presjeka komponenti, za sve razmatrane širine prozora.

Na navedenim slikama vidimo i koliki je uticaj funkcije prozora na kvalitet vremensko-frekvencijske reprezentacije signala.



Sl. 3. Spektrogram, uzak prozor



Sl. 4. Spektrogram, prozor odabran tako da je relativna širina prozora u vremenskom domenu jednaka relativnoj širini prozora u frekvencijskom domenu



Sl. 5. Spektrogram, veoma širok prozor

2.7. Wavelet transformacija

Kratkotrajna Furijeova transformacija ima konstantnu rezoluciju po vremenskoj i po frekvencijskoj osi. Za analizu komponenti viših frekvencija nije neophodan širok prozor, dok je kod niskofrekventnih komponenti širok prozor neophodan. Stoga se nameće zaključak da bi dobro bilo koristiti promjenljivu širinu prozora. Najjednostavnija transformacija signala kod koje je primijenjena promjenjiva širinu prozora je Wavelet transformacija [16]:

$$WT(t, a) = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \cdot h^* \left(\frac{\tau - t}{a} \right) d\tau \quad (52)$$

gdje je $h(t)$ osnovni wavelet dobro koncentrisan po vremenskoj i po frekvencijskoj osi. Ova transformacija je linearna, a takođe je moguće izvršiti rekonstrukciju signala na osnovu poznate Wavelet transformacije. Drugi parametar ove transformacije nije frekvencija, već

skala a . Wavelet transformacija našla je veliku primjenu u metodama kompresije audio i video podataka. Energetska verzija Wavelet transformacije naziva se skalogram:

$$SCAL(t, a) = |WT(t, a)|^2 \quad (53)$$

2.8. Wignerova distribucija

Ovu distribuciju definisao je Wigner [17] 1932. godine, a potreba za njom se pojavila u problemima kvantne mehanike. Na probleme obrade signala primijenjena 1948. godine od strane Ville-a [18], tako da se često referencira kao Wigner-Ville-ova distribucija. Wigner-ova distribucija $WD(t, \omega)$ definiše se kao Furijeova transformacija lokalne autokorelacione funkcije $R(t, \tau)$ posmatranog signala, po promjenljivoj τ :

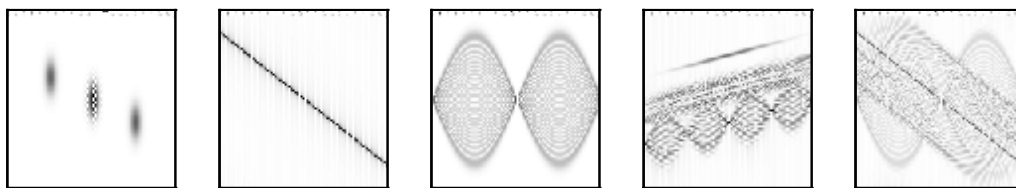
$$R(t, \tau) = x\left(t + \frac{\tau}{2}\right) \cdot x^*\left(t - \frac{\tau}{2}\right) \quad (54)$$

$$WD(t, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R(t, \tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \quad (55)$$

Wignerova distribucija signala konstantne amplitude, kod kojega se faza može prikazati polinomom drugog stepena se poklapa sa idealnom TFD tog signala. Ova distribucija zadovoljava osobine P0-P18, izuzev osobine P1. Stoga ona predstavlja najznačajniju kvadratnu TFD. Najveći nedostatak Wignerove distribucije su izuzetno jako izraženi kros članovi. Posmatrajući Wignerovu distribuciju multikomponentnih signala može se doći do zaključka da se kros član javlja na sredini linije koja povezuje dvije komponente signala u TF ravni [19], [20]. Napomenimo da se ne mora raditi o multikomponentnom signalu, jer i kod monokomponentnog signala dolazi do interferencije komponenti signala lociranih u različitim vremenskim trenucima i na različitim frekvencijama.

Praktične realizacije Wignerove distribucije zahtijevaju uvođenje ograničenja po τ osi, odnosno množenje autokorelacione funkcije sa prozorom $w(\tau)$, te se na taj način dobija pseudo-Wignerova distribucija.

Na slici 6 prikazana je Wignerova distribucija za 5 različitih signala, koji su opisani prilikom navođenja primjera spektrograma (slike 3, 4 i 5).



Sl. 6. Wignerova distribucija raznih signala

2.9. Cohen-ova klasa distribucija

Osnova za definisanje ove klase distribucija su marginalni uslovi. Definicija klase i osnovne osobine se mogu naći u [21]. Cohenova klasa distribucija se definiše sa:

$$CD(t, \omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} c(\theta, \tau) \cdot x(u + \frac{\tau}{2}) \cdot x^*(u - \frac{\tau}{2}) \cdot e^{-j\theta t - j\omega\tau + j\theta u} du d\tau d\theta \quad (56)$$

gdje je $c(\theta, \tau)$ jezgro distribucije na koje se nameću uslovi: $c(\theta, 0) = 1$ i $c(0, \tau) = 1$, koji su neophodni da bi marginalni uslovi bili zadovoljeni. Ova definicija Cohen-ove klase bazirana je na Wigner-ovoj distribuciji, a može se koristiti bilo koja distribucija koja zadovoljava marginalne uslove.

Distribucije, od praktičnog značaja, iz ove klase su:

Choi-Williams-ova distribucija [22]:

$$c(\theta, \tau) = e^{-\theta^2 \tau^2 / \sigma^2} \quad (57)$$

(parametar σ određuje širinu jezgra). Na slici 7 prikazana je Choi-Williams-ova TFD za 5 signala koji su navedeni u prethodnom poglavlju.

Born-Jordan-ova distribucija:

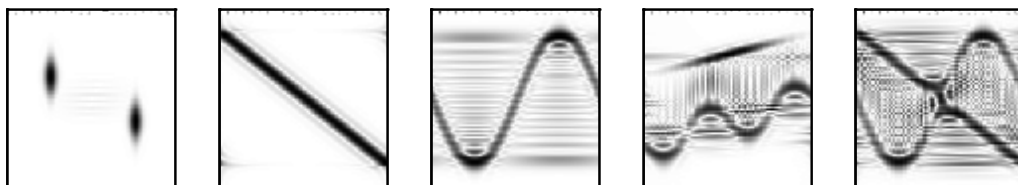
$$c(\theta, \tau) = \frac{2}{\theta\tau} \sin\left(\frac{\theta\tau}{2}\right) \quad (58)$$

čiji je izgled prikazan na slici 8 za 5 karakterističnih, ranije opisanih signala.

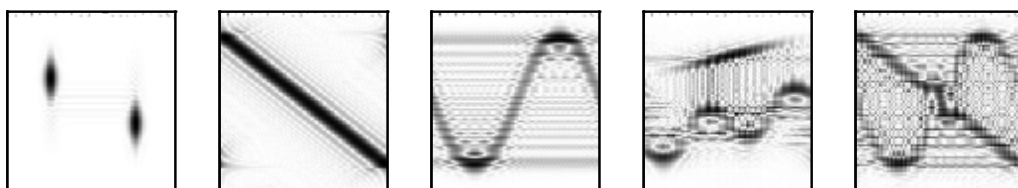
Zao-Atlas-Marks-ova distribucija [23]:

$$c(\theta, \tau) = w(\tau) \left| \tau \right| \frac{2}{\theta \tau} \sin\left(\frac{\theta \tau}{2}\right) \quad (59)$$

gdje je $w(\tau)$ je funkcija prozora.



Sl. 7. Choi Williams-ova distribucija, $\sigma = 2\pi$



Sl. 8. Born Jordanova distribucija

2.10. S-metod

Od svih kvadratnih distribucija, Wignerova TFD zadovoljava najviše osobina (sve izuzev osobine P1), pa je stoga od velikog interesa posmatrati metode bazirane na Wignerovoj distribuciji, koji zadržavaju sve njene poželjne osobine, i pored toga eliminišu pojavu kros članova. Takav je slučaj kod S-metoda [24], koji pored dobrih osobina Wignerove distribucije, ima i osobine spektrograma, po pitanju kros-članova. Izraz za S-metod može se izvesti na nekoliko načina. Opisaćemo ovdje najjednostavniji način. Wignerova distribucija može se napisati u sledećem obliku:

$$WD(t, \omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} STFT(t, \omega + \theta) \cdot STFT^*(t, \omega - \theta) d\theta \quad (60)$$

Posmatrajmo multikomponentni signal sastavljen od dvije komponente: $x(t) = A_1(t)e^{j\phi_1(t)} + A_2(t)e^{j\phi_2(t)}$, pri čemu su promjene faze pojedinih komponenti približno linearne funkcije u intervalu jednakom širini prozora korišćenog za računanje STFT, a njihove amplitude približno konstantne u naznačenom intervalu. STFT ovakvog signala se može napisati u obliku:

$$STFT_x(t, \omega) = B_1(t)W(\omega - \phi'_1(t)) + B_2(t)W(\omega - \phi'_2(t)) \quad (61)$$

gdje je $W(\omega)$ funkcija ograničenog trajanja. Posmatrajmo sada izraz za Wignerovu distribuciju (60). Za male vrijednosti promjenljive integracije θ konvolucija se računa za svaku komponentu zasebno, odnosno, kros-članovi se ne pojavljuju. Tek kada parametra θ premaši neku kritičnu vrijednost, pod integralom se počinje pojavljivati član koji je dobijen proizvodom jedne komponente prve STFT i druge komponente druge STFT, što je po prirodi kros-član. S-metod se dobija ukoliko se integracija u navedenom izrazu ograniči prozorom $P(\theta)$ (najčešće pravougaoni prozor) konačne širine $2L_p$:

$$SM(t, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} P(\theta) \cdot STFT(t, \omega + \theta) \cdot STFT^*(t, \omega - \theta) d\theta \quad (62)$$

Širina prozora se bira tako da se u računanju konvolucije sračuna konvolucija svakog auto-člana sa samim sobom, a da se ne pojavi slučaj da se u konvoluciji množe auto-članovi različitih komponenti analiziranog signala.

S-metod ima niz veoma povoljnih osobina: jednostavno računanje (svodi se na kratkotrajnu Furijeovu transformaciju), dobra koncentracija komponenti signala, nivo kros-članova kontrolisan parametrom L_p .

2.11. Spektri višeg reda

Problemi koji se javljaju kod Wignerove distribucije pri analizi multikomponentnih signala (kros-članovi), djelimično se mogu potisnuti korišćenjem zaobljavanja (filtriranja) po frekvencijskoj osi (pseudo Wignerova distribucija), po vremenskoj osi (Smoothed Wignerova distribucija) ili korišćenjem neke od distribucija iz Cohen-ove klase kod kojih su kros-članovi potisnuti. Takođe je u velikom broju slučajeva faza analiziranih signala nelinearna funkcija, pa kvadratne distribucije ne postižu idealnu koncentraciju na trenutnoj frekvenciji signala. Alternativni pristup analizi takvih problema je uvođenje distribucija višeg reda [25], [26], [27]. Vidjeli smo da kvadratne distribucije možemo tumačiti kao raspodjele energije signala u TF ravni. Kod distribucija, odnosno spektara višeg reda, signal se iz vremenskog domena transformiše u k-dimenzionalni domen, gdje imamo više vremenskih ili više frekvencijskih dimenzija. Najjednostavniji slučaj spektra višeg reda dobija se proširivanjem Wignerove distribucije na multidimenzionalni (u ovom slučaju multifrekvencijski) domen. Definišimo

prvo k -dimenzionalnu autokorelacionu funkciju signala $x(t)$. Neka su k i l prirodni brojevi, pri čemu je $0 \leq l < k$.

$$R_k(t; \tau_1, \tau_2, \dots, \tau_k) = x^*(t - \alpha) \prod_{i=1}^l x^*(t - \alpha + \tau_i) \prod_{i=l+1}^k x(t - \alpha + \tau_i) \quad (63)$$

Konstanta α u navedenom izrazu može biti proizvoljna. Wignerov spektar k -tog reda signala $x(t)$ definiše se kao:

$$WHOS_k(t; \omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n) = \int R_k(t; \tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n) \prod_{i=1}^l e^{j\omega_i \tau_i} d\tau_i \prod_{i=l+1}^k e^{-j\omega_i \tau_i} d\tau_i \quad (64)$$

Ukoliko želimo da Wignerov spektar k -tog reda, posmatran u trenutku t bude vezan sa osobinama signala u istom vremenskom trenutku, pokazuje se da parametar α u (63) treba

odabrati tako da bude: $\alpha = \frac{1}{k+1} \sum_{i=1}^n \tau_i$.

Nakon što preslikamo signal iz vremenskog u $k+1$ dimenzionalni vremensko-frekvencijski prostor, možemo odabrati neko preslikavanje k -dimenzionog frekvencijskog prostora u jednodimenzioni prostor, tako da na kraju dobijemo dvodimenzionalnu vremensko-frekvencijsku reprezentaciju signala.

2.12. L-Wignerova distribucija

L-Wignerova distribucija [25], [26] spada u klasu spektara višeg reda, pri čemu je izbjegnuto računanje višedimenzionalnih transformacija, već je na direktan način omogućeno dobijanje projekcije odgovarajućeg spektra višeg reda. Distribucija je definisana sa:

$$LD(t, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x^L(t + \frac{\tau}{2L}) x^{*L}(t - \frac{\tau}{2L}) e^{-j\omega\tau} d\tau \quad (65)$$

Gdje je L parametar koji određuje red distribucije. Ukoliko je $L = 1$ dobijamo običnu Wignerovu distribuciju. Za veće vrijednosti parametra L pokazuje se da se poboljšava koncentracija distribucije na trenutnoj frekvenciji.

2.13. Diskretne forme vremensko-frekvencijskih distribucija

Sve razmatrane vremensko-frekvencijske reprezentacije predstavljaju integralne transformacije signala iz jednodimenzionalnog vremenskog u dvodimenzionalni (ili višedimenzionalni u slučaju spektara višeg reda) vremensko-frekvencijski domen, i zasnovane su na Furijeovoj transformaciji. Analitičko izračunavanje distribucija od interesa je u teorijskim razmatranjima i može biti izvedeno za veoma usku klasu signala. Primjena TFD u konkretnim slučajevima, kada signal nije dat analitički, zahtijeva upotrebu računara, pa je stoga neophodno preduzeti odgovarajuću diskretizaciju signala i distribucija. Diskretne forme vremensko-frekvencijskih distribucija analizirane su u [28], [29], [30]. Kako je većina distribucija bazirana na Furijeovoj transformaciji, to se na osnovu teoreme o odabiranju i dobro poznatih metoda za diskretizaciju Furijeove transformacije mogu izvesti uslovi pod kojima posmatrani signal može biti diskretizovan.

Posmatrajmo, na primjer, kratkotrajnu Furijeovu transformaciju, odnosno spektrogram. U definicionom izrazu (45) primjećujemo Furijeovu transformaciju proizvoda signala i funkcije prozora. Da bismo mogli izvršiti diskretizaciju, tako da ne dođe do preklapanja spektralnih komponenti neophodno je da ovaj složeni signal bude signal sa ograničenim frekvencijskim opsegom, i tada možemo definisati maksimalni korak odabiranja kao

$$T_{\max} = \pi / \omega_{\max} \quad (66)$$

gdje je sa ω_{\max} označena maksimalna frekvencija (po apsolutnoj vrijednosti) prisutna u složenom signalu. Signal čija se Furijeova transformacija traži je proizvod dva signala, analiziranog signala i funkcije prozora. Da bi on bio ograničenog opsega, moraju oba činioca biti ograničenog opsega, to jest mora biti zadovoljeno: $X(\omega) = 0$ za $|\omega| > B_x$ i $W(\omega) = 0$ za $|\omega| > B_w$, gdje je sa $X(\omega)$ označena Furijeova transformacija signala, a $W(\omega)$ Furijeova transformacija prozorske funkcije. Spektar proizvoda ova dva signala je ograničen, odnosno jednak je nuli za $|\omega| > B_x + B_w$. Dakle korak odabiranja biramo tako da zadovoljava:

$$T < \pi / (B_x + B_w) \quad (67)$$

što je nešto manja vrijednost u odnosu na maksimalni period odabiranja signala $x(t)$. Diskretizacija se vrši po promjenljivoj integraciji τ , integral prelazi u sumu, ali granice sume su beskonačne. Svi realni signali su konačnog trajanja, a nema smisla uzimati funkciju

prozora neograničenog trajanja, tako da se u konkretnim slučajevima mogu primijeniti konačne granice sume:

$$STFT_x(t, \omega) \approx \frac{1}{T} \sum_{m=N_1}^{N_2} x(t)w^*(t-mT)e^{-jomT} \quad (68)$$

Na osnovu gornje formule možemo koristeći se računarom sračunati vrijednosti STFT u proizvoljnoj tački TF ravni, odnosno za proizvoljno zadate vrijednosti promjenljivih t i ω . Ovdje treba naglasiti da je usled diskretizacije STFT postao periodična funkcija po promjenljivoj ω , sa periodom $T_\omega = 2\pi / T$, tako da ima smisla tražiti vrijednosti STFT samo na osnovnom periodu te funkcije po ω osi. Sa druge strane signal $x(t)$ je vremenski ograničen, pa je i interval po vremenskoj osi od interesa za računanje STFT konačan. Uobičajeno je da se ova dva intervala podijele na konačan broj tačaka, odnosno formiramo mrežu u TF ravni i računamo vrijednosti distribucije samo u čvorovima mreže kojih je konačno mnogo pa kompletnu operaciju određivanja TFD možemo obaviti primjenom računara. Za računanje Furijeove transformacije pogodno je koristiti algoritme FFT čime se uveliko smanjuje broj potrebnih računskih operacija.

Opisani metod analize problema diskretizacije kod STFT može se lako primijeniti i na bilo koju TFD. Navedimo stavke bitne za određivanje Wignerove distribucije u diskretnom domenu.

Kod Wignerove distribucije (55) signal čija se Furijeova transformacija traži je proizvod signala $x(t)$ i konjugovano kompleksnog, vremenski pomjerenog i invertovanog signala $x(t)$. Stoga, ako je $X(\omega) = 0$ za $|\omega| > B_x$, tada je spektar signala pod integralom u (55) ograničen, to jest jednak nuli za $|\omega| > 2B_x$, tako da je za računanje Wignerove distribucije neophodno odabirati signal dvostruko većom učestanošću od Najkvistove učestanosti.

2.14. Modifikovane vremensko-frekvencijske reprezentacije

U definiciji većine vremensko-frekvencijskih reprezentacija signala prisutna je integracija po određenom parametru ili parametrima, pri čemu se integracija vrši po čitavom opsegu vrijednosti parametra od $-\infty$ do ∞ . U konkretnim slučajevima radi se sa signalima konačnog trajanja i vremensko-frekvencijska reprezentacija signala se određuje primjenom

računara. Stoga se granice integracije svode na konačne vrijednosti i na taj način dobijamo pseudo formu posmatrane reprezentacije. Najčešći slučaj je uvođenje prozora konačne širine po posmatranom parametru.

2.15. Numerički pristup vremensko-frekvencijskim reprezentacijama signala

Određivanje vremensko-frekvencijskih reprezentacija signala, osim u malom broju slučajeva kada se može doći do rješenja u analitičkom obliku, vezano je za upotrebu digitalnih računara [31].

Prvi problem je diskretizacija signala. Signal mora ispoštovati Najkvistov uslov ne bi prilikom diskretizacije došlo do promjene informacija sadržanih u signalu. Furijeova transformacija se dobija u diskretnom obliku (najčešće nekim od algoritama FFT), te se prema tome podrazumijeva inherentna periodičnost posmatranog signala. Dobijena diskretna TFD je periodična po obje ose i vremenskoj i frekvencijskoj. Navedene činjenice treba imati na umu pri tumačenju pojedinih rezultata. Naime, pored očekivanih kros-članova u slučajevima multikomponentnih signala, oni se mogu pojaviti i na drugim mjestima. Ovaj slučaj može se ilustrovati FM signalom sa linearnom promjenom frekvencije.

S obzirom da za računanje TFD signala u određenom diskretnom vremenskom trenutku trebamo poznavati prošle kao i buduće vrijednosti signala, to za signal dužine N odbiraka ne možemo dobiti TFD u svih N tačaka već prve vrijednosti TFD dobijamo poslije k -tog odbirka, a posljednje u $(N-k)$ -tom trenutku. Veličina k je jednaka polovini dužine prozora (ukoliko se pri računanju TFD signal prethodno množi nekom funkcijom prozora, što je najčešći slučaj). Ovaj problem može se prevazići na dva načina. Prvi način je posmatrati signal na vremenskom intervalu širem od željene dužine TFD (vremenske). Ovaj način možemo primijeniti ukoliko nam je poznato ponašanje signala (njegovi odbirci) u većem broju tačaka ili ukoliko se radi o analitički zadatom signalu. Drugi način je dopunjavanje signala nulama na početku i na kraju. Ovaj način primjenjujemo kada ne raspoložemo sa velikim brojem odbiraka signala (dovoljnim za analizu prethodno opisanim načinom), a iz tog skupa odbiraka primjenom TF analize želimo izvući najveću moguću informaciju. U ovom radu biće korišćen prvi način, jer se u većini slučajeva radi o analitički zadatim signalima, pa su dostupne sve vrijednosti odbiraka.

3. Koncentracija vremensko-frekvencijskih reprezentacija

Osnovni zadatak vremensko-frekvencijskih reprezentacija signala je da daju adekvatnu informaciju o raspodjeli energije signala u vremensko frekvencijskoj ravni. Kvalitet ponuđene informacije može se posmatrati kroz koncentraciju pojedinih komponenti u TF ravni ili kroz prisustvo neželjenih članova (kros članovi). Postoji veliki broj radova gdje se uvođenjem modifikacija postojećih distribucija ili uvođenjem novih distribucija poboljšava koncentracija vremensko-frekvencijske reprezentacije određene klase signala [21], [22], [26], [32-42].

S obzirom da su vremensko-frekvencijske distribucije dvodimenzione funkcije koje daju koncentraciju energije (koja je po svojoj definiciji nenegativna veličina), i da je za dati signal dvojni integral po TF ravni vremensko-frekvencijske distribucije konstantan i jednak energiji signala, može se povući analogija između vremensko -frekvencijskih distribucija i distribucija vjerovatnoće. Na toj analogiji se baziraju nekoliko metoda mjerenja koncentracije vremensko-frekvencijskih distribucija [43], [44], [45]. Ovakav pristup značajno smanjuje klasu distribucija na koju je primjenljiv, jer postoji veliki broj distribucija koje ne zadovoljavaju uslov nenegativnosti, a od interesa su neke distribucije kod kojih čak ni energetske uslov nije zadovoljen.

Problem određivanja koncentracije vremensko frekvencijske reprezentacije signala može se obrađivati i analitički. U nastavku će biti opisan analitički metod analize TFD sa stanovišta koncentracije a nakon toga će biti navedeni numerički metodi za određivanje koncentracije TFD bazirani na uvođenju mjera koncentracije.

3.1. Analitički pristup određivanju koncentracije vremensko-frekvencijskih distribucija

Da bismo problemu određivanja koncentracije TFD pristupili na analitički način moramo precizno definisati šta ćemo podrazumijevati pod terminom “koncentracija TFD”. To nije nimalo jednostavno uraditi u opštem slučaju, jer razne TFD imaju veoma različite osobine, a pored toga za različite klase signala (monokomponentni, multikomponentni sa komponentama koje se ne sijeku, multikomponentni kod kojeg se komponente sijeku u TF ravni, signali sa sporopromjenjivom amplitudom ...).

Dobra polazna tačka za definisanje kriterijuma za određivanje koncentracije TFD je definisanje idealnog slučaja, odnosno kada definišemo kako za određenu klasu signala treba izgledati idealno koncentrisana TFD, tada možemo bilo koju TFD porediti sa njom i dobiti informaciju o njenom kvalitetu. Definicija idealne TFD jednačinama (27) i (28) podrazumijeva da se posmatra jedna klasa signala, odnosno signali čija je amplituda sporopromjenjiva. Neka je signal:

$$x(t) = A(t)e^{j\phi(t)} \quad (69)$$

signal iz posmatrane klase. Tada je njegova trenutna frekvencija definisana sa:

$$\omega_i(t) = \frac{d\phi(t)}{dt} = \phi'(t) \quad (70)$$

a idealna TFD posmatranog signala je:

$$ITFD(t, \omega) = 2\pi |A(t)|^2 \delta(\omega - \phi'(t)) \quad (71)$$

Analiza koncentracije spektrograma

Posmatrajmo najjednostavniju TFD, spektrogram, signala (69):

$$SPEC(t, \omega) = \left| \int_{-\infty}^{\infty} x(t + \tau) w(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \right|^2 = \left| \int_{-\infty}^{\infty} A(t + \tau) w(\tau) e^{j\phi(t+\tau)} e^{-j\omega\tau} d\tau \right|^2 \quad (72)$$

gdje je $w(\tau)$ funkcija prozora za koju ćemo pretpostaviti da je realna parna funkcija $w(-\tau) = w(\tau)$. Pretpostavimo da su varijacije funkcije $A(t)$ unutar prozora $w(\tau)$ zanemarljive, odnosno da možemo smatrati da je: $A(t + \tau)w(\tau) \approx A(t)$. Faznu signala $\phi(t + \tau)$ razvijmo u stepeni red po promjenljivoj τ u okolini tačke $\tau = t$. Dobijamo:

$$\phi(t + \tau) = \phi(t) + \phi'(t)\tau + \frac{1}{2!}\phi''(t + \tau_1)\tau^2 \quad (73)$$

a izraz za spektrogram postaje:

$$SPEC(t, \omega) = \left| \int_{-\infty}^{\infty} A(t) e^{j\phi(t)} w(\tau) e^{j\phi'(t)\tau} e^{j\phi''(t+\tau_1)\tau^2/2!} e^{-j\omega\tau} d\tau \right|^2 \quad (74)$$

Izraz (74) se može shvatiti kao Furijeova transformacija proizvoda tri funkcije: $f_1 = w(t)$, $f_2 = e^{j\phi'(t)\tau}$ i $f_3 = e^{j\phi''(t+\tau_1)\tau^2/2!}$, pri čemu se $A(t)e^{j\phi'(t)}$ može izvući ispred integrala jer ne zavisi od τ . Proizvodu u vremenskom domenu odgovara konvolucija u frekvencijskom, tako da se izraz (74) može napisati kao

$$SPEC(t, \omega) = |A(t)|^2 \left| 2\pi \delta(\omega - \phi'(t)) *_{\omega} W(\omega) *_{\omega} FT \left[e^{j\phi''(t+\tau_1)\tau^2/2!} \right] \right|^2 \quad (75)$$

gdje je $W(\omega) = FT[w(\tau)]$, a FT predstavlja operator Furijeove transformacije (po promjenljivoj τ). Za proizvoljnu funkciju $F(\omega)$ vrijedi:

$$|\delta(\omega - \omega_0) *_{\omega} F(\omega)|^2 = |F(\omega_0 - \omega)|^2 = \delta(\omega - \omega_0) *_{\omega} |F(\omega)|^2 \quad (76)$$

tako da u izrazu (75) delta funkciju možemo izvući ispod apsolutne vrijednosti i kvadrata:

$$SPEC(t, \omega) = 4\pi^2 |A(t)|^2 \delta(\omega - \phi'(t)) *_{\omega} \left| W(\omega) *_{\omega} FT \left[e^{j\phi''(t+\tau_1)\tau^2/2!} \right] \right|^2 \quad (77)$$

konačno dobijamo:

$$SPEC(t, \omega) = 2\pi ITFD(t, \omega) *_{\omega} \left| W(\omega) *_{\omega} FT \left[e^{j\phi''(t+\tau_1)\tau^2/2!} \right] \right|^2 \quad (78)$$

Iz izraza (78) se može izvesti zaključak koliko se spektrogram za posmatrani signal razlikuje od idealne TFD. Vidimo da je pored konstante 2π razlika u tome što je idealna TFD konvoluirana sa jednom funkcijom zavisnom od prozora i od signala. Ukoliko su svi izvodi faze signala reda većeg od 1 jednaki nuli, tada se u jednačini (78) gubi član zavisn od drugog izvoda faze, te možemo zaključiti da spektrogram postaje jednak idealnoj TFD ukoliko je prozor veoma širok, odnosno njegova Furijeova transformacija bliska delta impulsu. Ukoliko to nije slučaj, viši izvodi faze mogu značajno degradirati koncentraciju spektrograma, pa ima smisla tražiti optimalni prozor čijom se primjenom ta degradacija svodi na minimum.

Prvi problem u daljoj analizi izraza (78) predstavlja veličina τ_1 , koja u opštem slučaju nije nezavisna od τ , pa je dalje analitičko pojednostavljivanje izraza (78) veoma teško. Ograničimo se na klasu linearno frekvencijski moduliranih signala sa sporopromjenjivom amplitudom oblika:

$$x(t) = A(t)e^{j\phi_0 + j\omega_0 t + ja\frac{t^2}{2}} \quad (79)$$

Izraz (78) se svodi na:

$$SPEC(t, \omega) = 2\pi ITFD(t, \omega) *_{\omega} \left| W(\omega) *_{\omega} FT \left[e^{ja\tau^2/2} \right] \right|^2 \quad (80)$$

funkcija koja degradira kvalitet spektrograma je:

$$P(\omega) = \left| W(\omega) *_{\omega} FT \left[e^{ja\tau^2/2} \right] \right|^2 \quad (81)$$

i auto-član, odnosno spektrogram signala za fiksirani trenutak t ima oblik funkcije $P(\omega)$. Od interesa je ostvariti što bolju koncentraciju spektrograma, odnosno širina funkcije $P(\omega)$ po frekvencijskoj osi treba biti minimalna. Ovu širinu možemo analitički definisati kao:

$$B = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \omega^2 P(\omega) d\omega}{\int_{-\infty}^{\infty} P(\omega) d\omega} \quad (82)$$

i možemo je, napisati na sledeći način:

$$P(\omega) = \left| FT \left[w(\tau) e^{ja\tau^2/2} \right] \right|^2 = FT \left[w(\tau) e^{ja\tau^2/2} \right] \overline{FT \left[w(\tau) e^{ja\tau^2/2} \right]} \quad (83)$$

$$\begin{aligned} P(\omega) &= FT \left[w(\tau) e^{ja\tau^2/2} \right] FT \left[w(-\tau) e^{-ja(-\tau)^2/2} \right] = \\ &= FT \left[\int_{-\infty}^{\infty} w(t-\tau) e^{ja(t-\tau)^2/2} w(-t) e^{-ja(-t)^2/2} dt \right] = FT \left[p(\tau) \right] \end{aligned} \quad (84)$$

gdje je sa $p(\tau)$ označena inverzna Furijeova transformacija funkcije $P(\omega)$. Izraz (82), pod pretpostavkom da je $p(\tau)$ dvaput diferencijabilna funkcija u tački $\tau = 0$ svodi se na:

$$B = \frac{-\left. \frac{d^2 p(\tau)}{d\tau^2} \right|_{\tau=0}}{p(0)} \quad (85)$$

pri čemu je:

$$\left. \frac{d^2 p(\tau)}{d\tau^2} \right|_{\tau=0} = \int_{-\infty}^{\infty} \left(w(t) \frac{d^2 w(t)}{dt^2} - a^2 t^2 w(t)^2 \right) dt \quad (86)$$

$$p(0) = \int_{-\infty}^{\infty} w(t)^2 dt \quad (87)$$

Da bi izraz (86) bio dobro definisan potrebno je da funkcija prozora bude dvaput diferencijabilna funkcija za svako t . Ovaj uslov je dosta jak, na primjer pravougaoni prozor i Hanningov prozor ga ne zadovoljavaju (pravougaoni prozor ima dvije tačke diskontinuiteta u kojima nije diferencijabilan, dok Hanningov prozor nije dvaput diferencijabilan na svojim krajevima). Pretpostavimo da je $w(t)$ dvaput diferencijabilna funkcija svuda osim u jednoj tački t_0 . U nekoj maloj okolini tačke t_0 možemo dodefinisati $w(t)$ tako da bude dvaput diferencijabilna funkcija. Za tako dodefinisani prozor odredimo vrijednost izraza (86), i provjerimo da li ta vrijednost zavisi od širine odabrane okoline tačke t_0 , kao i od načina dodefinisanja funkcije. Ukoliko je izraz (86) nezavisan od navedenih parametara, tada se on može primijeniti za posmatrani prozor. Ovakvom analizom, korišćenjem polinomijalne funkcije za dodefinisanje funkcije prozora u okolini tačke t_0 dobija se zaključak da je dovoljno da $w(t)$ bude neprekidna funkcija u tački t_0 da bi izraz (86) bio dobro definisan. Time je obuhvaćena široka klasa funkcija prozora, ali još uvijek nije najjednostavniji slučaj pravougaonog prozora. Jedan od načina za primjenu izraza (86) na pravougaoni prozor je aproksimacija pravougaonog prozora nekom drugom funkcijom, na primjer Gausovim prozorom kod kojega je eksponent mnogo veći od 2. Ovako dobijena približna vrijednost optimalne širine prozora je bliska stvarnoj vrijednosti zbog činjenice da je spektrogram stabilan u odnosu na male varijacije funkcije prozora.

Pretpostavimo sada da posmatramo jednoparametarsku familiju funkcija prozora gdje je $w_0(t)$, osnovni prozor, a svi ostali prozori iz posmatrane familije mogu se napisati kao $w_T(t) = w_0(t/T)$. Ovdje parametar T određuje širinu korišćenog prozora, dok je sa $w_0(t)$ definisan njegov oblik. Postavimo problem pronalaženja optimalne širine prozora spektrograma za posmatrani signal. Parametar koji treba posmatrati je veličina B definisana sa (85), pri čemu možemo uprostiti pojedine članove, uvođenjem smjene $t/T = u$, pri čemu se prozorska funkcija $w_T(t)$ svodi na $w_0(t)$. Dobijamo da je veličina B jednaka:

$$B = \frac{\frac{\alpha}{T^2} - \beta a^2 T^2}{\gamma} \quad (88)$$

gdje je:

$$\alpha = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^2 w_0(t)}{dt^2} w_0(t) dt \quad (89)$$

$$\beta = \int_{-\infty}^{\infty} w_0(t)^2 t^2 dt \quad (90)$$

$$\gamma = \int_{-\infty}^{\infty} w_0(t)^2 dt \quad (91)$$

Ova funkcija ima minimum za:

$$T = T_{opt} = \sqrt[4]{\frac{-\alpha}{2\beta}} \frac{1}{\sqrt{a}} \quad (92)$$

Ova vrijednost predstavlja, u smislu koncentracije, optimalnu širinu prozora spektrograma. Možemo izvesti generalni zaključak da je za posmatranu klasu prozora i za zadato $w_0(t)$ optimalna širina prozora kod spektrograma za slučaj linearnog frekvencijski modulisanog signala obrnuto proporcionalna korijenu drugog izvoda faze signala, pri čemu konstanta proporcionalnosti zavisi od primijenjenog prozora. U narednoj tabeli su navedeni neki primjeri funkcija prozora kod kojih se integrali u (89) i (90) mogu riješiti analitički.

Napomenimo da je izraz (89) moguće sračunati samo ukoliko je $w_0(t)$ dvaput diferencijabilna funkcija za svako t (tu osobinu ima Gausov prozor), odnosno ako je ispunjen ranije navedeni oslabljeni uslov (Hanningov i Papoulisov prozor ga ispunjavaju). Za slučaj Hanningovog prozora uslovi za primjenu formule (86) nijesu ispunjeni, te striktno gledano na njega ne možemo primijeniti navedenu analizu, ali ukoliko posmatramo prozor koji se od Hammingovog neznatno razlikuje a dvaput je diferencijabilan, dobija se rezultat veoma blizak onom koji je naveden u tabeli. Za pravougaoni prozor se može zaključiti da je njegova optimalna širina $T_{opt} \approx 2 / \sqrt{a}$, ukoliko ga aproksimiramo sa Gausovim prozorom kod kojega je eksponent 32.

Naziv prozora	Funkcija prozora	Optimalna širina prozora
Hanning-ov prozor	$w_T(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos(\pi \frac{t}{T})$ za $ t < T$	$T_{opt} = \frac{\pi}{\sqrt{a}} \sqrt[4]{\frac{2}{2\pi^2 - 15}} \approx \frac{2.5321}{\sqrt{a}}$
Hamming-ov prozor*	$w_T(t) = 0.54 + 0.46 \cos(\pi \frac{t}{T})$ za $ t < T$	$T_{opt} \approx \frac{2.3025}{\sqrt{a}}$
Gauss-ov prozor	$w_T(t) = \exp(-\frac{t^2}{T^2})$	$T_{opt} = \sqrt{\frac{2}{a}} \approx \frac{1.4142}{\sqrt{a}}$
Papoulis-ov prozor	$w_T(t) = \cos(\frac{\pi}{2} \frac{t}{T})$ za $ t < T$	$T_{opt} = \frac{\pi}{\sqrt{2a}} \sqrt[4]{\frac{3}{\pi^2 - 6}} \approx \frac{2.0845}{\sqrt{a}}$

T I Optimalna širina prozora za spektrogram linearnog FM signala

Analiza koncentracije pseudo Wignerove distribucije

Pseudo Wignerova distribucija signala (69) definisana je sa:

$$PWD(t, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t + \frac{\tau}{2}) \bar{x}(t - \frac{\tau}{2}) w(\frac{\tau}{2}) e^{-j\omega\tau} d\tau \quad (93)$$

Ovdje je $w(\tau)$ funkcija prozora za koju ćemo pretpostaviti da je realna i parna funkcija. Primjenjujući tehniku sličnu prethodnom izvodu, razvijanjem faze $\phi(t + \tau)$ u stepeni red po promjenljivoj τ i uzimajući prva četiri člana reda:

$$\phi(t + \tau) = \phi(t) + \phi'(t)\tau + \frac{1}{2!} \phi''(t)\tau^2 + \frac{1}{3!} \phi'''(t + \tau_1)\tau^3 \quad (94)$$

i smatrajući da se amplituda $A(t + \tau)$ može smatrati konstantnom u intervalu određenom širinom prozora dobijamo:

$$PWD(t, \omega) = |A(t)|^2 \int_{-\infty}^{\infty} w(\tau/2) e^{j\frac{1}{48}(\phi'''(t+\tau_1) + \phi'''(t+\tau_2))\tau^3} e^{j\phi'(t)\tau} e^{-j\omega\tau} d\tau \quad (95)$$

napomenimo da se aproksimacija faze signala stepenim redom radi u dvije tačke, te su stoga vrijednosti τ_1 i τ_2 u opštem slučaju različite. Označimo sa $W(\omega)$ Furijeovu transformaciju funkcije prozora $w(\tau/2)$. Gornji izraz se može napisati u obliku:

$$PWD(t, \omega) = 2\pi |A(t)|^2 \delta(\omega - \phi'(t)) *_{\omega} W(\omega) *_{\omega} FT \left[e^{j(\phi'''(t+\tau_1) + \phi'''(t+\tau_2))\tau^3/48} \right] \quad (96)$$

odnosno:

$$PWD(t, \omega) = ITFD(t, \omega) *_{\omega} W(\omega) *_{\omega} FT \left[e^{j(\phi'''(t+\tau_1) + \phi'''(t+\tau_2))\tau^3/48} \right] \quad (97)$$

Vidimo, kao i u slučaju spektrograma da su performanse pseudo Wignerove distribucije degradirane u odnosu na idealnu distribuciju, a stepen degradacije zavisi od funkcije:

$$P(\omega) = W(\omega) *_{\omega} FT \left[e^{j(\phi'''(t+\tau_1) + \phi'''(t+\tau_2))\tau^3/48} \right] \quad (98)$$

Za razliku od spektrograma ova funkcija nije nenegativna, pa stoga širinu funkcije duž frekvencijske ne možemo definisati sa izrazom (82). Problem nenegativnosti možemo prevazići tako što ćemo odrediti širinu apsolutne vrijednosti funkcije $P(\omega)$. Drugi problem je što funkcija $|P(\omega)|^2$ nije centrirana u tački $\omega = 0$, odnosno imamo da je:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \omega |P(\omega)|^2 d\omega \neq 0 \quad (99)$$

pa se u tom slučaju širina funkcije $|P(\omega)|^2$ može definisati kao:

$$B = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} (\omega - \omega_c)^2 |P(\omega)|^2 d\omega}{\int_{-\infty}^{\infty} |P(\omega)|^2 d\omega} \quad (100)$$

gdje je:

$$\omega_c = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \omega |P(\omega)|^2 d\omega}{\int_{-\infty}^{\infty} |P(\omega)|^2 d\omega} \quad (101)$$

pa je sada, nakon sređivanja izraza (100):

$$B = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \omega^2 |P(\omega)|^2 d\omega}{\int_{-\infty}^{\infty} |P(\omega)|^2 d\omega} - \left(\frac{\int_{-\infty}^{\infty} \omega |P(\omega)|^2 d\omega}{\int_{-\infty}^{\infty} |P(\omega)|^2 d\omega} \right)^2 \quad (102)$$

Smatrajući da je faza signala polinom trećeg stepena $\phi(t) = \phi_0 + \omega_0 t + at^2/2 + bt^3/6$ izraz (98) možemo pisati kao:

$$P(\omega) = W(\omega) *_{\omega} FT[e^{jb\tau^3/24}] = FT[w(\tau/2)e^{jb\tau^3/24}] \quad (103)$$

sada je, uz pretpostavku da je funkcija prozora realna i parna:

$$\begin{aligned} |P(\omega)|^2 &= P(\omega) \cdot \overline{P(\omega)} = FT[w(\tau/2)e^{jb\tau^3/24}] \cdot \overline{FT[w(\tau/2)e^{jb\tau^3/24}]} = \\ &= FT[w(\tau/2)e^{jb\tau^3/24}] \cdot FT[w(-\tau/2)e^{-jb(-\tau)^3/24}] = \\ &= FT[w(\tau/2)e^{jb\tau^3/24} *_{\tau} w(-\tau/2)e^{jb\tau^3/24}] = FT[p(\tau)] \end{aligned} \quad (104)$$

gdje je:

$$p(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} w((\tau-u)/2)e^{jb(\tau-u)^3/24} w(-u/2)e^{jbu^3/24} du \quad (105)$$

Kako je $|P(\omega)|^2$ Furijeova transformacija funkcije $p(\tau)$, to se njeni momenti u odnosu na promjenljivu ω mogu dobiti kao izvodi funkcije $p(\tau)$ računati u $\tau=0$. Na taj način dobija se da su vrijednosti integrala u (102):

$$\int_{-\infty}^{\infty} \omega^2 |P(\omega)|^2 d\omega = - \int_{-\infty}^{\infty} \left(w(t) \frac{d^2 w(t)}{dt^2} - \frac{1}{64} b^2 t^4 w(t)^2 \right) dt \quad (106)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \omega |P(\omega)|^2 d\omega = \frac{b}{8} \int_{-\infty}^{\infty} w(\tau)^2 \tau^2 d\tau \quad (107)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |P(\omega)|^2 d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} w(t)^2 dt \quad (108)$$

Analiza definisanosti izraza (106), (107) i (108) identična je analizi izraza (86) za slučaj spektrograma.

Za klasu prozorskih funkcija $w_T(t)$ gdje je T parametar koji određuje širinu prozora može se pronaći optimalna vrijednost za T u smislu najbolje koncentracije distribucije. Provedimo takvu analizu za slučaj kada je posmatrana klasa funkcija prozora definisana sa

$w_T(t) = w(t/T)$ gdje je $w(t)$ osnovni prozor. Parametar T u ovom slučaju je očigledno proporcionalan širini prozora $w_T(t)$. Izrazi (106), (107) i (108) se sada svode na:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \omega^2 |P(\omega)|^2 d\omega = -\frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} w(t) \frac{d^2 w(t)}{dt^2} dt + \frac{T^5 b^2}{64} \int_{-\infty}^{\infty} t^4 w(t) dt = -\frac{C_1}{T} + C_2 T^5 b^2 \quad (109)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \omega |P(\omega)|^2 d\omega = \frac{T^3 b}{8} \int_{-\infty}^{\infty} w(t)^2 t^2 dt = C_3 T^3 b \quad (110)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |P(\omega)|^2 d\omega = T \int_{-\infty}^{\infty} w(t)^2 dt = C_4 T \quad (111)$$

gdje su C_1 do C_4 konstante čija se vrijednost računa pomoću osnovne funkcije prozora $w(t)$.

Sada izraz (102) možemo pisati kao:

$$B = -\frac{C_1}{C_4} \frac{1}{T^2} + \left(\frac{C_2}{C_4} - \left(\frac{C_3}{C_4} \right)^2 \right) T^4 b^2 \quad (112)$$

Minimum ove funkcije dobijamo izjednačavajući njen prvi izvod sa nulom i iz te jednačine možemo odrediti optimalnu širinu prozora T_{opt} :

$$T_{opt} = \frac{1}{\sqrt[3]{b}} \sqrt[6]{\frac{C_1 C_4}{2(C_3^2 - C_2 C_4)}} \quad (113)$$

Naziv prozora	Funkcija prozora	Optimalna širina prozora
Hanning-ov prozor	$w_T(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos(\pi \frac{t}{T})$ za $ t < T$	$T_{opt} \approx \frac{2.3267}{\sqrt[3]{b}}$
Hamming-ov prozor	$w_T(t) = 0.54 + 0.46 \cos(\pi \frac{t}{T})$ za $ t < T$	$T_{opt} \approx \frac{2.0962}{\sqrt[3]{b}}$
Gauss-ov prozor	$w_T(t) = \exp(-\frac{t^2}{T^2})$	$T_{opt} = \sqrt[3]{\frac{2}{b}} \approx \frac{1.2600}{\sqrt[3]{b}}$
Papoulis-ov prozor	$w_T(t) = \cos(\frac{\pi t}{2T})$ za $ t < T$	$T_{opt} \approx \frac{1.9280}{\sqrt[3]{b}}$

T II Optimalne širine prozora za pseudo Wignerovu distribuciju

Vidimo da je optimalna širina prozora obrnuto proporcionalna trećem korijenu iz trećeg izvoda faze signala, pri čemu konstanta proporcionalnosti zavisi od tipa prozora. U tabeli T II su date optimalne vrijednosti širine prozora za nekoliko klasa prozorskih funkcija.

Analiza koncentracije distribucija iz Cohen-ove klase

Postupak koji smo u prethodnim poglavljima odradili za slučaj spektrograma i Wigner-ove distribucije možemo primijeniti i na Cohen-ovu klasu distribucija. Posmatrajmo distribuciju signala $x(t)$ koja pripada Cohen-ovoj klasi i kod koje je funkcija jezgra označena sa $c(\theta, \tau)$:

$$CD(t, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} c(\theta, \tau) x(u + \frac{\tau}{2}) \bar{x}(u - \frac{\tau}{2}) e^{-j\theta t} e^{-j\omega \tau} e^{j\theta u} du d\theta d\tau \quad (114)$$

Neka je signal $x(t)$ oblika $x(t) = A(t)e^{j\phi(t)}$ gdje je amplituda $A(t)$ sporopromjenjiva u odnosu na fazu $\phi(t)$. Razvojem faze signala u stepeni red u okolini trenutka t do trećeg stepena i uvrštavanjem tog razvoja u (114) dobijamo:

$$\phi(t + \tau) = \phi(t) + \phi'(t)\tau + \frac{1}{2!}\phi''(t)\tau^2 + \frac{1}{3!}\phi'''(t + \tau_1)\tau^3 \quad (115)$$

$$CD(t, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} c(\theta, \tau) |A(t)|^2 e^{j\phi'(u)\tau} e^{j(\phi'''(u+\tau_1) + \phi'''(u+\tau_2))\tau^3/48} e^{-j\theta t} e^{-j\omega \tau} e^{j\theta u} du d\theta d\tau \quad (116)$$

Integral u (116) možemo shvatiti kao Furijeovu transformaciju po promjenljivoj τ proizvoda funkcija, pa ga možemo svesti na konvoluciju po promjenljivoj ω :

$$CD(t, \omega) = 2\pi |A(t)|^2 \delta(\omega - \phi'(t)) *_{\omega} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} c(\theta, \tau) e^{j(\phi'''(u+\tau_1) + \phi'''(u+\tau_2))\tau^3/48} e^{-j\theta t} e^{j\theta u} e^{-j\omega \tau} du d\theta d\tau$$

$$CD(t, \omega) = ITFD(t, \omega) *_{\omega} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} c(\theta, \tau) e^{j(\phi'''(t+\tau_1) + \phi'''(t+\tau_2))\tau^3/48} e^{-j\theta t} e^{j\theta u} e^{-j\omega \tau} du d\theta d\tau \quad (117)$$

Dobili smo izraz ekvivalentan izrazima (80) i (97), na osnovu kojega možemo izdvojiti funkciju $P(t, \omega)$ koja degradira posmatranu distribuciju $CD(t, \omega)$ u odnosu na idealnu TFD.

Alternativni pristup poređenju distribucije $CD(t, \omega)$ sa idealnom distribucijom sastoji se u tome da idealnu TFD posmatranog signala prikažemo u formi ekvivalentnoj izrazu (116). To ćemo uraditi tako što na $ITFD(t, \omega)$ primijenimo inverznu dvodimenzionu Furijeovu transformaciju:

$$IFT_{u, \omega}^{\theta, \tau}[ITFD(u, \omega)] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} 2\pi |A(u)|^2 \delta(\omega - \phi'(u)) e^{j\omega\tau} e^{j\theta u} d\omega du = \int_{-\infty}^{\infty} |A(u)|^2 e^{j\phi'(u)\tau} e^{j\theta u} du$$

i od dobijenog izraza pronađemo dvodimenzionu Furijeovu transformaciju. Dobijamo ponovo idealnu TFD, ali zapisanu u drugačijoj formi:

$$ITFD(t, \omega) = FT_{\theta, \tau}^{t, \omega} [IFT_{u, \omega}^{\theta, \tau} [ITFD(u, \omega)]] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |A(u)|^2 e^{j\phi'(u)\tau} e^{j\theta u} e^{-j\theta t} e^{-j\omega\tau} dud\theta d\tau \quad (118)$$

Poredeći izraze (116) i (118) uz pretpostavku da je $A(t) = const.$ za:

$$c(\theta, \tau) e^{j(\phi'''(u+\tau_1) + \phi'''(u+\tau_2))\tau^3/48} = 1, \text{ odnosno } c(\theta, \tau) = e^{-j(\phi'''(u+\tau_1) + \phi'''(u+\tau_2))\tau^3/48}$$

posmatrana distribucija $CD(t, \omega)$ svodi se na idealnu. Ovaj uslov je u opštem slučaju nemoguće ispuniti jer desna strana uslova zavisi od promjenljive u a lijeva ne. Dakle ova analiza primjenjiva je na slučajeve kada je $\phi'''(u) = b$ gdje je b konstanta, odnosno na signale kod kojih se promjena faze može opisati polinomom trećeg stepena: $\phi(t) = \phi_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}at^2 + \frac{1}{3}bt^3$. U tom slučaju je optimalno jezgro: $c(\theta, \tau) = e^{-jb\tau^3/24}$.

3.2. Mjerenje koncentracije vremensko-frekvencijskih reprezentacija signala

Pojam koncentracije uveden je kroz teoriju vjerovatnoće, gdje je izučavan problem koncentracije raspodjele vjerovatnoća slučajne promjenljive. Po analogiji sa ovim pojmom definisane su i mjere koncentracije vremensko-frekvencijskih reprezentacija [43-47].

Posmatrajmo skup od N nenegativnih brojeva p_1, p_2, \dots, p_N takvih da je $p_1 + p_2 + \dots + p_N = 1$. U teoriji vjerovatnoće brojevi p_i mogu se tumačiti kao raspodjela vjerovatnoća diskretne slučajne promjenljive koja uzima N vrijednosti. Formirajmo funkciju:

$$M(p_1, p_2, \dots, p_N) = p_1^2 + p_2^2 + \dots + p_N^2 \quad (119)$$

Ova funkcija, uz ograničenja:

$$p_i > 0 \text{ i } p_1 + p_2 + \dots + p_N = 1 \quad (120)$$

ima minimum za:

$$p_1 = p_2 = \dots = p_N = 1/N \quad (121)$$

i maksimum ukoliko su sve vrijednosti p_i , osim jedne, jednake nuli. Ta dva ekstremna slučaja tumačimo kao najmanju, odnosno najveću koncentraciju raspodjele vjerovatnoća slučajne promjenljive. Dakle, posmatranu funkciju možemo tumačiti kao mjeru koncentracije raspodjele vjerovatnoća slučajne promjenljive. Njena minimalna vrijednost je $1/N$ a maksimalna 1. Ograničenje $p_1 + p_2 + \dots + p_N = 1$ možemo izbjeći ukoliko sve vrijednosti p_i podijelimo sa $p_1 + p_2 + \dots + p_N$ prije uvrštavanja u (119), odnosno ako funkciju M definišemo kao:

$$M(p_1, p_2, \dots, p_N) = \frac{p_1^2 + p_2^2 + \dots + p_N^2}{(p_1 + p_2 + \dots + p_N)^2} \quad (122)$$

Posmatrajmo sada kontinualnu slučajnu promjenljivu koja uzima vrijednosti iz intervala $(-T, T)$, gdje je $T > 0$, sa gustinom raspodjele vjerovatnoća $p(x)$. Funkcija raspodjele vjerovatnoća zadovoljava uslove:

$$p(x) \geq 0 \quad (123)$$

$$\int_{-T}^T p(x) dx = 1 \quad (124)$$

Formirajmo funkciju:

$$M(p(x)) = \int_{-T}^T p(x)^2 dx \quad (125)$$

Lako se može utvrditi da uz ograničenja (123) i (124) ova funkcija svoju minimalnu vrijednost uzima kada je:

$$p(x) = \frac{1}{2T} \quad (126)$$

a maksimalnu vrijednost za slučaj:

$$p(x) = \delta(x - x_0) \quad (127)$$

gdje je $-T < x_0 < T$. Minimalna vrijednost funkcije M je $1/(2T)$ a maksimalna 1. U prvom slučaju gustina raspodjele vjerovatnoća $p(x)$ ima najgoru koncentraciju, a u drugom najbolju. Dakle za slučaj kontinualne slučajne promjenljive veličinu $M(p(x))$ možemo posmatrati kao mjeru koncentracije gustine raspodjele vjerovatnoća posmatrane slučajne promjenljive. Uslov (124) možemo izostaviti ukoliko funkciju $p(x)$ podijelimo sa vrijednošću njenog integrala u granicama od $-T$ do T , odnosno mjeru možemo definisati kao:

$$M(p(x)) = \frac{\int_{-T}^T p(x)^2 dx}{\left(\int_{-T}^T p(x) dx\right)^2} \quad (128)$$

Kada slučajna promjenjiva uzima vrijednosti iz čitavog skupa realnih brojeva, mjeru koncentracije njene gustine raspodjele vjerovatnoća možemo dobiti stavljajući u prethodnim izrazima $T \rightarrow \infty$.

Ukoliko posmatramo dvodimenzionu slučajnu promjenljivu sa gustom raspodjele vjerovatnoća $p(x, y)$ sličnim razmatranjem možemo zaključiti da se veličina:

$$M = \iint_{Dom} p(x, y)^2 dx dy \quad (129)$$

može koristiti za mjerenje koncentracije gustine raspodjele vjerovatnoća posmatrane slučajne promjenljive. U gornjem izrazu integracija je vršena po domenu funkcije $p(x, y)$.

Analogiju sa vremensko-frekvencijskim reprezentacijama možemo provesti na sledeći način. Posmatrajmo prvo kontinualni slučaj, odnosno neka je data TFR $P(t, \omega)$ i neka ona zadovoljava osobine P1, P4 i P5. Prema P1, $P(t, \omega)$ je realna nenegativna funkcija. Pretpostavimo da radimo sa signalima konačne energije, pa tada imamo (na osnovu P4, odnosno P5) da je:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} P(t, \omega) dt d\omega = E \quad (130)$$

gdje je sa E označena ukupna energija analiziranog signala. Drugim riječima gornji integral ne smije zavisiti od parametara distribucije već samo od analiziranog signala.

Napomenimo da je mali broj distribucija koje u potpunosti ispunjavaju ove zahtjeve. Jedino spektrogram uvijek uzima nenegativne vrijednosti, međutim on ne zadovoljava uslov (130).

Neka je $P(t, \omega)$ Wignerova distribucija. Posmatrajmo njen kvadrat: $P(t, \omega)^2$. Lako je provjeriti da vrijedi:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} P(t, \omega)^2 dt d\omega = E^2 \quad (131)$$

gdje je E energija analiziranog signala, pa kako je kvadrat realnog broja nenegativna veličina, to možemo mjeriti koncentraciju Wignerove distribucije kao:

$$M = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} P(t, \omega)^4 dt d\omega}{\left(\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} P(t, \omega)^2 dt d\omega \right)^2} \quad (132)$$

Iako je ova analogija izvedena samo za slučaj Wignerove distribucije, može se primjenjivati i za druge distribucije, pri čemu distribucija mora biti realna.

Norma reda p dvodimenzione funkcije realnih promjenljivih, integrabilne na R^2 definiše se kao:

$$L_p = \left(\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |P(t, \omega)|^p dt d\omega \right)^{\frac{1}{p}} \quad (133)$$

pa vidimo da se navedena mjera može napisati kao odnos norme 4. reda i norme 2. reda:

$$M = \left(\frac{L_4}{L_2} \right)^2 \quad (134)$$

Pokazuje se da se odnos normi L_p / L_q može koristiti za mjerenje koncentracije TFR ukoliko je $p > q$.

Vratimo se ponovo na osnovni cilj mjerenja koncentracije TFR. Iz zadate klase TFR $P_p(t, \omega)$, pri čemu je svaka TFR okarakterisana parametrom p treba izdvojiti onu TFR koja za dati signal ostvaruje najbolju koncentraciju.

Ukoliko vrijedi $P_p(t, \omega) \geq 0$ i:

$$\int_{-\infty-\infty}^{\infty} \int_{-\infty-\infty}^{\infty} P_p(t, \omega) dt d\omega = C \quad (135)$$

gdje je C konstanta koja ne zavisi od izbora parametra p , tada možemo koncentraciju TFR koje pripadaju naznačenoj klasi mjeriti, po analogiji sa (125) kao:

$$M = \int_{-\infty-\infty}^{\infty} \int_{-\infty-\infty}^{\infty} P_p(t, \omega)^2 dt d\omega = (L_2)^2 \quad (136)$$

Kako je konstanta C u opštem slučaju različita od 1, to je za maksimalno koncentrisanu TFR mjera njene koncentracije jednaka C^2 . Konstatujemo da i kod ove mjere veća vrijednost ukazuje na bolju koncentraciju TFR.

Drugi pristup mjerenju koncentracije TFR dobijen je po analogiji sa odgovarajućim pojmovima iz teorije informacija. Za izvor poruka koji na svom izlazu daje poruke iz konačnog skupa od N poruka, pri čemu je vjerovatnoća pojavljivanja poruke n obilježena sa $p(n)$ definiše se entropija izvora (Shanon-ova entropija) kao:

$$H = -\sum_{i=1}^N p(n) \log_2(p(n)) \quad (137)$$

Poznato je da je entropija maksimalna kada su sve vjerovatnoće $p(n)$ jednake. U tom slučaju ona iznosi $\log_2(N)$. Entropija je minimalna kada su sve vjerovatnoće, osim jedne, jednake 0, odnosno kada izvor uvijek daje istu poruku. Tada entropija uzima vrijednost 0. Ovako definisana entropija je nezgodna za primjenu na TFR jer one u velikom broju slučajeva uzimaju i negativne vrijednosti, pa logaritam u definiciji entropije ne bi bio definisan. Stoga se analogija izvodi na osnovu takozvane Rényi-jeve entropije koja se definiše kao:

$$R_\alpha = \frac{1}{1-\alpha} \log_2 \left(\sum_{i=1}^n p(n)^\alpha \right) \quad (138)$$

pri čemu je α parametar. Granična vrijednost Rényi-jeve entropije kada $\alpha \rightarrow 1$ je Shannon-ova entropija.

Mjera koncentracije TFR analogna Rényi-jevoj entropiji je (za slučaj diskretne TFR čije su vrijednosti označene sa $P(n,k)$):

$$M = \frac{1}{1-\alpha} \log_2 \left(\sum_n \sum_k P(n,k)^\alpha \right) \quad (139)$$

S obzirom da je logaritam monotona funkcija, vidimo da ova mjera zavisi od norme L_α posmatrane TFR, te se svodi na ranije razmatrane slučajeve. Kako je za $\alpha > 1$ koeficijent ispred logaritma negativan, to kod ove mjere veća vrijednost ukazuje na lošiju koncentraciju TFR.

Ukoliko posmatramo TFR u kontinualnom domenu, označimo je sa $P(t,\omega)$ tada će mjera analogna navedenoj biti:

$$M = \frac{1}{1-\alpha} \log_2 \left(\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} P(t,\omega)^\alpha dt d\omega \right) \quad (140)$$

Iz istog razloga kao i kod ranije definisanih mjera može se izvršiti normalizacija izraza pod logaritmom, pri čemu kao konstantu normalizacije možemo uzeti:

$$C_{n2} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} P(t,\omega) dt d\omega \quad (141)$$

U tom slučaju mjeru nazivamo Rényi-jevom mjerom normalizovanom, ili koristiti normalizacionu konstantu:

$$C_{n1} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |P(t,\omega)| dt d\omega \quad (142)$$

kada za mjeru kažemo da je normalizovana u odnosu na volumen distribucije.

Sledeći pristup mjerenju koncentracije TFR baziran je na definiciji trajanja signala, pri čemu se pod trajanjem podrazumijeva dužina vremenskog intervala u okviru kojega je signal različit od nule. Za kontinualni signal $x(t)$ trajanje se može definisati kao:

$$T_x = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)^p dt \quad (143)$$

gdje je p parametar. Kada $p \rightarrow \infty$ imamo da veličina T_x teži trajanju signala. Kako je u većini slučajeva od interesa samo onaj interval gdje se signal bitno razlikuje od 0, a ne kada je tačno jednak nuli, to se iz praktičnih razloga ne uzimaju velike vrijednosti za p . Primijenimo li ovo razmatranje na TFR $P(t, \omega)$ dobijamo mjeru koncentracije:

$$M = \left(\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} P(t, \omega)^p dt d\omega \right)^p \quad (144)$$

S obzirom da je stepena funkcija monotona funkcija, to stepenovanje sa p ne mijenja karakter mjere.

Negativne vrijednosti distribucije se mogu obraditi na nekoliko načina. Prvi način je uzimanje apsolutne vrijednosti distribucije:

$$P(t, \omega) = |TFD(t, \omega)| \quad (145)$$

Ovaj način nudi eliminisanje računskih problema kod navedenih mjera, ali kao veliki problem se pojavljuje koncentracija kros članova kod nekih distribucija. Naime, za dvokomponentni signal kod Wignerove distribucije, amplituda kros-člana je dva puta veća od amplitude auto-člana, što će prouzrokovati težnju mjere ka koncentraciji neželjenih kros-članova. Drugi način je uzimanje nenegativnog dijela distribucije:

$$P(t, \omega) = \frac{1}{2} (|TFD(t, \omega)| + TFD(t, \omega)) \quad (146)$$

I u ovom slučaju se uticaj kros članova ne eliminiše, ali se barem redukuje u slučajevima distribucija kod kojih kros član uzima naizmjenično pozitivne i negativne vrijednosti. Kod Choi-Williams-ove distribucije, kros član nije oscilatornog tipa, pa primjena oba metoda daje gotovo iste rezultate.

Drugi problem u mjerenju koncentracije vremensko-frekvencijskih distribucija je u definisanju optimalne koncentracije u slučajevima multikomponentnih signala. Naime, može se desiti da se signal sastoji od dvije komponente, od kojih je jedna jako koncentrisana, a druga slabo koncentrisana. Primjenom navedenih mjera u nekim slučajevima može doći do potpunog potiskivanja slabo koncentrisane komponente i njenog nestajanja iz vremensko-frekvencijske reprezentacije. Primjer ovakvog slučaja je spektrogram signala navedenog tipa. Upotreba uskog prozora daje lošu koncentraciju obje komponente, dok široki prozor potiskuje slabo koncentrisanu komponentu a favorizuje jako koncentrisanu. Tako se u opisanom slučaju većina navedenih mjera ne može koristiti za određivanje optimalne širine prozora.

3.3. Energetska mjera koncentracije vremensko-frekvencijskih reprezentacija

Pretpostavimo da posmatrana distribucija $P(t, \omega)$ zadovoljava marginalne uslove, to jest:

$$\int_{-\infty}^{\infty} P(t, \omega) dt = |X(\omega)|^2 \quad \text{i} \quad \int_{-\infty}^{\infty} P(t, \omega) d\omega = |x(t)|^2 \quad (147)$$

odnosno u diskretnom obliku:

$$\sum_n P(n, k) = |X_k|^2 \quad \text{i} \quad \sum_k P(n, k) = |x_n|^2 \quad (148)$$

pri čemu je u navedenim izrazima $x(t)$ posmatrani analogni signal, $X(\omega)$ njegova Furijeova transformacija, x_n odgovarajući diskretni signal, X_n njegova diskretna Furijeova transformacija, dok su $P(t, \omega)$ i $P(n, k)$ vremensko-frekvencijske reprezentacije signala $x(t)$ u kontinualnom, odnosno diskretnom domenu.

Posledica navedenih osobina je:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} P(t, \omega) dt d\omega = E_x \quad (149)$$

$$\sum_n \sum_k P(n, k) = E_x \quad (150)$$

gdje je E_x energija signala.

Posmatrajmo vremensko-frekvencijsku reprezentaciju signala u diskretnom domenu. Osnovna ideja je da odredimo minimalni broj odbiraka reprezentacije čija suma daje “gotovo svu” energiju signala. Prvo uzimamo najveće odbirke, a zatim dodajemo manje sve dok navedeni uslov ne bude ispunjen. Da bismo realizovali navedeni postupak, jedan od metoda je da sve odbirke vremensko-frekvencijske distribucije sortiramo po veličini, nađemo njihovu sumu (a to je ukupna energija signala) i zatim ih sumiramo, počevši od najvećih, dok ne dobijemo vrijednost KE_x gdje je $0 < K < 1$ faktor energije blizak jedinici. Tada možemo tvrditi da je gotovo sva energija signala lokalizovana u tih M odbiraka i broj M možemo proglašiti mjerom koncentracije. Manja vrijednost broja M ukazuje na bolju koncentraciju distribucije. Ovakvu mjeru možemo nazvati energetsom mjerom koncentracije, jer se u osnovi njene definicije nalazi ukupna energija signala.

Opisanu mjeru možemo analitički predstaviti na sledeći način:

Traži se oblast S , minimalne površine M , tako da bude ispunjen uslov:

$$K \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} P_x(t, \omega) dt d\omega \leq \iint_S P_x(t, \omega) dt d\omega \quad (151)$$

pri čemu je:

$$M = \iint_S dt d\omega \quad (152)$$

površina oblasti S , odnosno energetska mjera koncentracije vremensko-frekvencijske reprezentacije u skladu sa njenom definicijom.

U diskretnom domenu mjeru analitički možemo izraziti kao:

$$M = \text{card}(S) \quad (153)$$

pri čemu je S skup uređenih parova (n, k) sa najmanjom mjerom M koji zadovoljava uslov:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} |P_x(n, k)| \leq K \sum_{(n, k) \in S} |P_x(n, k)| \quad (154)$$

3.4. Poređenje analitičkog i numeričkog pristupa mjerenju koncentracije vremensko-frekvencijskih reprezentacija signala

U poglavlju 3.1 naveden je analitički pristup mjerenju koncentracije nekih TFD u specijalnim slučajevima signala, dok je u poglavljima 3.2 i 3.3 definisan numerički pristup istom problemu, nezavisan od vrste signala. Ovdje ćemo izvršiti uporednu analizu ova dva pristupa.

Posmatran je spektrogram linearno frekvencijski modulisanog signala:

$$x(t) = e^{j a t^2 / 2} \quad (155)$$

pri čemu je signal posmatran na intervalu $t \in [-1, 1)$ sa korakom odabiranja $T_{od} = 1/256$. Uzete su tri karakteristične vrijednosti nagiba $a = 8\pi$, $a = 128\pi$ i $a = 256\pi$. Prva vrijednost je signal sa gotovo konstantnom trenutnom frekvencijom u posmatranom vremenskom intervalu (vrijednost $a = 0$ ne može se analizirati jer je tada optimalan beskonačno širok prozor) dok je treća vrijednost signal sa velikim nagibom, odnosno njegov spektrogram je dijagonala posmatranog odsječka vremensko-frekvencijske ravni. Za svaki nagib signal je analiziran sa četiri različita prozora: Hanningov, Hammingov, Gaussov i Papoulisov, čiji je vremenski oblik definisan u tabeli T I.

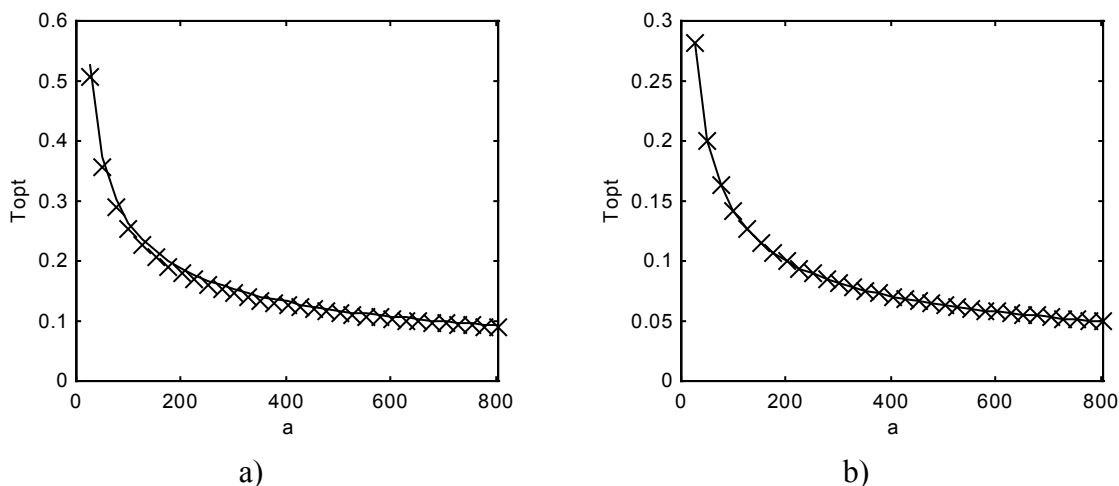
Na slici 9 je data zavisnost optimalne širine prozora od nagiba a za slučaj Hammingovog prozora a) i Gausovog prozora b). U prvom slučaju za numeričko određivanje koncentracije korišćen je odnos norme 4 i norme 2, a u drugom slučaju korišćena je energetska mjera.

Na osnovu formula iz navedene tabele sračunate su optimalne vrijednosti širine prozora T_{opt} , za svaki posmatrani slučaj. Nakon toga tražena je širina prozora T_n optimalna prema: Normi 2 – kolona I, Odnosu normi 4 i norme 2 – kolona II, Rényi-jevoj informaciji – kolona III i Energetskoj mjeri – kolona IV. Za svaki posmatrani slučaj je sračunato relativno odstupanje (u procentima) od analitički dobijene vrijednosti. Iz tabele vidimo da se za sa Gausovim prozorom upotrebom bilo koje mjere dobija teoretski predviđena vrijednost optimalne širine prozora. U ostalim slučajevima javljaju se manja odstupanja. Razlog pojavljivanja odstupanja je upotreba diskretnih verzija prozora u numeričkoj realizaciji, dok je za dobijanje optimalne širine prozora analitičkim putem korišćen analitički oblik funkcije prozora. Od svih korišćenih prozora jedino je Gausov prozor dvaput diferencijabilan u svakoj

tački, tako da je integral u formuli (86) dobro definisan. Treba napomenuti da se parametri T_n za različite prozore ne trebaju porediti, jer T_n nije stvarna širina prozora po vremenskoj osi, već parametar koji je proporcionalan širini prozora.

Nagib	Prozor		I	II	III	IV
a=8 π	Hanning	T_n	0.5102	0.5270	0.5143	0.4832
	$T_{opt}=0.5051$	odstupanje (%)	1.00	4.33	1.83	-4.34
	Hamming	T_n	0.4645	0.4644	0.4678	0.4689
	$T_{opt}=0.4593$	odstupanje (%)	1.12	1.12	1.86	2.08
	Gauss	T_n	0.2821	0.2821	0.2821	0.2821
	$T_{opt}=0.2821$	odstupanje (%)	0.00	0.00	0.00	0.00
a=128 π	Papoulis	T_n	0.4184	0.4491	0.4258	0.3494
	$T_{opt}=0.4158$	odstupanje (%)	0.62	8.01	2.41	-15.97
	Hanning	T_n	0.1275	0.1317	0.1286	0.1208
	$T_{opt}=0.1263$	odstupanje (%)	0.99	4.32	1.84	-4.37
	Hamming	T_n	0.1166	0.1171	0.1167	0.1172
	$T_{opt}=0.1148$	odstupanje (%)	1.55	1.96	1.64	2.11
a=256 π	Gauss	T_n	0.0705	0.0705	0.0705	0.0705
	$T_{opt}=0.0705$	odstupanje (%)	0.00	0.00	0.00	0.00
	Papoulis	T_n	0.1048	0.1132	0.1060	0.0875
	$T_{opt}=0.1039$	odstupanje (%)	0.79	8.89	1.94	-15.84
	Hanning	T_n	0.0902	0.0932	0.0909	0.0854
	$T_{opt}=0.0893$	odstupanje (%)	1.02	4.36	1.81	-4.36
a=256 π	Hamming	T_n	0.0819	0.0858	0.0817	0.0829
	$T_{opt}=0.0812$	odstupanje (%)	0.81	5.73	0.60	2.05
	Gauss	T_n	0.0499	0.0499	0.0499	0.0499
	$T_{opt}=0.0499$	odstupanje (%)	0.00	0.00	0.00	0.00
	Papoulis	T_n	0.0742	0.0781	0.0748	0.0610
	$T_{opt}=0.0735$	odstupanje (%)	0.90	6.31	1.80	-17.04

T III Poređenje analitičkog i numeričkog pristupa mjerenju koncentracije. U kolonama I-IV date su optimalne vrijednosti širine prozora dobijene korišćenjem: Norme 2, odnosa norme 4 i norme 2, Rényi-jeve informacije i energetske mjere, respektivno.



Sl. 9. Poređenje analitički i numerički dobijenih vrijednosti za optimalnu širinu prozora spektrograma: a) Hanningov prozor, korišćen je odnos norme 4 i norme 2, b) Gausov prozor, korišćena je energetska mjera. Puna linija predstavlja analitički dobijene rezultate a krstićima su označene vrijednosti dobijene primjenom mjera koncentracije.

U nastavku će biti analizirana pseudo Wignerova distribucija signala:

$$x(t) = Ae^{j96\pi t + jb\frac{t^3}{6}} \quad (156)$$

posmatranog na intervalu $t \in [-1,1)$ sa korakom odabiranja $T_{od} = 1/256$. Parametar b jednak je trećem izvodu faze signala.

U poglavlju 3.1 izvršena je analiza koncentracije pseudo Wignerove distribucije za signale oblika (156) i u tabeli T II su dati izrazi za optimalnu širinu korišćenog prozora. Razmatrana su četiri tipa funkcije prozora i tri karakteristične vrijednosti parametra b , $b=128\pi$, $b=256\pi$ i $b=384\pi$. Od numeričkih metoda mjerenja koncentracije korišćena je energetska mjera i odnos norme 4 i norme 2. Mjerena je koncentracija kvadrata distribucije, u skladu sa načinom izvođenja analitičkih izraza u 3.1. Ostale mjere koncentracije nijesu se pokazale pogodnim za ovaj slučaj, odnosno Rényi-jeva informacija i norma 2 su maksimalno širok prozor proglašavale optimalnim.

U odnosu na prethodno navedene rezultate, za slučaj spektrograma, primjećujemo veće odstupanje, koje je u slučaju energetske mjere u granicama od -10.5% do -4.5% a u slučaju odnosa norme 4 i norme 2 od 14.1% do 20.5% . Osnovni razlog odstupanja je to što definicija koncentracije dobijene primjenom numeričkih metoda mjerenja i analitička definicija koncentracije nijesu ekvivalentne, posebno u slučaju oscilatornih funkcija, kakva je funkcija

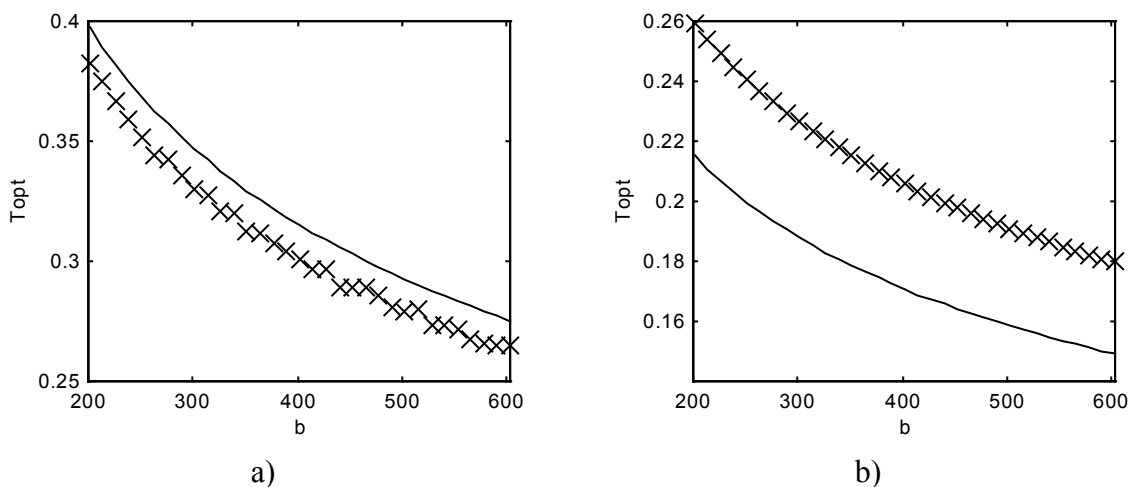
auto-člana posmatranog signala. Napomenimo da je procentualno odstupanje od analitički dobijenih vrijednosti za slučaj svih posmatranih funkcija prozora približno konstantno, što potvrđuje da je zavisnost optimalne širine prozora od parametra b istog oblika u slučaju analitičkog i numeričkog pristupa mjerenju koncentracije. Na slici 10 prikazana je navedena zavisnost za dva slučaja: energetska mjeru i odnos norme 4 i norme 2. U oba slučaja su pored numerički dobijenih optimuma, prikazani i analitički dobijeni optimumi (puna linija na slici).

Funkcija prozora	b	T_{opt}	T_{EN}	Gr_{EN} (%)	T_{42}	Gr_{42} (%)
Hanning	128π	0.3152	0.3010	-4.5	0.3616	14.7
	256π	0.2502	0.2384	-4.7	0.2870	14.7
	384π	0.2186	0.2074	-5.1	0.2507	14.7
Hamming	128π	0.2840	0.2658	-6.4	0.3240	14.1
	256π	0.2254	0.2110	-6.4	0.2576	14.3
	384π	0.1969	0.1837	-6.7	0.2264	15.0
Gauss	128π	0.1707	0.1603	-6.1	0.2057	20.5
	256π	0.1355	0.1272	-6.1	0.1633	20.5
	384π	0.1184	0.1116	-5.7	0.1426	20.5
Papoulis	128π	0.2612	0.2364	-9.5	0.3007	15.1
	256π	0.2073	0.1856	-10.5	0.2382	14.9
	384π	0.1811	0.1621	-10.5	0.2072	14.4

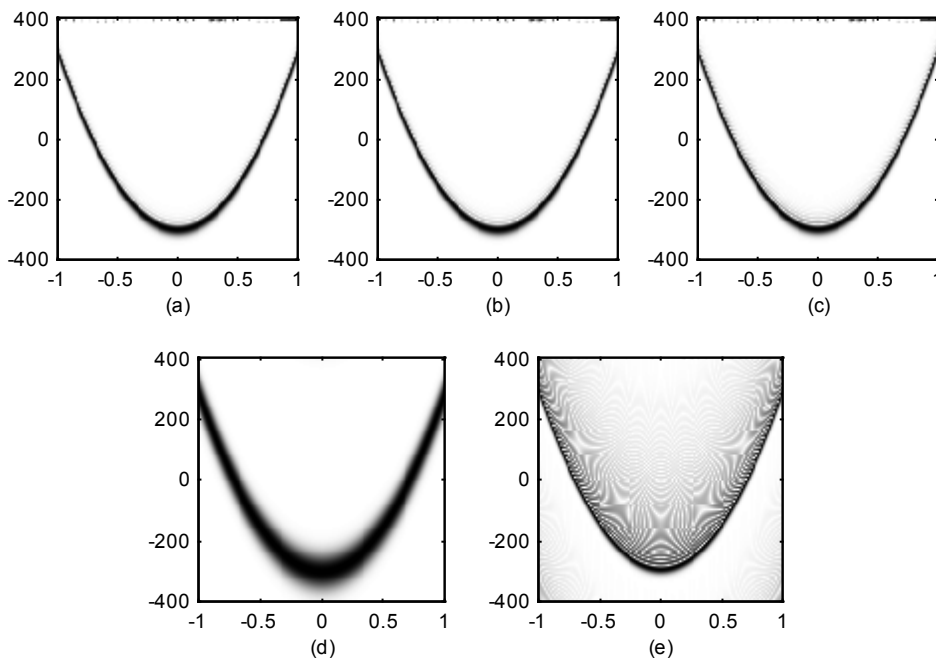
T IV. Poređenje analitičkog i numeričkog pristupa mjerenju koncentracije za slučaj pseudo Wignerove distribucije za različite funkcije prozora i različite vrijednosti trećeg izvoda faze signala b . Date su analitički dobijene optimalne vrijednosti prema 3.1, numerički dobijeni optimumi prema energetska mjeru i prema odnosu norme 4 i norme 2, kao i procentualno odstupanje od analitički dobijenih vrijednosti za oba slučaja.

Na slici 11 data je pseudo Wignerova distribucija signala definisanog sa (156) uz $b=384\pi$, pri čemu je korišćen Gaussov prozor (analitički izraz funkcije prozora, kao i njegove optimalne širine dat je u tabeli T II). Slučajevi a), b) i c) se gotovo ne razlikuju, u slučaju pod c) je primjetno veoma malo povećanje nivoa kros članova, tako da možemo tvrditi da sva tri navedena metoda, iako daju različite vrijednosti za optimalnu širinu prozora ispunjavaju uslov da se pomoću njih pronalazi dobro koncentrisana distribucija. Slučajevi pod d) i e)

predstavljaju izgled pseudo Wignerove distribucije u slučaju korišćenja neoptimalne širine prozora.



Sl. 10. Zavisnost optimalne širine prozora od trećeg izvoda faze signala. Punom linijom su prikazane analitički dobijene zavisnosti a krstićima su označene numerički dobijene optimalne vrijednosti. a) Hanningov prozor i energetska mjera, b) Gaussov prozor i odnos norme 4 i norme 2.



Sl. 11. Izgled pseudo Wignerove distribucije signala (156) za $b=384\pi$. Korišćen je Gaussov prozor: a) optimalna širina prozora prema energetskeoj mjeri, b) analitički dobijena optimalna širina, c) optimalna širina prozora prema odnosu norme 4 i norme 2, d) uski prozor (4 puta uži nego pod b)), e) široki prozor (4 puta širi u odnosu na slučaj pod b))

3.5. Lokalne mjere koncentracije

Jedan od načina prevazilaženja problema mjerenja koncentracije kod multikomponentnih signala je svođenje mjerenja koncentracije na lokalni nivo. Odnosno, umjesto da za zadata TFR signala određujemo mjeru koja će iskazati koncentraciju TFR u čitavom posmatranom dijelu TF ravni, možemo se ograničiti na jedan manji dio i nekom od poznatih metoda odrediti koncentraciju TFR na tom dijelu. Na taj način umjesto jedne veličine M dobijamo funkciju $M(t, \omega)$ koja nam govori o koncentraciji TFR u svakom dijelu TF ravni. Koristeći se ovim metodom možemo odabrati TFR koja najbolje odgovara svakom pojedinačnom regionu TF ravni. Ovaj slučaj djelimično rješava problem signala koji se sastoji od komponenti različite koncentracije. Na primjer, za slučaj spektrograma možemo u jednom dijelu TF ravni gdje široki prozor daje kvalitetnu koncentraciju koristiti taj prozor, a u nekom drugom dijelu TF ravni koristiti užu prozor, ukoliko on daje bolju koncentraciju TFR. Osnovni problem je način podjele TF ravni. Rješenje navedeno u [47] predlaže da se iz TF ravni, korišćenjem dvodimenzione funkcije prozora, isječe jedan njen dio i odredi se koncentracija TFR u tom dijelu. Kao prozorska funkcija je korišćen dvodimenzioni Gausov prozor. Na taj način dobijena je funkcija:

$$M(t, \omega) = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} W^2(\tau - t, \theta - \omega) |P(t, \omega)|^4 d\tau d\theta}{\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} W(\tau - t, \theta - \omega) |P(t, \omega)|^2 d\tau d\theta} \quad (157)$$

gdje je $W(\tau, \theta) = \exp(-K_t \tau^2 - K_\omega \theta^2)$ dvodimenziona funkcija prozora. Parametri K_t i K_ω određuju širinu prozora po vremenskoj odnosno po frekvencijskoj osi.

Ovaj pristup predstavlja korak naprijed u smislu pronalaženja vremensko -frekvencijske reprezentacije signala sa optimalnom koncentracijom, ali treba napomenuti da je numerički veoma zahtjevan jer se procedura računanja mjere ponavlja za svaku tačku TF ravni. Jedan od načina za prevazilaženje ovog problema je postavljanje prilično rijetke mreže tačaka u TF ravni u kojima se računa koncentracija (gustina mreže treba biti u funkciji širine prozora W).

Za slučaj signala kod kojih u svakom trenutku signal uzima samo jednu frekvenciju (monokomponentni signali i multikomponentni signali kod kojih se komponente ne preklapaju po vremenskoj osi), logično je koncentraciju određivati za svaki vremenski

trenutak t . Na taj način se određivanje koncentracije dvodimenzione funkcije svodi na određivanje koncentracije jednodimenzione funkcije. Dobijamo optimalne parametre TFR za svaki posmatrani trenutak.

3.6. Analiza algoritama za računanje mjere koncentracije vremensko-frekvencijskih reprezentacija

U ovom dijelu rada navedene mjere biće analizirane sa stanovišta numeričke kompleksnosti, a takođe će biti data nekoliko algoritma za računanje novouvedene, energetske mjere. Numerički proračun koncentracije u gotovo svim slučajevima radi se uz pomoć računara, te je sa tog aspekta od interesa posmatrati jedino diskretne TFR, odnosno TFR koje su diskretizovane i po vremenu i po frekvenciji. One se u računaru predstavljaju u obliku matrice konačnih dimenzija.

Numerička kompleksnost određivanja mjere koncentracije

Neka je TFR predstavljena matricom \mathbf{A} tipa $n \times m$. Tada je broj potrebnih računarskih operacija u pokretnom zarezu za računanje mjera koncentracije:

$2nm$ za slučaj kvadrirane norme 2,

$2nm + 1$ za slučaj Rényi-jeve informacije,

$3nm + 2$ za slučaj normalizovane Rényi-jeve informacije i

$4nm + 1$ u slučaju normalizovane norme 4.

Vidimo da je u svakom od navedenih slučajeva numerička kompleksnost računanja mjera koncentracije TFR $O(nm)$.

Energetska mjera koncentracije u zavisnosti od primijenjenog algoritma ima različitu numeričku kompleksnost. Ona će biti analizirana u narednom poglavlju.

Sam podatak o broju operacija u pokretnom zarezu nije potpuno relevantan parametar za određivanje brzine i efikasnosti računanja. Danas računari imaju kompleksne aritmetičko-logičke jedinice i specijalizovane numeričke procesore prilagođene obradi numeričkih podataka. Tako, u terminologiji programskog paketa MATLAB koji je najčešće korišćeni

paket za numeričke proračune, numerička kompleksnost navedenih mjera se svodi na stepenovanje polja brojeva (jedna ili dvije operacije) i traženje sume polja brojeva (takođe jednom ili dvaput). Ove operacije se izvode velikom brzinom, tako da je vrijeme potrebno za računanje mjere koncentracije TFR kratko. U tabeli T V su poređenja radi data vremena proračuna za svaku navedenu mjeru. Da bi se izbjegla zavisnost od brzine rada konkretnog računara, podaci su normalizovani u odnosu na vrijeme potrebno za računanje spektrograma. Korišćena je TFR predstavljena matricom 64×64 , 128×128 i 256×256 za tri slučaja: bijeli Gausov šum, linearno frekvencijski modulisan signal i sinusoidalno frekvencijski modulisan signal. Iz tabele se vidi odstupanje od očekivane računске kompleksnosti za slučaj kvadrirane norme 2. To je posledica jednostavnosti izraza koji je određuje i prilagođenosti računarskog hardvera računanju drugog stepena broja. Vidimo da je vrijeme potrebno za određivanje mjere koncentracije približno jednako vremenu potrebnom za određivanje same TFR (za najjednostavniji slučaj – spektrogram), osim u slučaju kvadrirane norme 2 i Energetske mjere (algoritam A1). U tabeli su dati podaci dobijeni u slučaju energetske mjere, računane na dva načina koji će biti opisani u nastavku rada (algoritam A1 i algoritam A2).

Mjera	Vrijeme 64×64	Vrijeme 128×128	Vrijeme 256×256
Kvadrirana norma 2	0.0673	0.0737	0.0729
Normalizovana norma 4	1.0842	1.2472	1.2847
Rényi-jeva informacija	0.8429	0.9583	0.9861
Normalizovana Rényi-jeva informacija	0.8653	0.9941	1.0194
Energetska mjera (A1)	2.3793	3.1063	3.9416
Energetska mjera (A2)	1.3187	1.2838	1.2499

T V: Vrijeme potrebno za računanje mjere koncentracije TFR raznim metodama normalizovano sa vremenom potrebnim za računanje spektrograma.

Algoritam za računanje energetske mjere koncentracije

U diskretnom domenu, koji je jedini od interesa za praktičnu primjenu, TFR se predstavlja matricom A konačnih dimenzija $n \times m$, pa se problem pronalaženja energetske mjere koncentracije TFR svodi na sledeće:

1. Pronaći ukupnu energiju E_x posmatranog signala, t.j. sumu svih elemenata matrice \mathbf{A} ,
2. Pronaći minimalan podskup I_M skupa indeksa: $I = \{1, 2, \dots, n\} \times \{1, 2, \dots, m\}$ takav da je

$$\sum_{(i,j) \in I_M} A_{i,j} > K \cdot E_x, \text{ gdje je } K \text{ parametar mjere } (0 < K < 1).$$

Korak 1 predstavlja jednostavnu operaciju, dok realizacija koraka 2 zahtijeva dublju analizu problema. U nastavku će biti navedena dva načina za realizaciju koraka 2.

I način (algoritam A1)

Elemente matrice \mathbf{A} sortiramo u nerastući poredak, dobijamo niz a od $n \cdot m$ elemenata.

Nakon toga određuju se parcijalne sume: $S_k = \sum_{i=1}^k a_i$ za $k = 1, 2, \dots$ sve do onog momenta kada se pojavi S_{k_M} takvo da je $S_{k_M-1} < K \cdot E_x \leq S_{k_M}$. Broj elemenata k_M predstavlja mjeru koncentracije TFR. Logično je da se ovaj broj normalizuje sa ukupnim brojem elemenata matrice \mathbf{A} , odnosno energetska mjera koncentracije TFR predstavljene matricom \mathbf{A} je: $M_E = k_M / nm$.

Numerička kompleksnost opisanog algoritma je:

Za određivanje ukupne energije (korak 1) potrebno je nm operacija sabiranja.

Za sortiranje niza od nm elemenata potrebno je $O(mn \cdot \ln nm)$ operacija poređenja.

Za pronalaženje indeksa k_M potrebno je od 1 do nm operacija sabiranja.

Ukupna numerička kompleksnost analiziranog algoritma je dakle:

$$O(nm) + O(nm \cdot \ln nm) + O(nm) = O(nm \cdot \ln(nm)) \quad (158)$$

Vidimo da je kompleksnost neznatno povećana u odnosu na ostale mjere koncentracije (za faktor $\ln nm$). Sa druge strane realizacija ove mjere ne zahtijeva operacije stepenovanja, ali se koristi sortiranje odnosno operacije poređenja i zamjene elemenata, što utiče na povećanje vremena potrebnog za računanje mjere koncentracije TFR na ovaj način.

Dokaz valjanosti algoritma A1:

Pretpostavimo da je određen indeks k_M , odnosno da je poznat podskup niza a takav da je suma tih elemenata veća od $K \cdot E_x$. Dokažimo da tako određen podskup ima minimalnu kardinalnost. Pretpostavimo suprotno, da postoji podskup niza a koji je manji od navedenog sa istom osobinom. On ne može sadržati samo one elemente čiji je indeks manji od k_M , što se vidi iz procedure određivanja indeksa k_M , dakle barem umjesto jednog elementa $a_i, i = 1, 2, \dots, k_M$ mora biti upotrijebljen element $a_{k_{M+}}, k_{M+} > k_M$, koji nije veći ni od jednog elementa $a_i, i = 1, 2, \dots, k_M$. Na osnovu ovoga suma elemenata posmatranog podskupa ne može biti veća od sume elemenata podskupa određenog algoritmom A1, tako da izbacivanje bilo kojeg elementa iz posmatranog podskupa (smanjenje njegove kardinalnosti) narušava uslov da je suma njegovih elemenata veća od $K \cdot E_x$. Ovim je dokazano da se kardinalnost podskupa određenog algoritmom A1 ne može dalje smanjivati.

II način (algoritam A2)

Osnovna mana algoritma A1 je potreba za sortiranjem svih vrijednosti TFR. Ukoliko obratimo pažnju na to šta nam to sortiranje donosi, zaključujemo da redosled elemenata čiji je indeks manji ili jednak k_M nije bitan za funkcionisanje algoritma, a takođe nije bitan ni redosled elemenata čiji je indeks veći od k_M . Bitno je da svi elementi sa indeksom manjim ili jednakim k_M ne budu manji od elemenata sa indeksom većim od k_M . Znači umjesto sortiranja, dovoljno bi bilo podijeliti niz a na dva podskupa sa navedenom osobinom. Ovaj postupak biće opisan algoritmom A2:

Korak 1: Eliminisanje elemenata sa velikom vrijednosti. Usvojimo neki nivo L_0 i pronađimo sumu S_0 svih elemenata niza a koji su veći ili jednaki od L_0 . Takođe upamtimo i broj tih elemenata k_{M_0} . Mogu se pojaviti dva slučaja: pronađena suma je u prvom slučaju manja, a u drugom veća ili jednaka $K \cdot E_x$. U prvom slučaju nivo L_0 treba smanjiti a u drugom povećati.

Korak 2: Eliminisanje elemenata sa malom vrijednosti. Uzme se nivo $L_1, L_1 < L_0$ i pronađe se suma S_1 svih elemenata niza a koji su manji od L_1 . Ponovo se razmatraju dva slučaja: $S_1 < (1-K)E_x$ i $S_1 \geq (1-K)E_x$. U prvom slučaju nivo L_1 treba povećati a u drugom smanjiti.

Korak 3: Iz niza a izbacimo sve elemente koji su učestvovali u sumiranju. Dobijamo manji niz, čija veličina zavisi od bliskosti nivoa L_0 i L_1 . Svi elementi izbačeni u koraku 1 su u sortiranom nizu na mjestima sa indeksom manjim od k_M a elementi izbačeni u koraku 2 imaju indekse veće od k_M . Preostale elemente treba sortirati, i ponoviti postupak određivanja indeksa k_M kao u algoritmu A1, s tim što je uslov sada: $S_0 + \sum_{i=1}^{k_M-1} a_i < K \cdot E_x \leq S_0 + \sum_{i=1}^{k_M} a_i$. Na kraju veličini k_M treba dodati broj elemenata čija je suma uvrštena u S_0 tj k_{M_0} , i dobijamo mjeru koncentracije TFR.

Ovaj algoritam u velikoj mjeri zavisi od izbora nivoa L_0 i L_1 . Njih možemo ograničiti na sledeći način: $\min a \leq L_1 < L_0 \leq \max a$ i kroz nekoliko iteracije obezbijediti značajno smanjivanje broja elemenata niza a . Algoritam je takođe zavisao od vrijednosti TFR. Najgori slučaj je kada su svi elementi TFR jednaki. Tada ovaj algoritam ne donosi nikakvo poboljšanje u odnosu na algoritam A1 (gori je od njega jer se bespotrebno pokušavaju naći nivoi L_0 i L_1). Međutim, ovaj slučaj se u praksi nikada ne pojavljuje.

Dokaz valjanosti algoritma A2:

Algoritam A2 se svodi na algoritam A1. U dokazu algoritma A1 nigdje nije korišćena činjenica da su elementi niza sortirani, već samo podatak da su svi elementi niza sa indeksima manjim ili jednakim k_M veći ili jednaki od elemenata sa indeksom većim od k_M . To je i ovdje slučaj, s tim što je k_{M_0} elemenata iz prvog skupa prethodno izdvojeno, a u nizu a je ostavljeno dovoljno elemenata da bi se indeks k_M mogao tačno odrediti.

Numeričku kompleksnost ovog algoritma teško je odrediti. Potreban broj operacija uveliko zavisi od elemenata TFR kao i od izbora nivoa. Iz tabele III se vidi da je metod u konkretnim slučajevima numerički efikasan gotovo kao i ostale mjere.

3.7. Metod za ubrzavanje pronalaženja optimalno koncentrisane distribucije

Pretpostavimo da iz jednoparametarske familije vremensko-frekvencijskih reprezentacija signala $P_\alpha(t, \omega)$, gdje je α parametar po kojem vršimo optimizaciju, trebamo odabrati optimalno koncentrisanu reprezentaciju. Koncentraciju reprezentacije određujemo

primjenom mjere $M(P_\alpha(t, \omega))$. Ukoliko se posmatra diskretan skup vrijednosti parametra, tada je jedan od metoda pronalaženje svih reprezentacija i odabiranje one koja daje najbolju koncentraciju u smislu korišćene mjere. S obzirom da je ovaj postupak veoma nepraktičan sa stanovišta vremena potrebnog za određivanje velikog broja reprezentacija, možemo na postupak pronalaženja optimalno koncentrisane reprezentacije primijeniti neku optimizacionu proceduru, recimo metod najbržeg pada, za slučaj mjere koja svojim minimumom određuje optimalnu koncentraciju. Pomenuti metod je iterativan i svodi se na određivanje mjere koncentracije za neki odabrani parametar α_1 , i gradijenta $\partial M(P_\alpha(t, \omega)) / \partial \alpha$ za $\alpha = \alpha_1$. Nakon toga se određuje nova vrijednost parametra:

$$\alpha_{i+1} = \alpha_i - \mu \left. \frac{\partial M(P_\alpha(t, \omega))}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=\alpha_i} \quad (159)$$

i iterativni postupak se ponavlja. Postupak možemo zaustaviti kada se dvije uzastopne iteracije dovoljno približe odnosno kada bude $|\alpha_{i+1} - \alpha_i| < \Delta$. Veličina μ predstavlja korak, odnosno pretpostavljenu vezu između promjene koncentracije i promjene parametra distribucije α .

U specifičnim slučajevima distribucija i korišćenih mjera gradijent mjere je moguće analitički odrediti, ali postoje i slučajevi kada to nije moguće. Tada gradijent možemo aproksimirati sa:

$$\left. \frac{\partial M(P_\alpha(t, \omega))}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=\alpha_i} \approx \frac{M(P_{\alpha_i}(t, \omega)) - M(P_{\alpha_{i-1}}(t, \omega))}{\alpha_i - \alpha_{i-1}} \quad (160)$$

za $i = 2, 3, \dots$ pri čemu na početku postupka biramo dvije vrijednosti α_1 i α_2 da bismo mogli započeti iterativni postupak.

4. Primjena mjera koncentracije

U okviru ovog poglavlja navedeni su primjeri primjene mjera koncentracija vremensko-frekvencijskih distribucija na konkretnim signalima. Svi primjeri su analizirani korišćenjem računara i programskog paketa MATLAB.

4.1. Odabiranje najkvalitetnije vremensko-frekvencijske reprezentacije iz zadatog skupa reprezentacija

Posmatrajmo jednoparametarsku familiju vremensko-frekvencijskih distribucija. Postavlja se pitanje za koju vrijednost parametra dobijamo optimalnu koncentraciju komponenti signala u vremensko-frekvencijskoj ravni. Mjerenje koncentracije distribucija daje numerički kriterijum na osnovu kojeg možemo odrediti optimalni slučaj. Razumljivo je da optimalna vrijednost parametra može zavisiti od primijenjene mjere, a svakako će uveliko zavisiti od karakteristika signala.

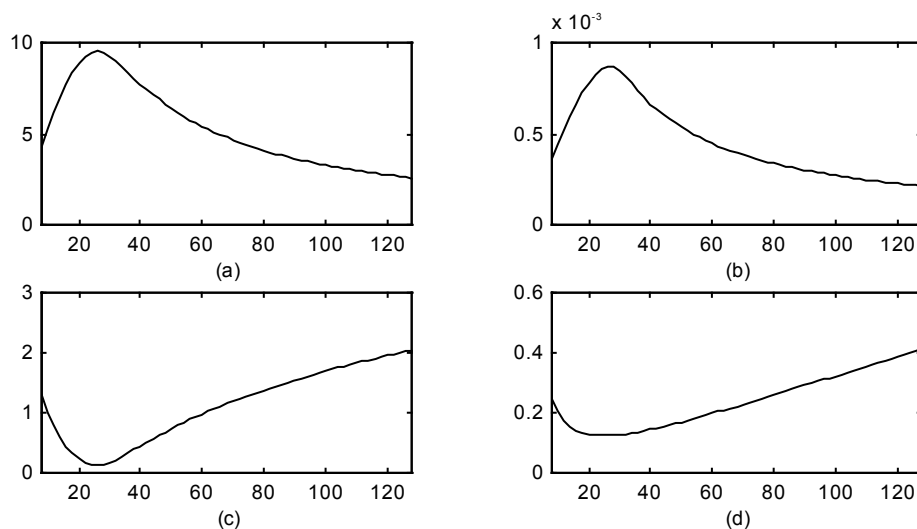
U primjerima koji će biti navedeni, korišćene su dvije vremensko-frekvencijske distribucije: spektrogram, kao najjednostavniji slučaj i S-metod, kao distribucija koja u najvećem broju slučajeva daje zadovoljavajuće rezultate. Kod spektrograma je posmatrana širina prozora $w(t)$ kao optimizacioni parametar, dok je kod S-metoda optimizacioni parametar širina prozora $P(\theta)$. Odabrana su nekoliko karakteristična slučaja signala na osnovu kojih se mogu ilustrovati navedene osobine metoda za mjerenje koncentracije vremensko-frekvencijskih distribucija.

Primjer 1. Korišćen je signal sa linearnom promjenom trenutne frekvencije:

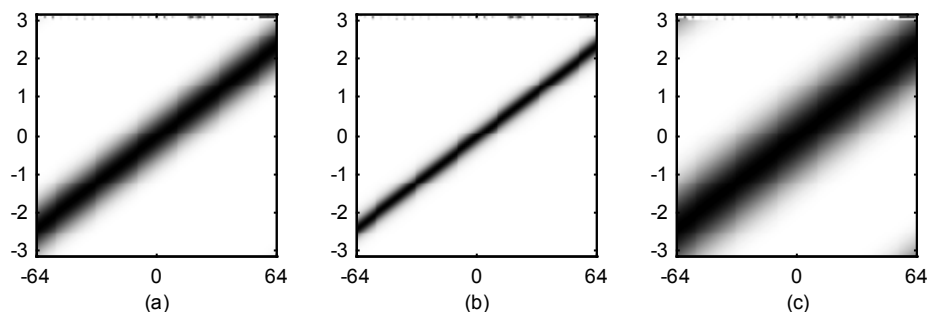
$$x(t) = \exp(j \frac{3\pi}{256} \frac{t^2}{2}) \quad (161)$$

Signal je posmatran na intervalu $-64 \leq t < 64$, odabiran sa korakom odabiranja $T = 1$. Uzet je Hanningov prozor, pri čemu su posmatrane širine prozora od 8 do 128 sa korakom 2. Na slici 12 prikazana je zavisnost koncentracije spektrograma od širine prozora računata po: a) kvadriranoj normi 2, b) normalizovanoj normi 4, c) Rényi-jevoj informaciji i d) energetske mjere. Prve dvije mjere koncentracije uzimaju maksimalnu vrijednost za slučaj najbolje koncentrisane reprezentacije, dok druge dvije mjere u tom slučaju dostižu minimum. Na slici

se vidi da svaka od navedenih mjera u ovom slučaju pronalazi optimalnu reprezentaciju, pri čemu je kod svih mjera najbolja koncentracija ostvarena za širinu prozora od 26 odbiraka. Na slici 13 prikazan je spektrogram posmatranog signala za tri karakteristične vrijednosti širine prozora: a) 8 odbiraka (najuži posmatrani prozor), b) 26 odbiraka (prozor koji daje najbolju koncentraciju) i c) 128 odbiraka (najširi posmatrani prozor).



Sl. 12. Linearni FM signal – zavisnost koncentracije od širine korišćenog prozora za 4 različite mjere koncentracije



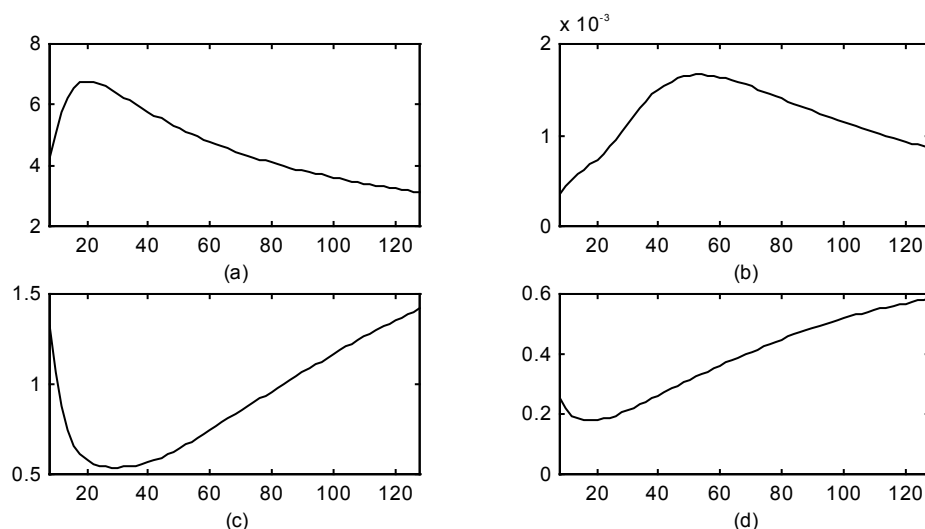
Sl. 13. Linearni FM signal – spektrogram za tri karakteristične širine prozora

Primjer 2. Korišćen je signal sa sinusoidalnom promjenom trenutne frekvencije:

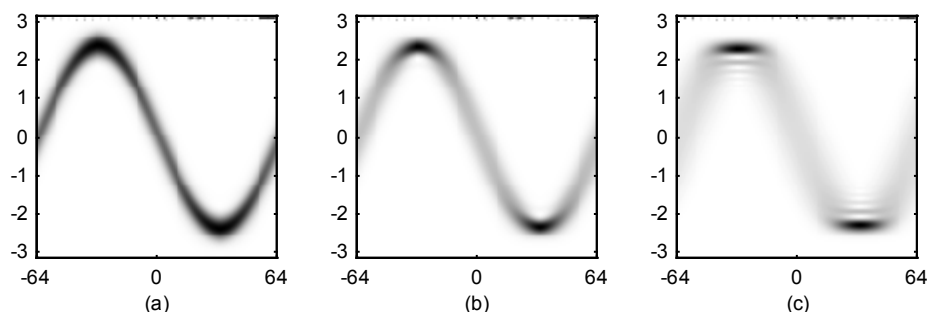
$$x(t) = \exp(j48 \cos(\frac{\pi}{64}t)) \tag{162}$$

Signal je posmatran na intervalu $-64 \leq t < 64$, odabiran sa korakom odabiranja $T = 1$. Uzet je Hanningov prozor, pri čemu su posmatrane širine prozora od 8 do 128 sa korakom 2. Na slici 14 prikazana je zavisnost koncentracije spektrograma od širine prozora analogno prethodnom primjeru. Sa slike vidimo da svaka od navedenih mjera u ovom slučaju pronalazi

optimalnu reprezentaciju, pri čemu, za razliku od prethodnog primjera, širina prozora zavisi od korišćene mjere. U slučaju mjere pod a) maksimum je dostignut za širinu prozora od 20 odbiraka, za slučaj b) maksimum je dobijen za prozor od 54 odbirka, 30 odbiraka je minimum mjere pod c) a energetska mjera d) daje optimalnu širinu prozora od 18 odbiraka. Na slici 15 prikazan je spektrogram posmatranog signala za tri karakteristične vrijednosti širine prozora: a) 18 odbiraka (optimalno prema energetskeoj mjeri i kvadriranoj normi 2), b) 30 odbiraka (optimalna širina prema Rényi-jevoj informaciji) i c) 54 odbiraka (optimalna širina u smislu normalizovane norme 4). Na osnovu ove slike možemo zaključiti da se najbolja koncentracija signala prema energetskeoj mjeri i kvadriranoj normi 2 poklapa sa vizuelno najbolje koncentrisanom reprezentacijom od tri ponuđene. Treba napomenuti i da svaka od korišćenih mjera ostvaruje maksimum, odnosno minimum na posmatranom intervalu širine prozora.



Sl. 14. Sinusoidalni FM signal – zavisnost koncentracije od širine korišćenog prozora za 4 različite mjere koncentracije

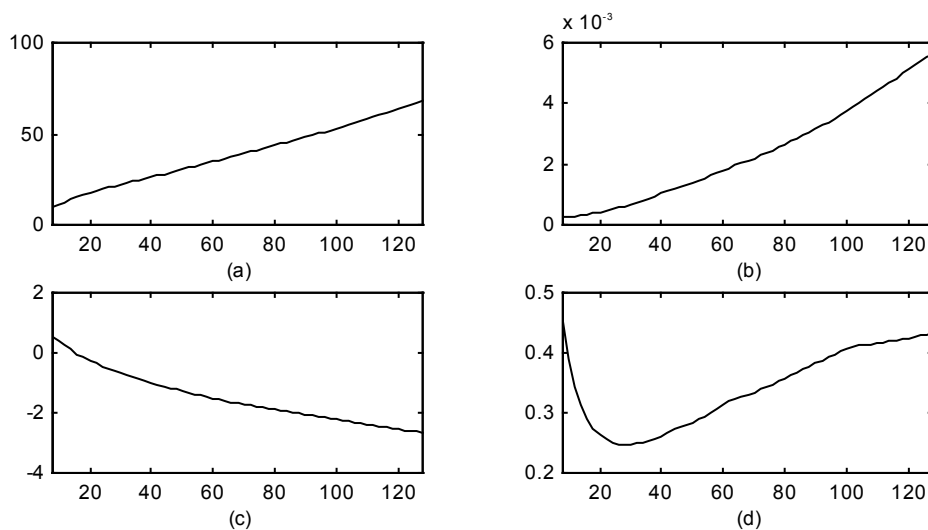


Sl. 15. Sinusoidalni FM signal – spektrogram za tri karakteristične širine prozora

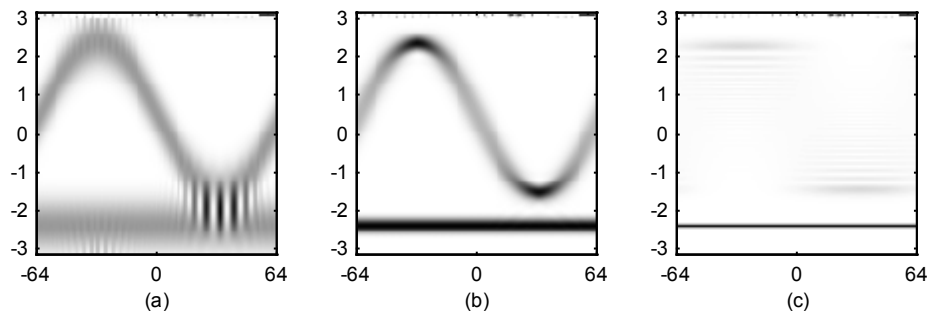
Primjer 3. Korišćen je dvokomponentni signal kod kojega je jedna komponenta sa sinusoidalnom promjenom trenutne frekvencije, a druga komponenta ima konstantnu frekvenciju, pri čemu se u vremensko-frekvencijskoj ravni ove komponente ne preklapaju:

$$x(t) = \exp(j40 \cos(\frac{\pi}{64}t) + j\frac{\pi}{8}t) + \exp(-j\frac{3\pi}{4}t) \quad (163)$$

Signal je posmatran na intervalu $-64 \leq t < 64$, odabiran sa korakom odabiranja $T = 1$. Uzet je Hanningov prozor, pri čemu su posmatrane širine prozora od 8 do 128 sa korakom 2. Na slici 16 prikazana je zavisnost koncentracije spektrograma od širine prozora za četiri različite mjere koncentracije, analogno primjeru 1. Sa slike vidimo da samo energetska mjera (slika pod d)) pronalazi optimalnu širinu prozora za maksimalno koncentrisanu reprezentaciju posmatranog signala. Minimum mjere je ostvaren za širinu prozora od 28 odbiraka i spektrogram sa tom širinom prozora prikazan je na slici 17 pod b). Preostale tri mjere favorizuju najširi prozor iz posmatranog skupa. Razlog za takvo ponašanje je u tome što su dvije komponente signala različito koncentrisane, iako imaju istu energiju. Naime, komponenta sa konstantnom frekvencijom maksimalnu koncentraciju postiže kada je širina prozora maksimalna, te mjere pod a), b) i c) favorizuju ovu komponentu zbog njene izuzetno dobre koncentracije, zanemarujući drugu komponentu, koja ni za jednu širinu prozora nije dobro koncentrisana usled nelinearnosti svoje trenutne frekvencije. Na slici 17 pod a) dat je spektrogram za najuži korišćeni prozor a pod c) za najširi (optimalna širina iz posmatranog skupa prema kvadriranoj normi 2, normalizovanoj normi 4 i Rényi-jevoj informaciji). Vizuelno poređenje spektrograma za ove tri širine prozora kazuje nam da slučaj pod b) daje optimalnu koncentraciju u smislu ravnopravnosti komponenti signala sa približno istom energijom. Koncentracija spektrograma sa slike 17 pod c) je bolja od slučaja b) ali je jedna komponenta signala potpuno zanemarena.



Sl. 16. Dvokomponentni signal sa razdvojenim komponentama – zavisnost koncentracije od širine korišćenog prozora za 4 različite mjere koncentracije



Sl. 17. Dvokomponentni signal sa razdvojenim komponentama – spektrogram za tri karakteristične širine prozora

Primjer 4. Korišćen je dvokomponentni signal kod kojeg jedna komponenta ima nelinearnu promjenu trenutne frekvencije, a druga komponenta ima konstantnu frekvenciju, pri čemu se u vremensko-frekvencijskoj ravni ove komponente sijeku:

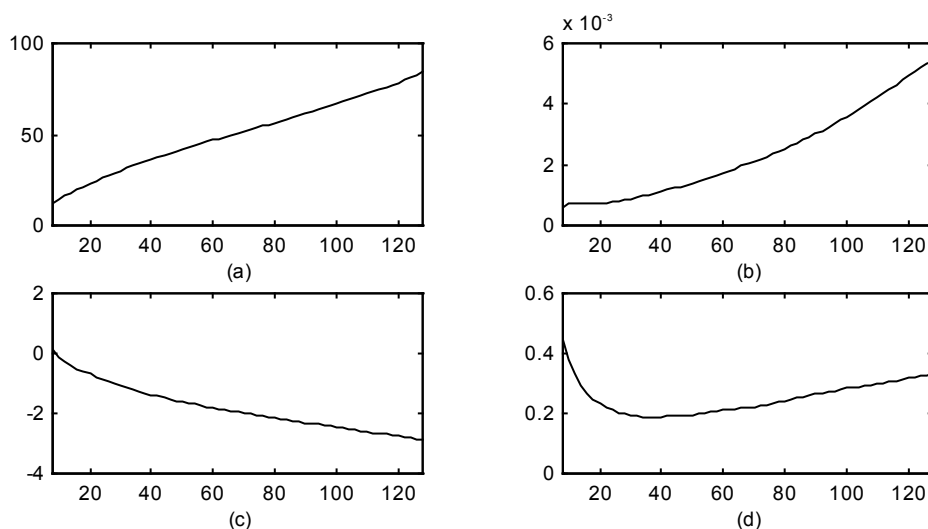
$$x(t) = \exp\left(j2t \arctan\left(\frac{5}{64}t\right) - j\frac{64}{5} \ln\left(1 + \left(\frac{5}{64}t\right)^2\right)\right) + \exp\left(-j\frac{\pi}{4}t\right) \quad (164)$$

Trenutna frekvencija prve komponente signala (dobijena kao prvi izvod faze po vremenu) je:

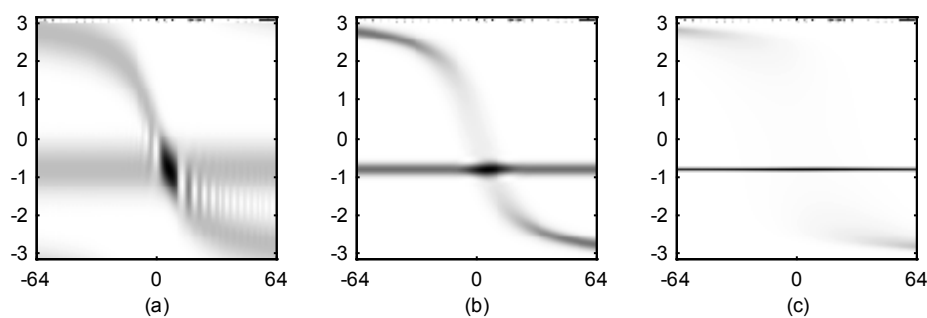
$$\omega_1(t) = 2 \arctan\left(\frac{5}{64}t\right) \quad (165)$$

Signal je posmatran na intervalu $-64 \leq t < 64$, odabiran sa korakom odabiranja $T = 1$. Uzet je Hanningov prozor, pri čemu su posmatrane širine prozora od 8 do 128 sa korakom 2.

Na slici 18 prikazana je zavisnost koncentracije spektrograma od širine prozora za četiri različite mjere koncentracije, analogno primjeru 1. Sa slike vidimo da, kao i u prethodnom primjeru, samo energetska mjera (slika pod d)) pronalazi optimalnu širinu prozora za maksimalno koncentrisanu reprezentaciju posmatranog signala. Minimum mjere je ostvaren za širinu prozora od 36 odbiraka i spektrogram sa tom širinom prozora prikazan je na slici 19 pod b). Preostale tri mjere favorizuju najširi prozor iz posmatranog skupa. Na slici 19 pod a) dat je spektrogram za najuži korišćeni prozor a pod c) za najširi (optimalna širina iz posmatranog skupa prema kvadriranoj normi 2, normalizovanoj normi 4 i Rényi-jevoj informaciji). Vizuelno poređenje spektrograma za ove tri širine prozora kazuje nam da slučaj pod b) daje optimalnu koncentraciju u smislu ravnopravnosti komponenti signala sa približno istom energijom. Koncentracija spektrograma sa slike 19 pod c) je bolja od slučaja b) ali je komponenta signala sa nelinearnom promjenom frekvencije potpuno zanemarena.

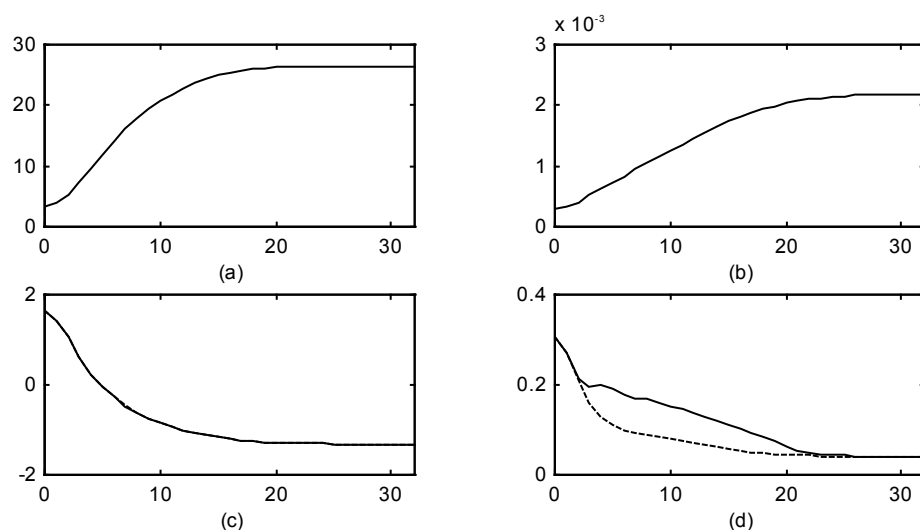


Sl. 18. Dvokomponentni signal sa komponentama koje se sijeku – zavisnost koncentracije od širine korišćenog prozora za 4 različite mjere koncentracije

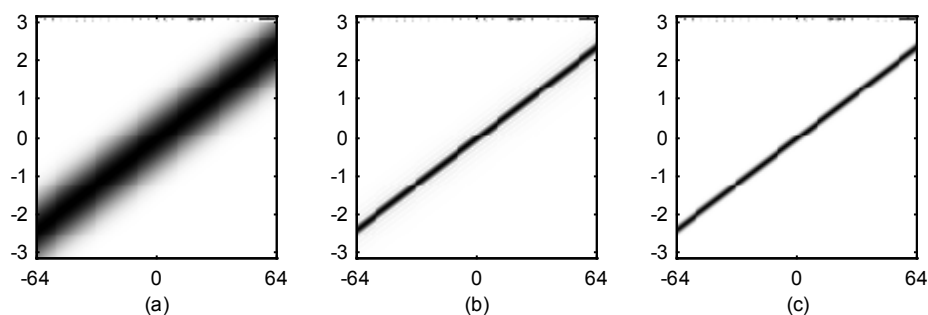


Sl. 19. Dvokomponentni signal sa komponentama koje se sijeku – spektrogram za tri karakteristične širine prozora

U narednim primjerima mjerenje koncentracije vremensko-frekvencijskih reprezentacija je primijenjeno na dobijanje optimalne širine prozora $P(\theta)$ kod S-metoda. Širinu prozora ćemo obilježiti sa $2L$. Opseg parametra L je od 0 do 32 sa korakom 1. Za računanje S-metoda korišćena je kratkotrajna Furijeova transformacija signala sa prozorom širine 96 (relativno širok prozor u odnosu na opseg signala u vremenskom domenu). Posmatrani su isti signali kao u primjerima 1 do 4, pri čemu je izvršeno preodabiranje signala sa $T = 0.5$



Sl. 20. Koncentracija S-metoda u zavisnosti od parametra L prema različitim mjerama koncentracije

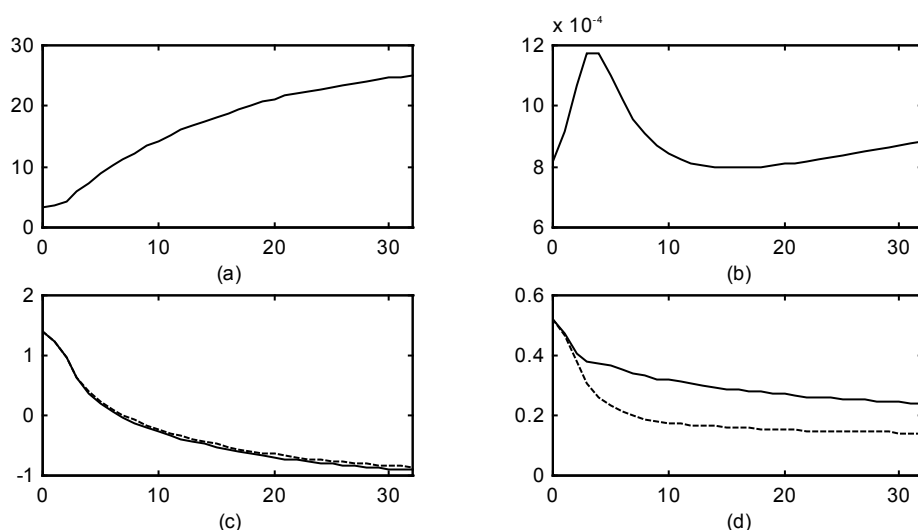


Sl. 21. Vremensko -frekvencijska reprezentacija posmatranog signala dobijena S-metodom za tri karakteristične vrijednosti parametra L

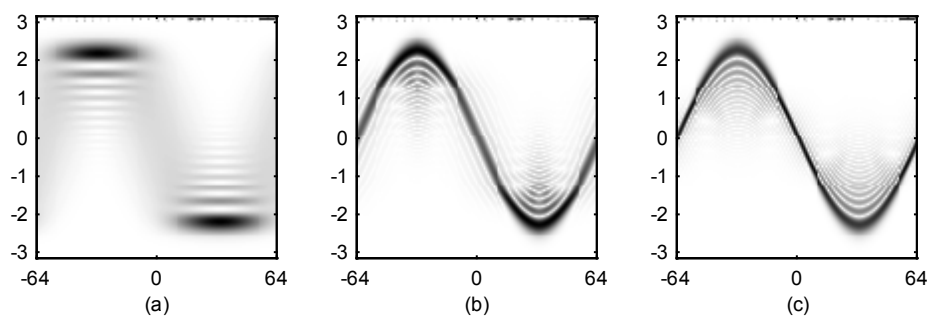
Primjer 5. Korišćen je signal sa linearnom promjenom trenutne frekvencije kao u primjeru 1. Sa slika 20 i 21 vidimo da je svaka od korišćenih mjera za optimalni slučaj proglasila najveću vrijednost parametra L iz posmatranog opsega. Na slici 21 su data tri karakteristična slučaja: a) $L = 0$, b) $L = 16$ i c) $L = 32$. Sa grafika na slici 20 možemo zaključiti da povećanje parametra L preko 20 gotovo ne utiče na koncentraciju S-metoda. To

je posledica osobine S-metoda da se povećavanjem širine prozora postiže poboljšavanje koncentracije signala sve do momenta kada prozor ne postane jednak širini auto-člana. Dalje povećavanje širine prozora nema uticaja na koncentraciju kada se radi o monokomponentnom signalu kod kojeg Wignerova distribucija (granični slučaj S-metoda) nema kros-članova.

Primjer 6. Korišćen je signal sa sinusoidalnom promjenom trenutne frekvencije (162) kao u primjeru 2. Sa slika 22 i 23 vidimo da je svaka od korišćenih mjera, osim normalizovane norme 4 (slika 22 pod b)) za optimalni slučaj proglasila najveću vrijednost parametra L iz posmatranog opsega. Na slici 23 su data tri karakteristična slučaja: a) $L = 0$, b) $L = 16$ i c) $L = 32$. Vidimo da, iako povećavanje parametra L povećava koncentraciju, kao neželjeni efekat se pojavljuju kros-članovi. Zadatak mjere koncentracije je da pronade kompromisni slučaj, kada je distribucija dobro koncentrisana i kada je nivo kros-članova prihvatljiv.

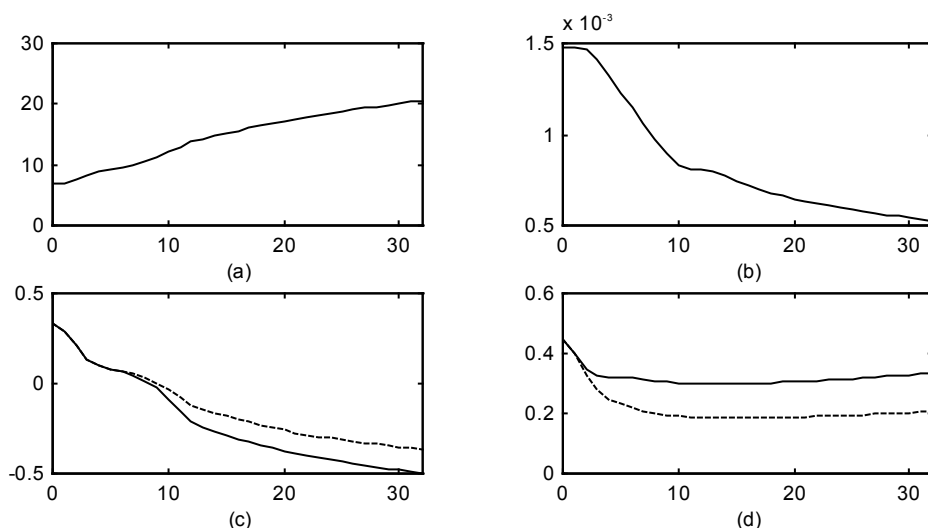


Sl. 22. Koncentracija S-metoda u zavisnosti od parametra L prema različitim mjerama koncentracije

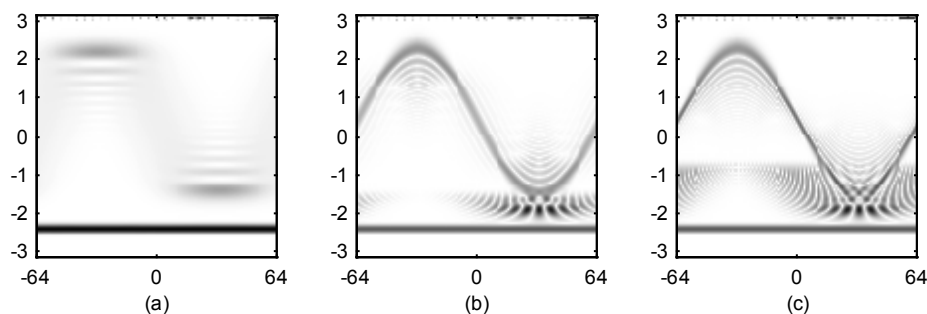


Sl. 23. Vremensko -frekvencijska reprezentacija posmatranog signala dobijena S-metodom za tri karakteristične vrijednosti parametra L

Primjer 7. Korišćen je dvokomponentni signal (163) kao u primjeru 3. Sa slike 24 vidimo da je prema kvadriranoj normi 2 a) i prema Rényi-jevoj informaciji c) optimalna maksimalna vrijednost parametra L , dok normalizovana norma 4 b) daje kao optimalnu vrijednost $L=0$, dok energetska mjera d) svoj minimum ostvaruje za $L=15$. Na slici 25 su data tri karakteristična slučaja: a) $L = 0$, b) $L = 15$ i c) $L = 32$. U ovom slučaju se javljaju izraziti kros članovi tako da se od mjere koncentracije očekuje da pored pronalaženja dobre koncentracije komponenti signala, vodi računa i o kros članovima. Od posmatranih mjera jedino je energetska mjera utvrdila granicu poslije koje povećanje parametra L više utiče na pojavu kros članova nego na koncentraciju komponenti signala.



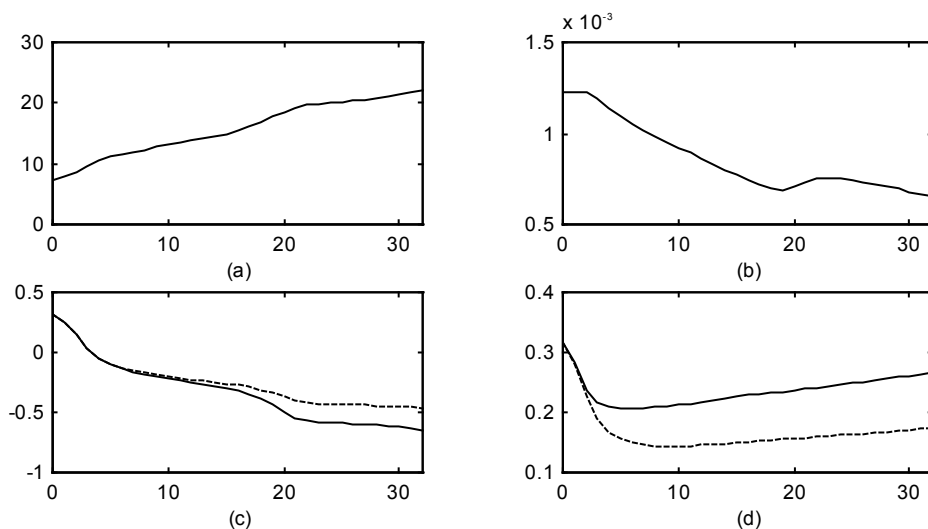
Sl. 24. Koncentracija S-metoda u zavisnosti od parametra L prema različitim mjerama koncentracije



Sl. 25. Vremensko -frekvencijska reprezentacija posmatranog signala dobijena S-metodom za tri karakteristične vrijednosti parametra L

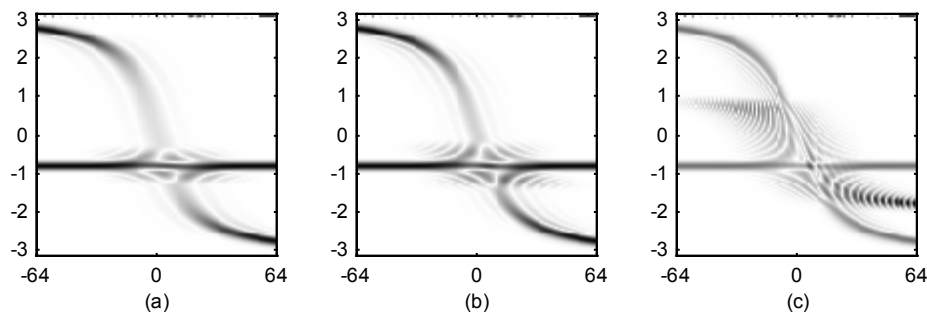
Primjer 8. Korišćen je dvokomponentni signal (164) kao u primjeru 4. Dobijeni su rezultati potpuno analogni primjeru 7, pri čemu u ovom slučaju kod energetske mjere u

zavisnosti da li posmatramo apsolutnu vrijednost distribucije ili njen nenegativni dio dobijamo minimum na različitim mjestima. Za slučaj apsolutne vrijednosti distribucije (puna linija na slici 26 d)) minimum je ostvaren za $L=6$, dok je za slučaj nenegativne vrijednosti distribucije (isprekidana linija) minimum ostvaren za $L=9$. To je i očekivano, jer kros članovi uzimaju i pozitivne i negativne vrijednosti, tako da eliminisanjem negativnih vrijednosti smanjujemo njihov uticaj na mjeru koncentracije distribucije. Na slici 27 su data tri karakteristična slučaja: a) $L = 6$, b) $L = 9$ i c) $L = 32$.



Sl. 26. Koncentracija S-metoda u zavisnosti od parametra L prema različitim mjerama koncentracije

U ovom primjeru u okolini presječne tačke komponenti javljaju se izuzetno jaki kros članovi, tako da i pored povećavanja koncentracije sa povećavanjem parametra L , nakon neke vrijednosti koncentracija računata pomoću energetske mjere počinje da raste, jer kros članovi i pored dobre koncentrisanosti zauzimaju značajan dio vremensko-frekvencijske ravni.



Sl. 27. Vremensko -frekvencijska reprezentacija posmatranog signala dobijena S-metodom za tri karakteristične vrijednosti parametra L

4.2. Primjena mjera u poređenju različitih vremensko-frekvencijskih distribucija

U nastavku će biti analizirano ponašanje navedenih mjera koncentracije za slučajeve kada treba odabrati distribuciju sa najboljom koncentracijom iz skupa distribucija različitog tipa. Posmatran je sinusoidalno frekvencijski modulirani signal i računata njegova Wigner-ova distribucija, pseudo Wigner-ova distribucija sa Hanningovim prozorom širine 64 odbirka, Born-Jordan-ova distribucija i Choi-Williams-ova distribucija sa širinom jezgra $\sigma = 2\pi$.

Nenegativni dio TFD		WD	PWD	BJ	CW
Kvadrirana norma 2	$* 10^{-3}$	18.6441	4.0994	2.7223	3.1174
Normalizovana norma 4	$* 10^{-3}$	0.8466	1.1329	0.7428	0.7329
Rényi-jeva informacija		7.0356	8.4199	9.0741	8.9229
Normalizovana Rényi-jeva inf.		8.5657	9.0453	9.9213	9.7990
Energetska mjera		0.2590	0.1058	0.3461	0.3295

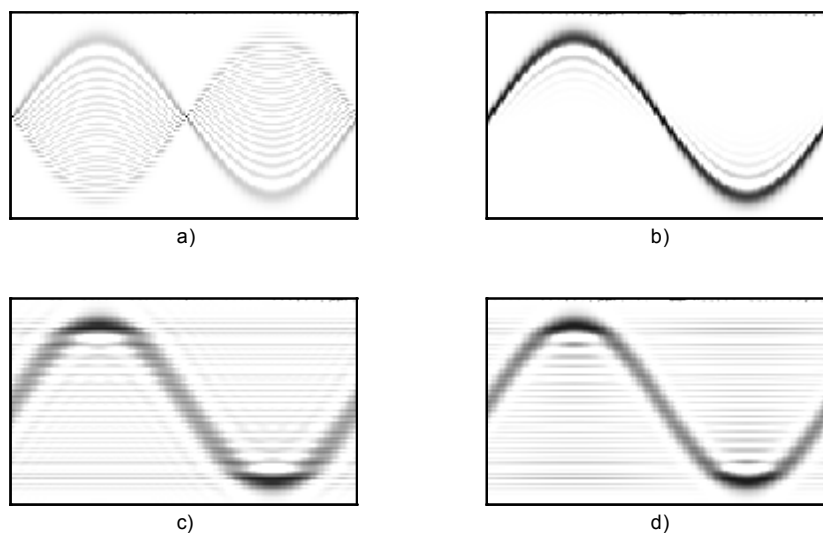
T VI Poređenje različitih distribucija jednog signala, pri čemu je mjerena koncentracija nenegativnih djelova distribucija

Apsolutna vrijednost TFD		WD	PWD	BJ	CW
Kvadrirana norma 2	$* 10^{-3}$	7.8125	1.0819	0.7928	0.9119
Normalizovana norma 4	$* 10^{-3}$	0.3954	1.0244	0.5660	0.5575
Rényi-jeva informacija		8.2298	9.9052	10.5242	10.3692
Normalizovana Rényi-jeva inf.		9.6678	10.1381	11.1048	10.9912
Energetska mjera		0.4670	0.1531	0.6129	0.6140

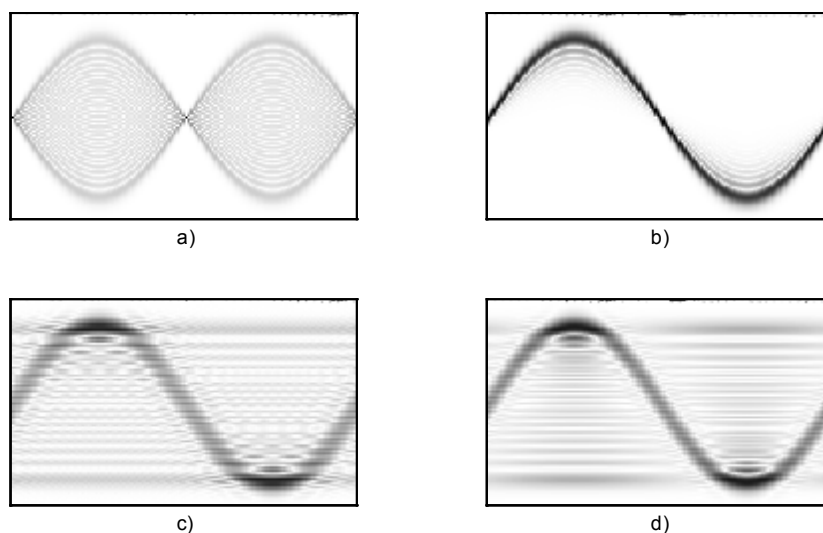
T VII Poređenje različitih distribucija jednog signala, pri čemu je mjerena koncentracija apsolutnih vrijednost distribucija

Za sve pomenute TFD određene su mjere koncentracije i rezultati su prikazani u tabelama T VI i T VII. U prvom slučaju uzet je nenegativni dio TFD, prikazan na slici 28 a u drugom apsolutna vrijednost TFD, prikazana na slici 29. U tabelama su označene vrijednosti

mjere koncentracije distribucije koja je za posmatranu mjeru najbolja. Sa slika 28 i 29 se jasno vidi da je pseudo Wigner-ova TFD najbolji slučaj, ali iz tabela vidimo da nije svaka mjera tu činjenicu potvrdila.



Sl. 28. Nenegativni dio distribucija posmatranog signala: a) Wignerova distribucija, b) Pseudo-Wignerova distribucije, c) Born-Jordanova distribucija, d) Choi-Williamsova distribucija



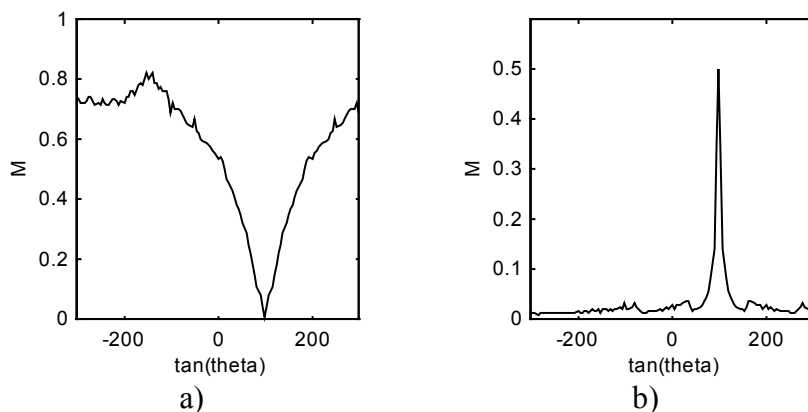
Sl. 29. Apsolutna vrijednost distribucija posmatranog signala: a) Wignerova distribucija, b) Pseudo-Wignerova distribucije, c) Born-Jordanova distribucija, d) Choi-Williamsova distribucija

4.3. Primjena mjera koncentracije za dobijanje frakcionih vremensko-frekvencijskih reprezentacija

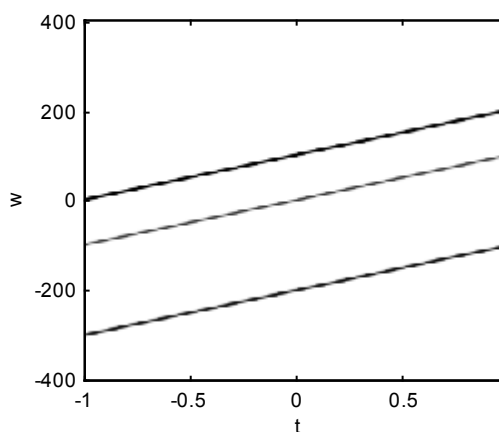
Jedna od mogućih varijanti spektrograma je slučaj kada klasičnu Furijeovu transformaciju korišćenu za određivanje vrijednosti spektrograma u jednom vremenskom trenutku, zamijenimo sa frakcionom Furijeovom transformacijom, sa određenim parametrom θ , odnosno sa harmonijskom frakcionom Furijeovom transformacijom. Prvi slučaj je pogodan za analizu signala čije su komponente paralelne u vremensko-frekvencijskoj ravni i približno konstantnog nagiba u okviru intervala odsječenog korišćenom funkcijom prozora. Drugi slučaj je od interesa kada komponente signala nijesu paralelne, već trenutna frekvencija svake komponente proporcionalna trenutnoj frekvenciji ostalih komponenti, za svaki posmatrani vremenski trenutak. Logično je da kriterijum za odabir optimalnog parametra θ za zadati vremenski trenutak bude koncentracija frakcione Furijeove transformacije u tom trenutku. Posmatrajmo signal:

$$x(t) = \frac{3}{4} \exp(j50t^2) + \frac{5}{4} \exp(j50t^2 + j32\pi t) + \exp(j50t^2 - j64\pi t) \quad (166)$$

Za svaki vremenski trenutak možemo odrediti frakcionu Furijeovu transformaciju posmatranog signala i odabrati parametar θ , tako da dobijemo maksimalnu koncentraciju. Na slici 30 data je koncentracija frakcione Furijeove transformacije posmatranog signala, računata u trenutku $t = 0$, pri čemu je korišćen Hanningov prozor širine 2, dobijena primjenom a) energetske mjere i b) normalizovane norme 4. Vidimo da u oba slučaja mjera svojim minimumom u prvom, odnosno maksimumom u drugom slučaju određuje optimalnu vrijednost parametra $\theta_{opt} = 100$. Ukoliko ponovimo ovaj postupak za sve vremenske trenutke i u svakom trenutku uzmemo optimalno koncentrisanu frakcionu Furijeovu transformaciju odsječka signala dobićemo modifikovani spektrogram posmatranog signala kod kojeg je koncentracija u ovom slučaju idealna (slika 31).



Sl. 30. Mjera koncentracije frakcione Furijeove transformacije u zavisnosti od parametra θ , za slučaj: a) energetske mjere i b) normalizovane norme 4.



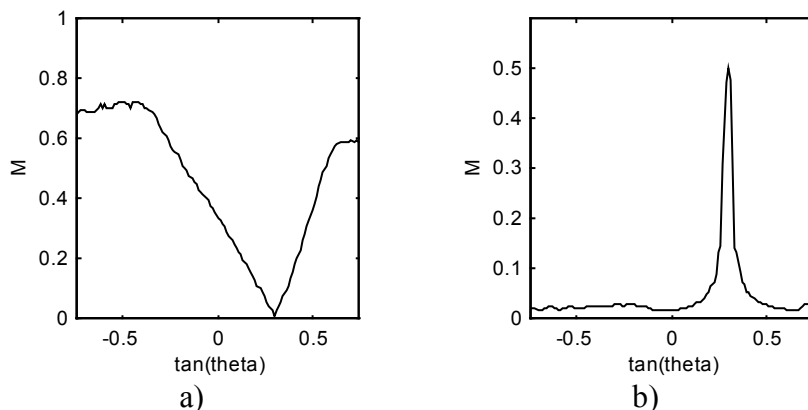
Sl. 31. Spektrogram dobijen korišćenjem optimalno koncentrisane frakcione Furijeove transformacije

Prethodni primjer pokazao je opravdanost primjene frakcione Furijeove transformacije na klasu multikomponentnih signala kod kojih su komponente paralelne u TF ravni. Posmatrajmo sada slučaj kada imamo “pseudoharmonijski” signal, odnosno multikomponentni signal, pri čemu je odnos trenutnih frekvencija svih komponenti signala u posmatranom vremenskom trenutku t jednak konstanti, koja zavisi samo od odabranih komponenti a ne i od vremena. Drugim riječima ako trenutne frekvencije komponenti signala obilježimo sa $\omega_i(t)$, $i = 1, 2, \dots, M$, gdje je M broj komponenti signala tada vrijedi relacija:

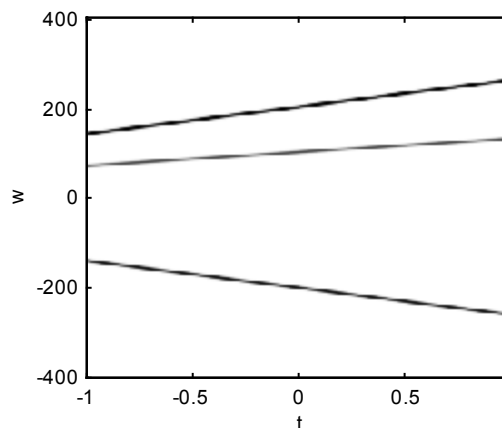
$$\frac{\omega_i(t)}{\omega_j(t)} = C_{ij} \quad (167)$$

Takav signal je analogan složenoperiodičnom signalu u klasičnoj Furijeovoj analizi. Primjer takvog signala je:

$$x(t) = \frac{3}{4} \exp(j(32\pi + 15t)t) + \frac{5}{4} \exp(j2(32\pi + 15t)t) + \exp(-j2(32\pi + 15t)t) \quad (168)$$



Sl. 32. Mjera koncentracije harmonijske frakcije Furijeove transformacije u zavisnosti od parametra θ , za slučaj: a) energetske mjere i b) normalizovane norme 4.



Sl. 33. Spektrogram dobijen korišćenjem optimalno koncentrisane harmonijske frakcije Furijeove transformacije

Kod ovog signala je:

$$\omega_1(t) = 32\pi + 30t, \quad \omega_2(t) = 64\pi + 60t \quad \text{i} \quad \omega_3(t) = -64\pi - 60t$$

Vidimo su odnosi:

$$\frac{\omega_2(t)}{\omega_1(t)} = 2 \quad \text{i} \quad \frac{\omega_3(t)}{\omega_1(t)} = -2$$

odnosno da ne zavise od vremena pa stoga posmatrani signal pripada klasi “pseudoharmonijskih” signala. Na slikama 32a i 32b date su energetska mjera koncentracije i normalizovana norma 4 dobijene variranjem parametra θ za posmatrani signal. Vidimo da se

u oba slučaja jedna vrijednost ugla θ javlja kao optimalna, te u tom slučaju imamo optimalnu koncentraciju vremensko-frekvencijske reprezentacije signala prikazanu na slici 33.

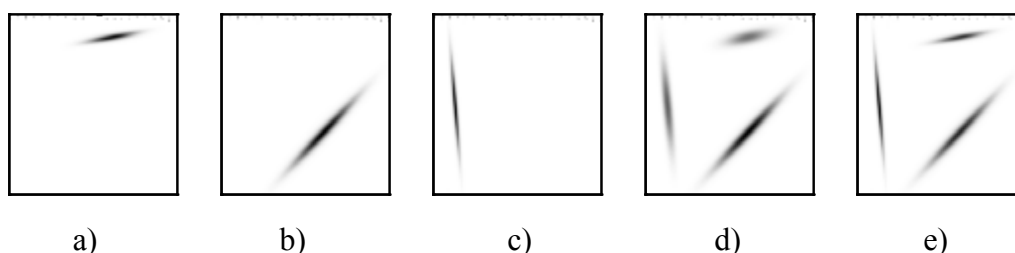
4.4. Primjena lokalne mjere koncentracije na spektrogram

Često se pri analizi multikomponentnih signala optimalne vrijednosti parametara distribucije bitno razlikuju za pojedine komponente signala. Vidjeli smo da se mjerenjem koncentracije i traženjem optimalnih parametara u stvari traži kompromis, odnosno ona vrijednost parametara distribucije koji daju dobru koncentraciju svih komponenti, pri čemu u najvećem broju slučajeva nijedna od komponenti nije optimalno koncentrisana, odnosno, ako bi ih posmatrali zasebno, dobili bismo u za svaku komponentu optimalne parametre distribucije, koji se u opštem slučaju međusobno razlikuju, a takođe se razlikuju i od optimalnog slučaja za multikomponentni signal. Da bismo ilustrovali navedene tvrdnje, posmatrajmo spektrogram trokomponentnog signala:

$$\begin{aligned} x(t) = & \frac{1}{\sqrt{2}} \exp(j12.8\pi(t-0.2)^2 + j96\pi t) \exp(-10(t-0.2)^2) + \\ & + \exp(j64\pi t^2 - j64\pi t) \exp(-5(t-0.2)^2) + \\ & + 2 \exp(-j640\pi(t+0.75)^2) \exp(-300(t+0.75)^2) \end{aligned} \quad (169)$$

Koristićemo Hanningov prozor, i tražiti njegovu optimalnu širinu u smislu minimizacije energetske mjere koncentracije. Prva komponenta signala, zasebno posmatrana, optimalnu koncentraciju postiže za širinu prozora 0.546, za drugu komponentu dobijamo 0.242, a optimalna širina prozora za treću komponentu iznosi 0.070. Ukoliko posmatramo sve tri komponente zajedno optimalnu koncentraciju dobijamo za prozor širine 0.203. Ova širina prozora daje dobru koncentraciju druge komponente, a kod prve i treće komponente prisutna je velika degradacija u koncentraciji spektrograma. Na slici 34 a,b i c dati su spektrogrami pojedinih komponenti signala za optimalne širine prozora, slika 34d prikazuje spektrogram multikomponentnog signala sa kompromisnom koncentracijom komponenti, dok je na slici 34d prikazan spektrogram, pri čemu su parametri spektrograma određivani lokalno, odnosno za svaku tačku TF ravni računata je mjera koncentracije u kvadratnom regionu oko te tačke i odabrana ona vrijednost spektrograma u toj tački koja daje najbolju koncentraciju reprezentacije signala u posmatranom regionu. Na taj način se spektrogram lokalno prilagođava signalu i sve komponente signala su optimalno koncentrisane. Treba napomenuti da ovaj metod najbolje rezultate postiže ukoliko su komponente odvojene u TF ravni, kao u

navedenom primjeru, a treba posvetiti pažnju i u odabiranju regiona potrebnog za računanje lokalne mjere koncentracije. Region bi trebao da u svakoj tački TF ravni obuhvata samo jednu komponentu i u tom slučaju se dobijaju optimalni rezultati. Druga stvar koja umanjuje praktični značaj ovog metoda je velika numerička kompleksnost jer, mjeru koncentracije treba odrediti u velikom broju tačaka TF ravni. Kompromis se može tražiti u postavljanju relativno rijetke mreže u TF ravni, pri čemu se koncentracija mjeri samo u tačkama mreže i na taj način smanjuje numerička kompleksnost metoda. Na slici 34 vrijeme je prikazano na horizontalnoj a frekvencija na vertikalnoj osi grafika.



Sl. 34. Primjena lokalne mjere koncentracije na spektrogram

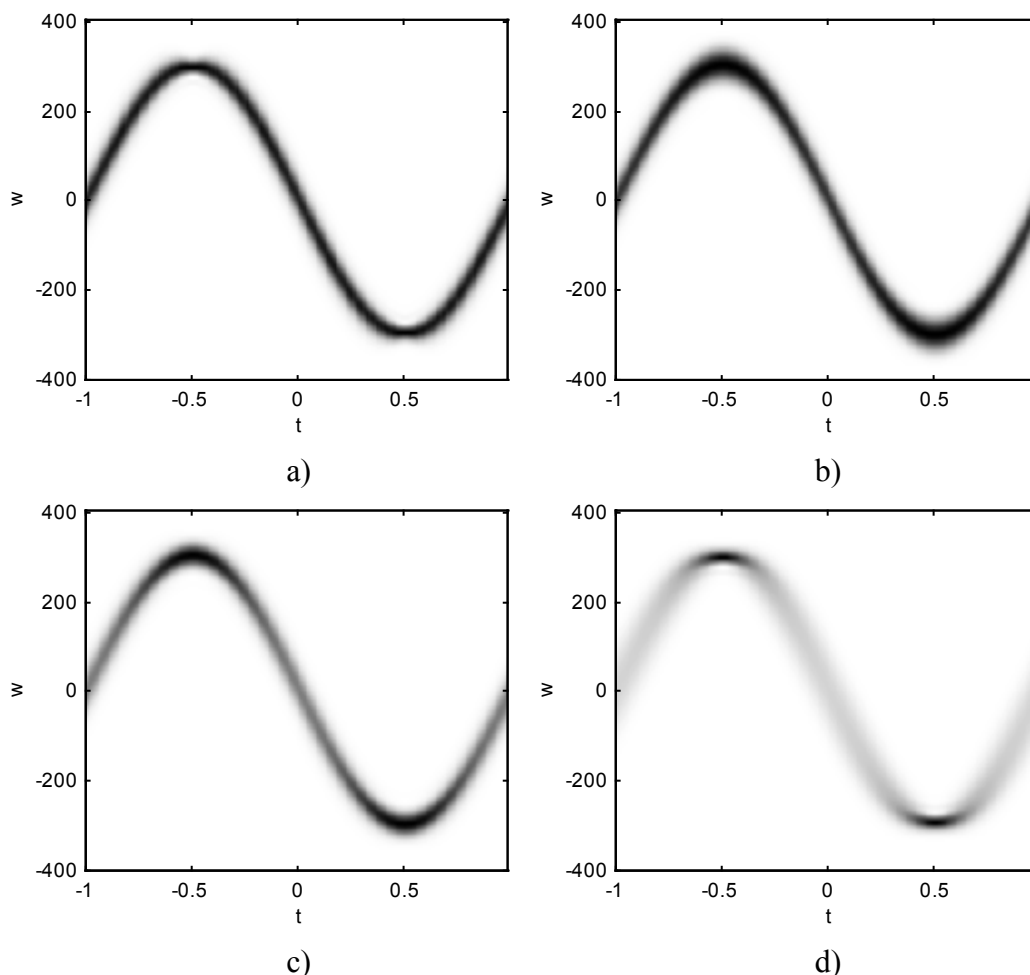
Upotreba lokalnih mjera koncentracije, kao što se vidi iz prethodnog primjera, daje dobre rezultate u analizi signala, ali javljaju se i određeni nedostaci, u prvom redu velika numerička kompleksnost metoda. Ograničićemo se sada na klasu monokomponentnih signala. Prozorska funkcija, koja iz TF ravni odabira jedan region u kojem se traže optimalni parametri korišćene TFD, kao što smo zaključili na osnovu prethodnog primjera treba obuhvatiti samo jednu komponentu signala. S obzirom da je signal monokomponentni, u svakom trenutku t_0 je lokalizovan na samo jednoj frekvenciji, pa se kao prozorska funkcija može uzeti oblast koju čine sve frekvencije i jedna okolina posmatranog trenutka t_0 . U graničnom slučaju ta se oblast svodi na liniju $t = t_0$, odnosno tada koncentraciju mjerimo u trenutku t_0 . Na osnovu veličine mjere koncentracije TFD možemo za svaki trenutak t_0 odabrati optimalne parametre TFD tako da koncentracija signala na trenutnoj frekvenciji bude maksimalna.

Posmatrajmo signal sa sinusoidalnom promjenom trenutne frekvencije:

$$x(t) = \exp(j96 \cos(\pi t)) \quad (170)$$

Analizirajmo navedeni signal spektrogramom sa Hanningovim prozorom, pri čemu širinu prozora možemo varirati. Za svaki trenutak t odaberimo onu širinu prozora koja daje

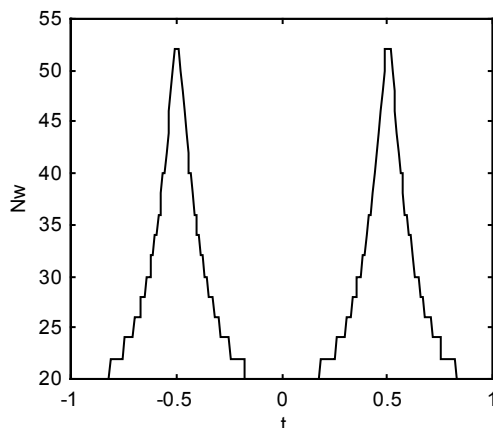
najbolju koncentraciju u skladu sa korišćenom mjerom. Dobićemo vremensko-frekvencijsku reprezentaciju signala koja će biti optimalno koncentrisana. U primjeru je korišćena energetska mjera i na slici 35a je prikazana vremensko-frekvencijska reprezentacija posmatranog signala dobijena navedenom metodom.



Sl. 35. a) vremensko-frekvencijska reprezentacija signala optimalno koncentrisana u svakom trenutku, b), c) i d) spektrogram posmatranog signala dobijen za minimalnu, prosječnu i maksimalnu širinu prozora korišćenu za dobijanje reprezentacije pod a)

Signal je odabiran sa $T=1/128$, a kao optimizacioni parametar je posmatran broj odbiraka prozora. Na slici 36 je prikazana zavisnost optimalnog broja odbiraka funkcije prozora u zavisnosti od vremena. Posmatrani su samo prozori parne dužine. Vidimo da je minimalna širina prozora od 20 odbiraka korišćena kada je nagib trenutne frekvencije veliki, odnosno u okolini trenutaka $t=-1$, $t=0$ i $t=1$, dok je u trenucima kada je nagib trenutne frekvencije mali (trenutci $t=-0.5$ i $t=0.5$) optimalno korišćenje šireg prozora. Povećavanjem širine prozora obuhvata se i veći dio signala, pa i oni njegovi djelovi gdje nagib trenutne frekvencije nije jednak nuli. Iz tog razloga nema smisla koristiti preširoke

prozore i u navedenim trenucima, prema korišćenoj mjeri, je optimalno koristiti prozor širine 52 odbirka. Ostali slučajevi se nalaze između ova dva ekstremna slučaja. Na slici 35b,c i d dat je spektrogram posmatranog signala pri čemu se širina prozora ne mijenja sa vremenom i iznosi u prvom slučaju 20, u drugom 28 i u trećem 52 odbirka (minimalna, prosječna i maksimalna vrijednost širine prozora).



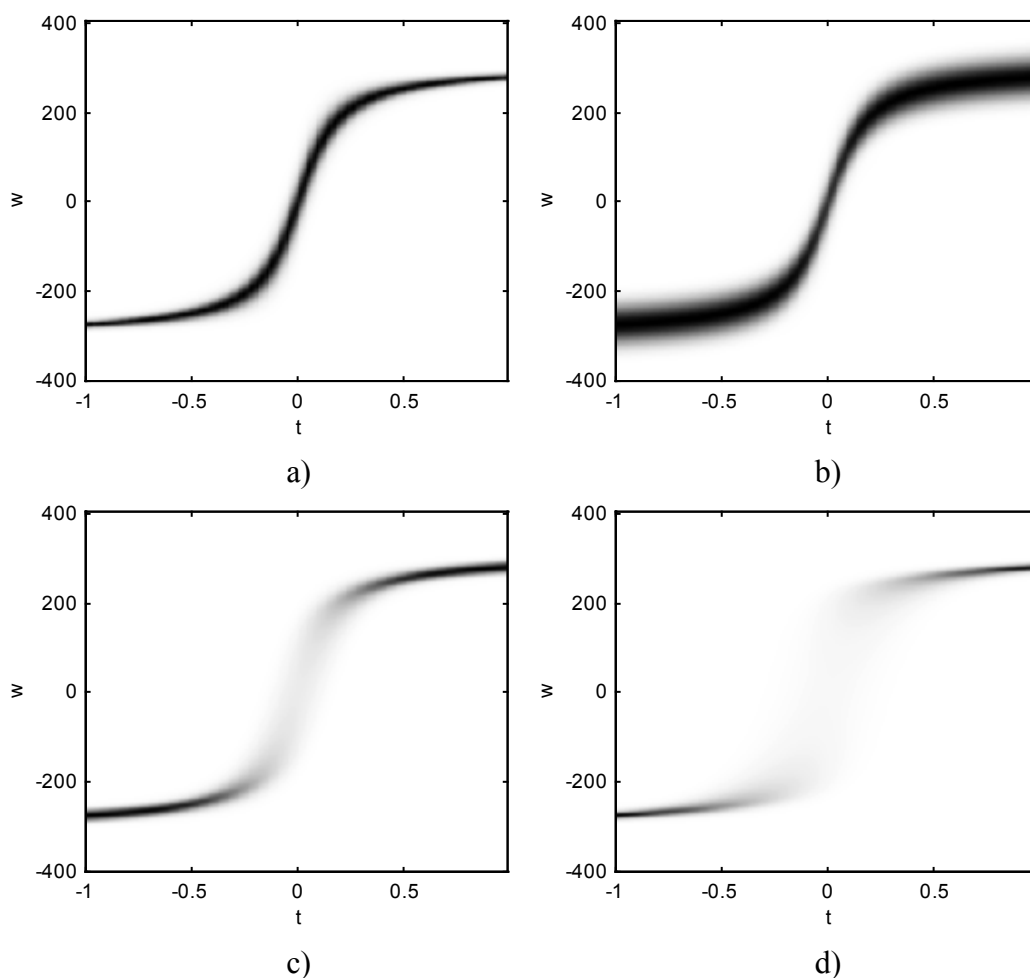
Sl. 36. Zavisnost optimalne širine prozora (broj odbiraka) od vremena

U narednom primjeru posmatran je signal:

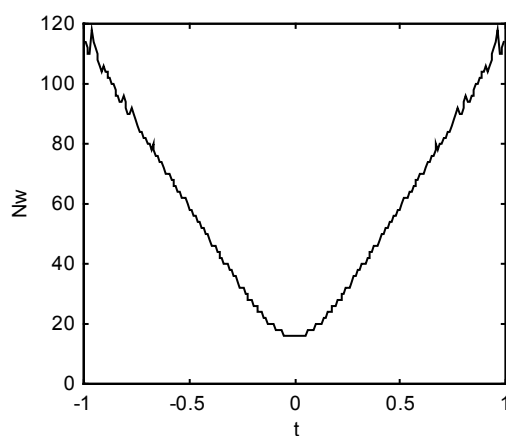
$$x(t) = \exp(j192t \arctan(30t) - j\frac{16}{5} \ln(1 + (30t)^2)) \quad (171)$$

Kod ovog signala trenutna frekvencija se mijenja po zakonu $\omega_i(t) = 192 \arctan(30t)$. metod iz prethodnog primjera primijenjen je na ovaj signal i rezultati su prikazani na slikama 37 i 38. Na slici 37a je spektrogram dobijen sa varijabilnom širinom prozora (tako da je koncentracija u svakom trenutku optimalna), slika 38 prikazuje zavisnost optimalne širine prozora od vremena, a na slikama 37b, c i d su dati spektrogrami posmatranog signala za minimalnu, prosječnu i maksimalnu širinu prozora.

Signal je odabiran sa korakom $T = 1/128$, korišćen je Hanningov prozor sa parnim brojem odbiraka i energetska mjera koncentracije. Sa slika se jasno vidi prednost primjene navedenog metoda u dobijanju optimalno koncentrisane vremensko-frekvencijske reprezentacije signala.



Sl. 37. a) vremensko-frekvencijska reprezentacija signala optimalno koncentrisana u svakom trenutku, b), c) i d) spektrogram posmatranog signala dobijen za minimalnu, prosječnu i maksimalnu širinu prozora korišćenu za dobijanje reprezentacije pod a)



Sl. 38. Zavisnost optimalne širine prozora (izražene brojem odbiraka) od vremena

5. Zaključak

U okviru ove teze analiziran je problem mjerenja koncentracije vremensko-frekvencijskih distribucija signala. Prva dva poglavlja predstavljaju uvodni dio teze gdje se na koncizan način iznose osnovni elementi Furijeove i vremensko-frekvencijske analize. U prvom, uvodnom poglavlju, nakon osnovnih definicija, date su osnovne osobine Furijeove transformacija i njenih varijacija: frakcione i polinomijalne Furijeove transformacije.

U trećem poglavlju se analizira problem koncentracije kod vremensko-frekvencijskih reprezentacija signala. U dijelu 3.1 opisan je analitički pristup problemu, i navedena njegova ograničenja, odnosno konkretni rezultati se mogu dobiti samo za mali broj vremensko-frekvencijskih reprezentacija, i za veoma usku klasu signala, tako da ovaj pristup nema veliku praktičnu primjenu. Interesantan je sa teorijskog aspekta, a takođe i za upoređivanje kasnije uvedenih numeričkih metoda sa analitički dobijenim rezultatima, što je urađeno u dijelu 3.4. U 3.2 su navedene postojeće metode mjerenja koncentracije, koje su najvećim dijelom modifikovane metode primjenjivane u teoriji vjerovatnoće za određivanje koncentracije raspodjele vjerovatnoća dvodimenzione slučajne promjenljive, pa stoga često ne daju zadovoljavajući rezultat. Energetska mjera koncentracije, prilagođena vremensko-frekvencijskim reprezentacijama signala definisana je u dijelu 3.3. Kao što će se vidjeti na primjerima navedenim u četvrtom poglavlju ova mjera u svim navedenim slučajevima daje očekivane rezultate. TTT Lokalne mjere koncentracije, bazirane na mjerama navedenim u 3.2 i 3.3, definisane su u dijelu 3.5. U dijelu 3.6 analizirane su sve navedene mjere sa stanovišta numeričke kompleksnosti, a takođe su navedena i dva algoritma za određivanje energetske mjere vremensko-frekvencijske reprezentacije, pri čemu je pokazano da je uz korišćenje optimizovanog algoritma numerička kompleksnost energetske mjere uporediva sa kompleksnošću ostalih metoda. U dijelu 3.7 opisan je metod za brzo pronalaženje optimalnih vrijednosti parametara vremensko-frekvencijskih reprezentacija u smislu dobijanja optimalno koncentrisane reprezentacije.

U četvrtom poglavlju navedeni su primjeri primjene mjera koncentracije u različitim praktično interesantnim slučajevima, pri čemu je u dijelu 4.1 posmatran problem optimizacije jednoparametarske vremensko-frekvencijske reprezentacije (spektrogram, gdje je parametar širina prozora i S-metod, gdje je parametar broj članova u definiciji S-metoda), u dijelu 4.2 se analizira problem poređenja različitih vremensko frekvencijskih reprezentacija u smislu

koncentracije, dio 4.2 prikazuje efikasnu primjenu mjerenja koncentracije za određivanje vremensko-frekvencijske reprezentacije signala bazirane na frakcionoj Furijeovoj transformaciji, dok se u dijelu 4.4 navode primjeri primjene lokalnih mjera koncentracije.

Kroz četiri navedene cjeline na sistematičan način je definisan problem mjerenja koncentracije vremensko-frekvencijskih reprezentacija signala, navedeni postojeći metodi numeričkog određivanja koncentracije, i uveden novi metod, baziran na ukupnoj energiji posmatranog signala. Sva razmatranja su potkrijepljena primjerima, gdje se demonstrira primjena mjerenja koncentracije vremensko-frekvencijskih reprezentacija u konkretnim problemima vremensko-frekvencijske analize signala.

6. Prilog

U ovom prilogu su dati osnovni MATLAB fajlovi pomoću kojih su dobijeni rezultati navedeni u primjerima. Većina navedenih fajlova su funkcijski fajlovi čijim se kombinovanjem rješavaju posmatrani problemi. Korišćena je verzija MATLAB-a 4.2c.

Računanje kratkotrajne Furijeove transformacije

```
function W=stft(x,N,wf);
% Racunanje STFT signala
%     W=stft(x,N,wf)
% x - signal (vektor kolona)
% N - Broj tacaka po frekevencijskoj osi
% wf - Funkcija prozora (vektor kolona)
% W - STFT signala x dimenzija (length(x)-N,N)
N2=N/2;
tau=[0:N2-1 -N2:-1];
k=1;
% Svodjenje prozora na duzinu N odbiraka
la=(N-length(wf));
la2=la/2;
wf=[zeros(ceil(la2),1);wf;zeros(floor(la2),1)];
wf=wf(tau+N2+1);
% Racunanje STFT-a
lx=length(x);
W=zeros(N,lx-N);
for t=N2+1:lx-N2
    W(:,t-N2)=wf.*x(t+tau);
end
W=fft(W);
W=W([N2+1:-1:1 N:-1:N2+2],:);
```


Računanje spektrograma

```
function W=spec(x,N,wf);
% Racunanje spektrograma signala
%   W=spec(x,N,wf)
% x - signal (vektor kolona)
% N - Broj tacaka po frekevencijskoj osi
% wf - Funkcija prozora (vektor kolona)
% W - Spektrogram signala x dimenzija (length(x)-N,N)
N2=N/2;
tau=[0:N2-1 -N2:-1];
k=1;
% Svodjenje prozora na duzinu N odbiraka
la=(N-length(wf));
la2=la/2;
wf=[zeros(1,ceil(la2)) wf' zeros(1,floor(la2))];
wf=wf(tau+N2+1);
% Racunanje spektrograma
lx=length(x);
W=ones(N,lx-N);
for t=N2+1:lx-N2
    W(:,t-N2)=wf.*x(t+tau);
end
W=abs(fft(W)).^2;
W=W([N2+1:-1:1 N:-1:N2+2],:);
```

Računanje Wignerove TFD

```
function W=wd(x,N);
% Racunanje Wignerove TFD
%     W=pwd(x,N)
% x - signal (vektor kolona)
% N - Broj tacaka po frekevencijskoj osi
% W - WD signala x dimenzija (length(x)-N,N)
N2=N/2;
tau=[0:N2-1 -N2:-1];
lx=length(x);
W=zeros(N,lx-N);
for t=N2+1:lx-N2
    W(:,t-N2)=x(t+tau).*conj(x(t-tau));
end
W=fft(W);
W=W([N2+1:-1:1 N:-1:N2+2],:);
```

Računanje pseudo Wignerove TFD

```
function W=pwd(x,N,wf);
% Racunanje pseudo Wignerove TFD
%     W=pwd(x,N,wf)
% x - signal (vektor kolona)
% N - Broj tacaka po frekevencijskoj osi
% wf - Funkcija prozora (vektor kolona)
% W - PWD signala x dimenzija (length(x)-N,N)
N2=floor(N/2);
tau=[0:N2-1 -N2:-1];
la=(N-length(wf)-1)/2;
% Prilagodjavanje prozora
% Podrazumijeva se da je u definiciji PWD  $w(\tau/2)*w(-\tau/2)$ 
% Ukoliko je u definiciji PWD koriscen samo jedan prozor
%  $w(\tau/2)$  tada treba eliminisati narednu IF naredbu
if rem(length(wf),2)==1
    wf=(wf(1:length(wf)).*wf(length(wf):-1:1))';
else
    wf=[(wf(2:length(wf)).*wf(length(wf):-1:2));0]';
end
la=floor(N-length(wf)-1)/2;
wf=[zeros(1,la+1) wf zeros(1,la)]';
wf=wf(tau+N2+1);
lx=length(x);
% Racunanje PWD
W=zeros(N,lx-N);
for t=N2+1:lx-N2
    W(:,t-N2)=wf.*x(t+tau).*conj(x(t-tau));
end
W=fft(W);
W=W([N2+1:-1:1 N:-1:N2+2],:);
```

Računanje TFD primjenom S-metoda

```
function D=sm(x,N,L,wf)
% Racunanje S-metoda
%     W=sm(x,N,L,wf)
% x - signal (vektor kolona)
% N - Broj tacaka po frekevencijskoj osi
% L - Broj sabiraka u definicionoj sumi S-metoda
% wf - Funkcija prozora (vektor kolona)
% W - S-metod signala x dimenzija (length(x)-N,N)
St=stft(x,N,wf);
nn=(1:N)+N/2;
D=abs(St(nn,:)).^2;
for i=1:L
    D=D+2*real(St(nn+i,:).*conj(St(nn-i,:)));
end
```

Računanje Born-Jordanove TFD

```
function WD=bjd(x,N,WD,c)
% Racunanje Born Jordanove TFD
%     W=bjd(x,N)
%     W=bjd(x,N,WD)
%     W=bjd(x,N,WD,c)
% x - signal (vektor kolona)
% N - Broj tacaka po frekevencijskoj osi
% WD - Wignerova TFD signala x (ukoliko je unaprijed poznata)
% C - Jezgro BJD
% W - BJD signala x dimenzija (length(x)-N,N)
if nargin<=2
    WD=wd(x,N);
end
if nargin<=3
    m1=-N/2:N/2-1;
    n1=-N/2+1:N/2;
    n1=4*pi*n1/N;
    [m2,n2]=meshdom(m1,n1);
    c=sin(m2.*n2/2+eps)./(m2.*n2/2+eps);
end
WD=fftshift(fft2(WD));
WD=real(ifft2(fftshift(c.*WD)));
```

Računanje Choi-Williamsove TFD

```
function WD=cwd(x,N,sig,WD,c)
% Racunanje Choi Williamsove TFD
%     W=cwd(x,N,sig)
%     W=cwd(x,N,sig,WD)
%     W=cwd(x,N,sig,WD,c)
% x - signal (vektor kolona)
% N - Broj tacaka po frekevencijskoj osi
% sig- parametar sigma koji odredjuje sirinu jezgra
% WD - Wignerova TFD signala x (ukoliko je unaprijed poznata)
% c - Jezgro CWD
% W - CWD signala x dimenzija (length(x)-N,N)
if nargin<=3
    WD=wd(x,N);
end
if nargin<=4
    m1=-N/2:N/2-1;
    n1=-N/2+1:N/2;
    n1=4*pi*n1/N;
    [m2,n2]=meshdom(m1,n1);
    c=exp(-(m2.*n2/sig).^2);
end
WD=fftshift(fft2(WD));
WD=(ifft2(fftshift(c.*WD)));
```

Računanje frakcione i harmonijske frekvencije Furijeove transformacije

```
% Frakciona Furijeova transformacija signala x (FRFT) i
% Harmonijska Frakciona Furijeova transformacija (HFRFT)
% TH je opseg vrijednosti parametra theta
N=256;
t=-1:2/N:1-2/N;
Wmax=N*pi/2;
W=Wmax*t;
x=3/4*exp(j*(Wmax/4+30/2*t).*t);
x=x+5/4*exp(j*2*(Wmax/4+30/2*t).*t);
x=x+exp(j*(-2)*(Wmax/4+30/2*t).*t);
TH=-300:5:300;
FRFT=zeros(length(TH),N);
for k=1:length(TH)
    FRFT(k,:)=fftshift(fft(x.*exp(-j*(TH(k))/2*t.^2)));
end
TH=(-300:5:300);
HFRFT=zeros(length(TH),N);
for k=1:length(TH)
    mnoz=-j*t.*(1+TH(k)/2/Wmax*t);
    for i=1:N
        HFRFT(k,i)=sum(x.*exp(W(i)*mnoz));
    end
end
end
```

Računanje norme 2

```
function no=norm2(A)
% Računanje norme 2 zadate TFD
%   N=norm2(TFD)
%   TFD - TFD ciju normu računamo
%   N   - Vrijednost norme 2
no=sum(sum(A.^2));
```

Računanje odnosa norme 4 i norme 2

```
function no=norm42(A)
% Računanje odnosna norme 4 i norme 2 zadate TFD
%   N=norm42(TFD)
%   TFD - TFD ciju normu računamo
%   N   - Vrijednost odnosa norme 4 i norme 2
no=sum(sum(A.^4))/sum(sum(A.^2)).^2;
```

Računanje Renyi-jeve informacije

```
function no=reny(A)
% Računanje Renyi-jeve informacije zadate TFD
%   N=renyn(TFD)
%   TFD - TFD ciju normu računamo
%   N   - Vrijednost mjere
no=-0.5*log(sum(sum(A.^3)))/log(2);
```

Računanje normalizovane Renyi-jeve informacije

```
function no=renyn(A)
% Računanje normalizovane Renyi-jeve informacije zadate TFD
%   N=renyn(TFD)
%   TFD - TFD ciju normu računamo
%   N   - Vrijednost mjere
no=-0.5*log(sum(sum(A.^3))/sum(sum(A)))/log(2);
```


Računanje energetske mjere koncentracije (Algoritam A1)

```
function no=ennorm(A,K)
% Racunanje energetske mjere koncentracije TFD (algoritam A1)
%   N=ennorm(TFD)
%   N=ennorm(TFD,K)
%   TFD - TFD ciju normu racunamo, realna i nenegativna
%   K    - Parametar energetske mjere (0<K<1)
%         podrazumijevana vrijednost je 0.95
%   N    - Vrijednost mjere
if nargin==1
    K=0.95;
end
K=1-K;
tmp=A(:);
lt=length(tmp);
tmp=cumsum(sort(tmp));
Kt=K*tmp(lt);
a=1;b=lt;
while a<b
    i=round((a+b)/2);
    if tmp(i)<Kt;
        a=i+1;
    elseif tmp(i)>Kt
        b=i-1;
    else
        a=i;b=i;break
    end
end
no=1-a/lt;
```

Računanje energetske mjere koncentracije (Algoritam A2)

```
function no=ennormq(A,K)
% Racunanje energetske mjere koncentracije TFD (algoritam A2)
%   N=ennormq(TFD)
%   N=ennormq(TFD,K)
%   TFD - TFD ciju normu racunamo, realna i nenegativna
%   K   - Parametar energetske mjere (0<K<1)
%       podrazumijevana vrijednost je 0.95
%   N   - Vrijednost mjere
if nargin==1
    K=0.95;
end
K=1-K;
A=A(:);
E=sum(A);
E0=0;
n0=0;
la=length(A);
l=min(A);
h=max(A);
m=l*(1-K)+h*K;
i=1
while length(A)>=1024
    i=i+1;
    if i>20
        break
    end
    amn=A<m;
    ts=sum(A(amn))+E0;
    if ts<K*E
        l=m;
        E0=ts;
        n0=n0+sum(amn);
    end
end
```

```
A=A (~amn) ;
else
    h=m;
    A=A (amn) ;
end
m=(1+h)/2;
end
A=E0+cumsum(sort(A));
n1=min(find(A>K*E));
if n1>1
    n1=n1+(A(n1)-K*E)/(A(n1-1)-A(n1));
else
    n1=n1+(A(n1)-K*E)/(A(n1)-A(n1+1));
end
n0=n0+n1;
no=1-n0/la;
```

Primjer određivanje optimalne širine prozora za spektrogram i energetska mjeru

```
function [p, sp, N1]=optsp(x, N, L)
% Funkcija pronalazi optimalnu sirinu Hanning-ovog prozora
% za slucaj spektrograma i energetske mjere.
%   p=optsp(x, N, L)
%   [p, sp]=optsp(x, N, L)
%   [p, sp, Mj]=optsp(x, N, L)
% x - posmatrani signal (vektor kolona)
% N - broj tacaka po frekvencijskoj osi
% L - posmatrani skup sirina prozora
% p - optimalna sirina iz ponudjenog skupa L
% sp - spektrogram u optimalnom slucaju
% Mj - vrijednosti mjere za sve razmatrane sirine prozora
k=1; N1=zeros(size(L));
for l=L
    wf=hanning(l); wf=wf/sqrt(sum(wf.^2));
    sp=spec(x, N, wf);
    N1(k)=ennormq(sp);
    k=k+1;
end
[q, w]=min(N1);
p=L(w);
wf=hanning(p); wf=wf/sqrt(sum(wf.^2));
sp=spec(x, N, wf);
```

7. Literatura

- [1] A.W. Oppenheim, R.W. Schaffer: Digital Signal Processing, Prentice-Hall, 1975.
- [2] LJ. Stanković: Digitalna obrada signala, Naučna knjiga, Beograd 1990.
- [3] L.B. Almedia: "The Fractional Fourier Transform and Time-Frequency Representations", *IEEE Trans. on SP*, Vol. 42, No. 11, Nov. 1994, pp.3084-3091.
- [4] F. Zhang, Y. Q. Chen, G. Bi: "Adaptive Harmonic Fractional Fourier Transform", *IEEE SP Let.*, Vol. 6, No. 11, Nov. 1999, pp.281-283.
- [5] LJ. Stanković: Time-frequency signal analysis, Podgorica, 1999.
- [6] L. Cohen: Time-frequency analysis, Prentice-Hall, 1995.
- [7] Proceedings of IEEE, Special issue on time-frequency analysis, Vol. 84, No. 9, Sept.
- [8] L.Cohen: "Time-frequency distributions-a review", *Proc. IEEE*, vol.77, no.7, July 1989, pp.941-981.
- [9] B.Boashash: "Time-frequency signal analysis", in *Advances in Spectrum Analysis and Array Processing*, vol.1, S.Haykin, Ed. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1991.
- [10] P.Flandrin, B.Escudie: "Time and frequency representation of finite energy signals: a physical property as a result of a Hilbertian condition", *Signal Processing*, vol.2, 1980, pp.93-100.
- [11] F. Hlawatsch, G.F. Bordeaux-Bartels: "Linear and quadratic time-frequency signal representations", *IEEE SP Magazine*, April 1992, pp.21-67.
- [12] D. Gabor: "Theory of communications", *J.IEE*, vol.93, London 1946, pp.423-457.
- [13] J.B.Allen, L.R.Rabiner: "A unified approach to short-time Fourier analysis and synthesis", *Proc. of the IEEE*, vol. 65, no.11, Nov.1977, pp.1558-1564.
- [14] M.H.Ackroyd: "Short-time spectra and time-frequency energy distribution", *J. Acoust. Soc. Am.*, vol.50, 1970, pp.1229-1231.

- [15] J. Jeong, W.J. Williams: "Mechanism of the cross-terms in spectrograms", *IEEE Trans. on SP*, vol.40, no.10, Oct.1992, pp.2608-2613.
- [16] O.Rioul, M.Vetterli: "Wavelets and signal processing", *IEEE Signal Processing Magazine*, Oct.1991, pp.14-38.
- [17] P.E.Wigner: "On the quantum correction for thermodynamic equilibrium", *Phys. Rev.*, vol.40, 1932, pp.246-254.
- [18] J.Ville: "Theorie et applications de la notion de signal analytique", *Cables et Transmission*, vol.2, no.1, 1946, pp.61-74.
- [19] P.Flandrin: "Some features of time-frequency representation of multicomponent signals", *IEEE ICASSP*, 1984, pp.41B.4.1-4.4.
- [20] P.Flandrin, F.Hlawatsch: "Signal representation geometry and catastrophes in the time-frequency plane", in *Mathematics in Signal Processing*, T. Durrani et al eds., Oxford, U.K., Clarendon, 1987, pp.3-14.
- [21] L.Cohen: "Distributions concentrated along the instantaneous frequency", *SPIE, Adv.Sig.Proc., Alg., Arch., and Imp.*, vol.1348, 1990, pp.149-157.
- [22] H.Choi, W. Williams: "Improved time-frequency representation of multicomponent signals using exponential kernels", *IEEE Trans. on ASSP*, vol.73, no.6, June 1989, pp.862-871.
- [23] L.E.Atlas, Y.Zhao, R.J.Marks II: "The use of cone shape kernels for generalized time-frequency representations of nonstationary signals", *IEEE Trans. on Acoust., Speech, Signal Processing*, vol.ASSP-38, 1990, pp.1084-1091.
- [24] LJ. Stanković: "A method for time-frequency signal analysis", *IEEE Trans on SP*, Vol.42, No.1, Jan.1994, pp.225-229.
- [25] LJ. Stanković: "L-class of time-frequency distributions", *IEEE SP Letters*, vol.3, no.1, Jan.1996, pp.22-25.

- [26] L.J. Stanković: “A method for improved distribution concentration in the time-frequency analysis of the multicomponent signals using the L-Wigner distribution”, *IEEE Trans on SP*, vol.43, no.5, May 1995, pp.1262-1268.
- [27] B.Boashash, P.O'Shea: “Polynomial Wigner-Ville distributions and their relationship to time-varying higher order spectra”, *IEEE Trans. on Signal Processing*, vol.42, no.1, Jan.1994, pp.216-220.
- [28] D.Chester: “Discrete Wigner implementations”, in *Proc. of the Int. Symp. Circuits Syst.*, San Jose, CA, May 1986, pp.38-41.
- [29] L.J. Stanković, S. Stanković: “On the Wigner distribution of the discrete-time noisy signals with application to the study of quantization effects”, *IEEE Trans on SP*, vol.42, no.7, July 1994, pp.1863-1867.
- [30] J. Jeong, W.J. Williams: “Alias-free generalized discrete-time time-frequency distributions”, *IEEE Trans. on SP*, vol.40, no.11, Nov.1992, pp.2757-2765.
- [31] I.Djurović, L.J.Stanković: “A virtual instrument for time-frequency analysis”, *IEEE Trans. on Instrumentation an Measurements*, vol.48, no.6, Dec.1999, pp.1086-1092.
- [32] J. Jeong, W.J. Williams: “Kernel design for reduced interference distributions”, *IEEE Trans. on SP.*, vol.40, no.2, Feb.1992, pp.402-412.
- [33] R.G. Baraniuk, D.L. Jones: “A signal dependent time-frequency representation: Optimal kernel design”, *IEEE Trans. on SP*, vol.41, no.4, Apr.1993, pp.1589-1602.
- [34] D.L.Jones, R.G. Baraniuk: “An adaptive optimal-kernel time-frequency representation”, *IEEE Trans. on SP*, vol.43, no.10, Oct.1995, pp.2361-2372.
- [35] R.G. Baraniuk, D.L. Jones: “Signal-dependent time-frequency analysis using radially-gaussian kernel”, *IEEE Trans. on SP*, vol.41, no.3, Mar.1993, pp.263-284.
- [36] R.N.Czerwinski, D.L. Jones: “Adaptive short-time Fourier analysis”, *IEEE SP Let.*, vol.4, no.2, Feb.1997, pp.42-45.

- [37] LJ. Stanković: “The auto-term representation by the reduced interference distributions; The procedure for a kernel design”, *IEEE Trans on SP*, vol.44, no.6, June 1996, pp.1557-1564.
- [38] B. Zhang and S. Sato: “A time-frequency distribution of Cohen’s class with a compound kernel and its application to speech signal processing”, *IEEE Trans. on SP*, vol.42, no.1, Jan.1994, pp.54-64.
- [39] D. Wu, J. Morris: “Time frequency representations using a radial Butterworth kernel”, *Proc. of the IEEE Symp. on TFTSA*, Philadelphia, PA, Oct.1994, pp.60-63.
- [40] M.G.Amin: “Time and lag window selection in the Wigner-Ville distribution”, *IEEE ICASSP*, 1987, pp.1529-1532.
- [41] F.Auger, P.Flandrin: “Improving the readability of time-frequency and time-scale representations by the reassignment method”, *IEEE Trans. on Signal Processing*, vol.43, no.3, May 1995, pp.1068-1089.
- [42] B.Barkat, B.Boashash, LJ.Stanković: “Adaptive window in the PWVD for the IF estimation of FM signals in adaptive Gaussian noise”, *IEEE ICASSP*, 1999, pp.1317-1320.
- [43] P. Flandrin, R.G. Baraniuk, O. Michael: “Time frequency complexity and information”, *Proc. ICASSP*, vol.3, 1994, pp.329-332.
- [44] T.H.Sang, W.J.Williams: “Rényi information and signal dependent optimal kernel design”, *Proc.ICASSP*, vol.2, pp.997-1000,1995.
- [45] W.J. Williams, M.L. Brown, A.O. Hero: “Uncertainty, information and time-frequency distributions”, *SPIE, Adv.Sig.Proc., Alg., Arch., and Imp.*, vol.1566, 1991, pp.144-156.
- [46] LJ.Stanković: “A measure of some time-frequency distributions concentration”, “Time-Frequency Signal Analysis”, edited by B.Boashash, Prentice Hall, 2002.
- [47] D.L. Jones, T.W. Parks: “A high resolution data-adaptive time-frequency representation”, *IEEE Trans on SP*, Vol.38, No.12, Dec.1990, pp.2127-2135.

8. Bibliografija

- [1] L.Stanković, M.Daković, V.Ivanović, "Performance of spectrogram as IF estimator", *Electronics Letters*, June, 2001, Vol.37, No.12, pp. 797-799
- [2] V.Ivanović, M.Daković, I.Djurović, LJ.Stanković, "Instantaneous frequency estimation by using time-frequency distributions", *IEEE ICASSP*, Salt Lake City, May 2001.
- [3] V.Ivanović, M.Daković, I.Djurović, LJ.Stanković, "Performance of quadratic time-frequency distributions as instantaneous frequency estimators", *IEEE Trans. on SP*, accepted for publishing
- [4] M.Daković, LJ.Stanković, Z.Uskoković: "Metod za optimizaciju vremensko-frekvencijskih reprezentacija signala primijenjen na spektrogram", *INFOFEST*, Budva, 2000.
- [5] V.Ivanović, M.Daković, LJ.Stanković: "The exact estimation error analysis in the instantaneous frequency estimation by using quadratic time-frequency distributions", *ETF Journal of Electrical Engineering*, 2000.
- [6] M.Daković, LJ.Stanković, Z.Uskoković: "Energetska mjera koncentracije vremensko-frekvencijskih reprezentacija", *IT MM*, Žabljak, 2000.
- [7] M.Daković, R.Vuković, Ž.Crnjak: "Praćenje stanja viših harmonika u elektroenergetskoj mreži uz pomoć računara", *IT MM*, Žabljak, 2000.
- [8] V.Ivanović, M.Daković, LJ.Stanković: "Analysis of the Instantaneous Frequency Estimation with the Reduced Interference Distributions", *ETF Journal of Electrical Engineering*, 1999.
- [9] V.Ivanović, M.Daković: "Estimation of the instantaneous frequency of a signal using reduced interference distributions", *XLII konferencija ETRAN*, Zlatibor, 1999.
- [10] O.Laković, N.Jauković, B.Lutovac, M.Daković: "Prilog prepoznavanju tonaliteta primjenom neuralnih mreža", *Info Science*, broj 6, 1997.

- [11] N.Jauković, B.Lutovac, M.Daković, O.Laković: “Neural network application for music element recognition”, *NEUREL 97*, Beograd 1997.
- [12] O.Laković, N.Jauković, B. Lutovac, M. Daković: “Prepoznavanje tonaliteta primjenom neuralnih mreža”, *Informacione tehnologije II*, Žabljak, 1997.
- [13] R.Dragović-Ivanović, M.Daković, S.Perović: “Concerning the diode rectifier instruments calibration”, *PRIM 97*, Novi Sad 1997.