

**UNIVERZITET CRNE GORE
ELEKTROTEHNIČKI FAKULTET U PODGORICI**

mr Veselin N. Ivanović

**Vremensko-frekvencijska analiza primijenjena
na optimalno nestacionarno filtriranje sa
hardverskim realizacijama**

doktorska disertacija

Podgorica, jun 2001. godine

Univerzitet Crne Gore

Elektrotehnički fakultet u Podgorici

mr Veselin N. Ivanović

**VREMENSKO-FREKVENCIJSKA ANALIZA PRIMIJENJENA
NA OPTIMALNO NESTACIONARNO FILTRIRANJE SA
HARDVERSKIM REALIZACIJAMA**

doktorska disertacija

Podgorica, jun 2001. godine

*Sjećanju na svog oca, koji je činio sve stvari vrijednim i iskrenim,
Mojoj majci, za neizmjerno požrtvovanje, ljubav i patnju,
Ani, za sve stvari koje čini ljepšim i veselijim,
Mojoj braći, Ćićiju i Ivanu, za nezaboravne trenutke zajedničkog života*

Neizmjernu zahvalnost dugujem mentoru prof. dr Ljubiši Stankoviću. I to ne samo na razumijevanju, strpljenju ili prenesenom znanju. Kada bih se opredijelio za isticanje svih atributa moje zahvalnosti, potrošio bih previše prostora, mnogo više nego što je uobičajeno u ovakvim prilikama. Stoga ću pokušati da izrazim zahvalnost isticanjem svoje sreće što imam priliku raditi sa prof. Stankovićem.

Ovom prilikom se, takođe, želim posebno zahvaliti prof. dr Srđanu Stankoviću, na korisnim savjetima i sugestijama prilikom izrade disertacije. Naročitu zahvalnost dugujem mom dragom drugu dipl. ing Milošu Dakoviću, kolegi i drugu dr Igoru Đuroviću, kao i prof. dr Zdravku Uskokoviću.

Na kraju, želim se zahvaliti dragim prijateljima Jovanu Martinoviću i Pavlu Kadiću na velikoj pomoći prilikom tehničkog sređivanja moje disertacije. Da je ovo izdavačka forma moje disertacije, tada bi se u ime izdavača svakako morao potpisati neko od njih dvojice.

R E Z I M E

U disertaciji su predstavljeni vremensko-frekvencijski metodi korišćeni u analizi visoko nestacionarnih procesa. Analizirani metodi su, kroz disertaciju, međusobno poređeni sa više aspekata. Najprije su predstavljene najčešće upotrebljavane distribucije u svom kontinualnom i diskretnom obliku, sa jednovremenim isticanjem njihovih najznačajnijih osobina, prednosti i nedostataka.

Potom je predložen fleksibilni sistem za vremensko-frekvencijsku analizu signala. Projektovani sistem se zasniva na S-metodu koji pokazuje značajne prednosti u hardverskoj implementaciji, pošto, kao međukorak, u svoju realizaciju, uključuje kratkotrajnu Fourierovu transformaciju ili Harley-evu transformaciju, u praksi često proučavane i upotrebljavane. Sistem je dizajniran u dva oblika: nezavisnom i zavisnom od forme analiziranog signala. Projektovani hardver je, u slučaju primjene aritmetike sa fiksnom tačkom, dobro struktuiran i pouzdan za VLSI implementaciju. Isti hardver može učestvovati u simultanoj realizaciji L-Wignerove distribucije četvrtog reda, kao i u realizaciji polinomialne Wigner-Villeove distribucije četvrtog reda, sa potisnutim efektima interferencije, ne zahtije-vajući dodatno vrijeme za procesiranje signala. Ova osobina čini predloženi hardver veoma atraktivnim i primjenljivim.

Nakon toga je prezentirana analiza uticaja šuma i efekata konačne dužine riječi prilikom implementacije vremensko-frekvencijskih distribucija. Najprije je izvršena analiza uticaja šuma na S-metod za vremensko-frekvencijsku analizu signala. Ovom analizom je unificirana analiza uticaja šuma na dva najznačajnija metoda, spektrogram i Wignerovu distribuciju. Pokazano je da se, u slučaju signala čija frekvencija nije konstantna, S-metodom mogu poboljšati performanse reprezentacije signala sa šumom postignute spektrogramom i Wignerovom distribucijom. Istovremeno se izvode izrazi za srednju vrijednost i varijansu estimatora posmatranih metoda. U narednim izlaganjima je analiziran uticaj šuma na proizvoljnu kvadratnu distribuciju iz Cohenove klase. Pokazano je da rezultati, postignuti minimi-

ziranjem varijanse - jezgrom proizvoljne kvadratne distribucije i dobijeni u slučaju kompleksnog, bijelog, Gaussovog šuma sa nezavisnim realnim i imaginarnim djelovima, ostaju važeći u slučaju realnog šuma i aproksimativno važeći u slučaju analitičkog šuma. Isti zaključci i rezultati su prošireni na slučaj realnog i analitičkog signala sa šumom. Pored toga, izvedeni su izrazi za bias i varijansu estimatora kvadratne distribucije u proizvoljnoj tački vremensko-frekvencijske ravni i to u slučajevima: bijelog stacionarnog šuma, bijelog nestacionarnog šuma i obojenog stacionarnog šuma.

U ostatku ove cjeline je predstavljena analiza uticaja konačne dužine registara na tačnost rezultata postignutih vremensko-frekvencijskim distribucijama. U cilju kvalitativnog poređenja dobijenih rezultata, pronađena je varijansa predloženog modela, definisan je odnos signal-šum kvantizacije, uz, istovremeno, izvođenje odgovarajućih izraza. Posmatrani su slučajevi reprezentacije brojnih vrijednosti u aritmetici sa fiksnom tačkom i u aritmetici sa pomicnom tačkom. Analizirani su diskretni slučajni i diskretni deterministički signali. Pokazano je da najčešće upotrebljavane distribucije sa redukovanim efektima interferencije imaju približno iste performanse s aspekta odnosa signal-šum kvantizacije. Takođe je izведен izraz kojim je povezana dužina registara sa željenim kvalitetom reprezentacije dobijenih rezultata (koji je definisan odnosom signal-šum kvantizacije). Ova relacija može biti iskorišćena u projektovanju odgovarajuće dužine registara, upotrijebljenih u hardverskoj implementaciji vremensko-frekvencijskih algoritama.

Potom je predstavljena opšta analiza performansi kvadratnih distribucija (iz Cohenove klase), upotrijebljenih u estimaciji trenutne frekvencije proizvoljnog frekvencijski modulisanog signala. Izvedeni su izrazi za bias i varijansu estimatora. Distribucije iz ove klase se ponašaju kao estimatori sa nultom sistematskom greškom (tzv. unbiased estimatori), u slučaju signala sa linearnom trenutnom frekvencijom. Međutim, kada trenutna frekvencija nije linearna funkcija vremena, mogu se izvesti suprotni zaključci. Posmatrani su slučajevi bijelog stacionarnog i bijelog nestacionarnog šuma. Kao posebni slučajevi generalne analize, prezentirani su dobro poznati rezultati dobijeni implementacijom Wignerove distribucije i analizom linearog frekvencijski modulisanog signala, kao i implementacijom spektrograma i analizom signala čija se frekvencija može smatrati konstantnom unutar lag-prozora. Pored toga, izveden je izraz za varijansu estimatora u slučaju spektrograma linearog frekvencijski modulisanog signala. Dobijeni izraz je veoma jednostavan, ali i visoko zavisan od analiziranog signala. Ovaj oblik signala je razmatran i u slučaju ostalih često upotrebljavnih distribucija, kao što su Born-Jordanova i Choi-Williamsova distribucija. Izvedeni izrazi su provjereni statistički. Pokazano je da performanse distribucija sa redukovanim efektima interferencije prevazilaze performanse Wignerove distribucije, ali samo u slučajevima konstantne trenutne frekvencije ili signala sa malim promjenama trenutne frekvencije. Na kraju cjeline je predstavljen i detaljno analiziran adaptivni algoritam za estimaciju trenutne frekvencije posmatranog signala.

Na kraju je analizirano vremenski-promjenljivo filtriranje nestacionarnih signala maskiranih aditivnim šumom. Takođe je predložena njegova efikasna hardverska realizacija. Posmatrano je vremenski-promjenljivo filtriranje bazirano na Wignerovoj distribuciji i definisano primjenom Weylove korespondence. Analizirano je procesiranje frekvencijski modulisanih signala sa šumom zasnovano na jednoj poznatoj realizaciji posmatranog procesa. Predstavljen je algoritam za određivanje funkcije oslonca filtra u vremensko-frekvencijskoj ravni. On se bazira na estimaciji trenutne frekvencije analiziranog signala. Teorija je primijenjena na filtriranje monokomponentnih i multi-komponentnih signala. Spektrogram i S-metod su upotrijebljeni kao veoma snažna sredstva za određivanje funkcije oslonca u drugom slučaju. Ovi metodi, kombinovani sa prezentiranim algoritmom, omogućavaju efikasno filtriranje miltikomponentnih signala. Pored toga, projektovan je hardver neophodan za implementaciju optimalnog nestacionarnog filtra u realnom vremenu. Predložena hardverska realizacija upotrebljava fleksibilni sistem dizajniran za implementaciju vremensko-frekvencijskih metoda u drugoj cjelini disertacije. Pored toga, analiziran je govorni signal sa šumom, snimljen u hands-free telefonskim sistemima prilikom vožnje automobilom.

Teorijska razmatranja su potkrijepljena nizom numeričkim primjera u svim poglavljima disertacije.

S U M M A R Y

The dissertation presents the time-frequency methods used in analysis of highly nonstationary processes. The considered methods are mutually compared in many aspects throughout the dissertation. First, we present the commonly used distributions in their continuous and discrete forms, with simultaneous emphasis of their significant properties, advantages and shortcomings.

Then, a flexible system for time-frequency signal analysis is proposed. It is based on the S-method which has the significant advantage in implementation since it involves, as a key intermediate step, the Short time Fourier transform or the Hartley transform which have been widely studied and commonly used in practice. Signal invariant and signal dependent system forms are designed. Hardware design, for the fixed-point arithmetic, is well structured and suitable for VLSI implementation. The same hardware, without additional time requirements, may be shared for the simultaneous realization of the fourth order L-Wigner distribution, as well as for the realization of the cross-terms free fourth order polynomial Wigner-Ville distribution. This property makes the proposed hardware very attractive and applicable.

After that, an analysis of the noise influence and the finite word-length effects in the implementation of distributions are presented. At the beginning, an analysis of S-method of noisy signals is performed. Using the S-method for time-frequency signal analysis, the influence of noise on two most important distributions (spectrogram and Wigner distribution) is analyzed in a unified manner. It is also shown that, for signals whose instantaneous frequency is not constant, an improvement over the spectrogram and the Wigner distribution performance in a noisy environment may be achieved by using the S-method. The expressions for mean and variance are derived. In the following part of Chapter III, the analysis of the noise influence to the arbitrary quadratic representation from Cohen class is done. It is shown that the results for the minimum variance kernel, obtained for the complex Gaussian white noise with independent real and

imaginary parts case, remain valid for real noise and approximately valid for analytic noise. These results are extended to the real and analytic noisy signal case. In addition, the exact expressions for the bias and variance for each point in time-frequency plane and the following kinds of noise: stationary white noise, nonstationary white noise and colored stationary noise are given.

In the rest of Chapter III, an analysis of the finite register length influence on the accuracy of results obtained by the time-frequency distributions is presented. In order to measure quality of the obtained results, the variance of the proposed model is found, signal-to-quantization noise ratio is defined, and appropriate expressions are derived. Floating-point and fixed-point arithmetic are considered, with the analysis of discrete random and discrete deterministic signals. It is shown that commonly used reduced interference distributions exhibit similar performance with respect to the signal-to-quantization noise ratio. We have also derived the expressions establishing the relationship between the number of bits and the required quality of representation (which is defined by the signal-to-quantization noise ratio), which may be used for register length design in hardware implementation of time-frequency algorithms.

In Chapter IV, general performance analysis of the shift covariant class of quadratic time-frequency distributions as instantaneous frequency estimators, for an arbitrary frequency modulated signal is presented. Expressions for the estimation bias and variance are derived. This class of distributions behaves as an unbiased estimator in the case of signals with a linear instantaneous frequency. However, when the IF is not a linear function of time then the estimate is biased. Cases of white stationary and white nonstationary additive noises are considered. The well-known results for the Wigner distribution and linear frequency modulated signal, and the spectrogram of signals whose instantaneous frequency may be considered as a constant within the lag window, are presented as special cases. In addition, we have derived the variance expression for the spectrogram of a linear frequency modulated signal that is quite simple but highly signal dependent. This signal is considered in the cases of other commonly used distributions, such as Born-Jordan and Choi-Williams. The derived expressions are checked statistically. It has been shown that the reduced interference distributions outperform the Wigner distribution, but only in the case when the instantaneous frequency is constant or its variations are small. At the end of Chapter IV, the adaptive algorithm for the instantaneous frequency estimation is represented and analyzed in detail.

Finally, in Chapter V the time-varying filtering of the nonstationary noisy signals is presented and its efficient hardware realization is proposed. Here we consider the Wigner distribution based time-varying filtering form defined by using the Weyl correspondence. The processing of noisy frequency modulated signals, based on a single noisy signal realization is analyzed. An algorithm for the determination of the filters' region of support in time-frequency plane is presented. It is based on the estimation of the instantaneous frequency of the analyzed signal. The theory is applied on the filtering of monocomponent and multicomponent noisy signals. The spectrogram and the S-method are used as a

powerfull tools for the filters' region of support estimation in the multicomponent signals case. These distributions, combined with the presented algorithm, enable efficient time-varying filtering of these signals. At the end, the hardware necessary for the real-time implementation of the optimal nonstationary filtering is designed. This hardware uses the flexible system for the time-frequency algorithms implementation, proposed in Chapter II. In addition, the noisy speech signal recorded in the hands-free telephone systems is analyzed.

The theoretical development is supported by an abundance of numerical examples throughout the dissertation.

SADRŽAJ

Rezime	iii
Summary	vi
 Uvod	 1
 I glava: Vremensko-frekvencijska analiza signala - metodi za analizu, prednosti i nedostaci	 5
I.1. Kratkotrajna Fourierova transformacija i njena energetska verzija	8
I.2. Kvadratne vremensko-frekvencijske distribucije	11
I.3. Lokalni autokorelacioni metod	13
I.4. Wignerova distribucija i njene modifikacije	13
I.5. S-metod za vremensko-frekvencijsku analizu signala	15
I.6. Generalisana Cohenova klasa kvadratnih distribucija	19
I.7. Vremensko-frekvencijske distribucije: pozadina i notacija	23
I.8. Distribucije za redukovanje interferencije – RID distribucije	29
I.9. Distribucije višeg reda – L-Wignerova distribucija	32
I.10. L-klasa distribucija	35
I.11. Diskretni oblici vremensko-frekvencijskih reprezentacija	36
I.12. Eksperimentalni rezultati	43

II glava: Projektovanje hardvera za VLSI implementaciju vremensko-frekvencijskih metoda	46
II.1. Teorijska pozadina	47
II.2. Hardverska implementacija S-metoda bazirana na STFT	48
Prozor nezavisan od oblika analiziranog signala	48
Prozor zavisan od oblika analiziranog signala	50
II.3. Hardverska implementacija S-metoda bazirana na Hartley-evoj transformaciji	52
Prozor nezavisan od oblika analiziranog signala	54
Prozor zavisan od oblika analiziranog signala	54
II.4. Hardverska implementacija distribucija višeg reda	57
L-Wignerova distribucija	57
Polinomialna Wigner-Villeova distribucija	58
II.5. Analiza greške	58
 III glava: Analiza uticaja šuma i efekata ograničene dužine registara pri hardverskoj realizaciji aciji vremensko-frekvencijskih metoda	60
III.1. Analiza uticaja šuma na diskretni S-metod	61
III.1.1. Analiza signala zahvaćenog šumom	61
III.1.2. Srednja vrijednost estimatora S-metoda	62
III.1.3. Varijansa estimatora S-metoda	64
III.1.3.1. Realni šum	66
III.1.4. Varijansa kod spektrograma i kod pseudo WD	67
III.1.5. Primjer sinusoidalnog signala $f(n)$	69
III.1.6. Linearni frekvenčni modulisani signal $f(n)$	72
III.1.7. Numerička analiza	77
III.2. Analiza uticaja šuma na distribucije iz Cohenove klase	83
III.2.1. Analiza šuma	83
III.2.1.1. Kompleksni šum	84
III.2.1.2. Realni šum	86
III.2.1.3. Analitički šum	87
III.2.2. Analiza signala sa šumom	91
III.2.2.1. Kompleksni šum	92

III.2.2.2. Realni šum	92
III.2.2.3. Analitički šum	94
III.3. Varijansa estimatora Cohenove klase u tački TF ravni	96
III.3.1. Varijanse estimatora najznačajnijih distribucija	99
III.3.2. Numerička realizacija	100
III.4. Efekti ograničene dužine registara prilikom implementacije vremensko-frekvencijskih distribucija	101
III.4.1. Analiza efekata kvantizacije	103
III.4.2. Efekti kvantizacije nastali implementacijom aritmetike sa pomičnom tačkom	104
A. Slučajni signal $f(n)$	106
B. Deterministički signal $f(n)$	110
III.4.3. Efekti kvantizacije nastali implementacijom aritmetike sa fiksном tačkom	112
A. Slučajni signal $f(n)$	114
B. Deterministički signal $f(n)$	114
IV glava: Estimacija trenutne frekvencije primjenom vremensko-frekvencijskih distribucija	116
IV.1. Teorijska pozadina i definicija problema	117
IV.2. Analiza greške estimacije	119
Varijansa estimatora trenutne frekvencije	121
Bias estimatora trenutne frekvencije	124
IV.3. Specijalni slučajevi kvadratnih distribucija	125
1. Pseudo Wignerova distribucija	125
2. Spektrogram	126
3. Zaobljena pseudo Wignerova distribucija	129
IV.4. Numerička implementacija	129
IV.5. Adaptivni algoritam za estimaciju trenutne frekvencije signala upotrebom vremensko-frekvencijskih metoda	131
IV.5.1. Numerička implementacija algoritma sa primjenama	141
V glava: Optimalno nestacionarno filtriranje bazirano na vremensko-frekvencijskoj analizi	146
V.1. Definicija optimalnog nestacionarnog filtriranja	147
V.2. Pseudo forma optimalnog nestacionarnog filtriranja	153

V.3.	Određivanje funkcije oslonca	154
V.4.	Vremenski-promjenljivo filtriranje monokomponentnih signala	160
V.5.	Vremenski-promjenljivo filtriranje multikomponentnih signala	163
V.6.	Numerička implementacija	166
V.7.	Hardverska implementacija optimalnog nestacionarnog filtra	167
V.8.	Filtriranje govornog signala u hands-free telefonskim sistemima	170

Zaključak	175
------------------	------------

References	179
-------------------	------------

List of Publications	193
-----------------------------	------------

U V O D

Poznato je da se stacionarni signali ravnopravno analiziraju i obrađuju u vremenskom i u frekvencijskom domenu. Suprotno tome, signali sa veoma nestacionarnim karakteristikama se značajno efikasnije analiziraju u združenom vremensko-frekvencijskom domenu, metodima razvijanim u vremensko-frekvencijskoj analizi, [11], [16], [19], [29], [30]-[32], [34]-[39], [63]-[65], [75], [102], [103], [141], [165], [194]. Vremensko-frekvencijska analiza predstavlja veoma izučavanu oblast sa ciljem što pogodnijeg predstavljanja vremenskog ponašanja spektralnog sastava posmatranog signala. Ova disciplina pronalazi svoju punu i adekvatnu primjenu u mnogim praktičnim primjenama obrade signala - radari, govor, biomedicina, seismologija... Njen osnovni cilj je razvijanje matematičkih ideja potrebnih za razumijevanje vremenski promjenljivog spektralnog sastava nestacionarnih signala. U tom pravcu najprije se pošlo od kratkotrajne Fourierove transformacije, [2], [10], [105], [108], kojom se analizira signal duž podjednakih vremenskih intervala. Ovom transformacijom se analiziraju procesi u relativno kratkim vremenskim intervalima. Međutim, ukoliko se promjene u spektru signala dešavaju brže, posmatrani vremenski intervali se moraju značajno skraćivati. Drugim riječima, ovim metodom se nameće neophodnost kompromisnog izbora između dobre vremenske i dobre frekvencijske rezolucije, [35], [37], [65], [129], [141]. Ova činjenica je ukazala na vjerovatnu neadekvatnost primjene kratkotrajne Fourierove transformacije u analizi nestacionarnih signala. U cilju prevazilaženja nametnutih problema razvio se veliki

broj vremensko-frekvencijskih distribucija. Posebno su značajne bilinearne distribucije koje pripadaju tzv. generalisanoj Cohenovoj klasi, [35], [65]. Iako se kod ove klase susrijećemo sa gubitkom veoma značajne osobine linearnosti (koja je karakteristika kratkotrajne Fourierove transformacije), od izuzetnog je praktičnog značaja njihova velika prednost u analizi nestacionarnih signala. Ovo ih čini veoma upotrebljivim i najčešće upotrebljavanim sredstvima za analizu spektralnog sastava posmatranih signala. Prva definisana distribucija iz ove klase je Wignerova distribucija, [186]. Ona je poslužila kao osnova na kojoj je Cohen generalisao svoju klasu distribucija. Funkcija po kojoj je izvršena ova generalizacija je tzv. funkcija jezgra. Za razne oblike funkcije jezgra dobijaju se različite distribucije koje pripadaju Cohenovoj klasi. Optimalnost ovih distribucija se može posmatrati sa više aspekata. Neki od njih će biti posmatrani u ovoj disertaciji - uticaj šuma dodatog analiziranom signalu na njegovu vremensko-frekvencijsku reprezentaciju, [8], [62], [70], [99], [103], [151], [152], [154], [157], [158], kao i na estimaciju njegovih pojedinih parametara (trenutna frekvencija), [17], [38], [80]-[85], [149], [153]-[155]. Ova analiza može biti primijenjena u mnogim drugim oblastima i naučnim istraživanjima. U disertaciji će biti posmatrana njena primjena u definisanju optimalnog nestacionarnog filtriranja. Takođe će biti predložen hardver za realizaciju S-metoda za vremensko-frekvencijsku analizu signala. Isti hardver će se, uz minimalne dopune, iskoristiti za realizaciju distribucija višeg reda, ne zahtijevajući dodatno vrijeme za procesiranje signala (u poređenju sa slučajem implementacije S-metoda).

Disertacija je organizovana u nekoliko cjelina.

Težište izlaganja u prvoj cjelini će biti na analizi nestacionarnih signala i pregledu najznačajnijih i najčešće upotrebljavnih vremensko-frekvencijskih metoda, uz istovremeno izvođenje njihovih najbitnijih karakteristika. Biće posmatrane linearne, kvadratne i distribucije višeg reda, zajedno sa njihovim realizacijama u diskretnom domenu. Definicija i osobine distribucija koje pripadaju klasi kvadratnih distribucija za redukovanje interferencije biće posebno naglašene. Naime, efekti interferencije predstavljaju jedan od najznačajnijih nedostataka kvadratnih distribucija, kao što koncentrisanje energije signala na njegovoj trenutnoj frekvenciji (u vremensko-frekvencijskoj ravni) predstavlja jednu od njihovih najznačajnijih osobina. Efekti interferencije se ističu prilikom analize multikomponentnih signala, uslijed kvadratne zavisnosti posmatrane distribucije od analiziranog signala. Kao metod kojim se postiže značajno redukovanje efekata interferencije predstavljen je S-metod, u dva oblika - nezavisnom i zavisnom od oblika analiziranog signala. Ovaj metod se definiše posmatranjem Wignerove distribucije multikomponentnih signala, odnosno analizom postojanja i međusobnog položaja auto- i kros-komponenti u njenom frekvencijskom domenu.

Razvitkom nauke i tehnologije nameće se potreba za velikom brzinom implementacija vremensko-frekvencijskih metoda u realnom vremenu, [10], [18], [92], [112], [171]. Slijedeći ovaj trend, u drugoj cjelini disertacije se predlaže fleksibilan hardver za VLSI implementaciju analiziranih metoda. Hardver će biti dizajniran u cilju praktične implementacije S-metoda za vremensko-frekvencijsku analizu signala. Kao međukorak u svojoj realizaciji (bilo

hardverskoj ili softverskoj), S-metod upotrebljava najčešće analizirane i veoma često realizovane transformacije, kratkotrajnu Fourierovu transformaciju i Hartley-evu transformaciju. Isti hardver će biti upotrijebljen za implementaciju distribucija višeg reda, čime se ne intezivira potrebno vrijeme procesiranja signala, neophodno za implementaciju S-metoda. Time se postiže značajan napredak u poređenju sa softverskom realizacijom distribucija višeg reda, kada se dobija značajno komplikovanija i vremenski zahtjevnija realizacija u poređenju sa kvadratnim metodima.

Dalja izlaganja u doktorskoj disertaciji će biti posvećena analizi uticaja šuma. Svi realni signali su, u manjoj ili većoj mjeri, zahvaćeni aditivnim šumom, tako da njegov uticaj na pojedine vremensko-frekvencijske distribucije predstavlja mogući aspekt sa kog se one mogu posmatrati. Analiza uticaja šuma na vremensko-frekvencijske reprezentacije, kao kvadratne funkcije analiziranog signala, je složenija u odnosu na linearne funkcije, ali samim tim i značajnija. Ona se kreće u dva pravca: analiza uticaja šuma na same vremensko-frekvencijske metode, i analiza uticaja šuma na pojedine parametre posmatranog signala (trenutna frekvencija, grupno kašnjenje, ...). U disertaciji će biti posmatrana oba pravca.

Treća cjelina disertacije obuhvata analizu uticaja šuma i efekata ograničene dužine riječi na metode upotrebljavane u vremensko-frekvencijskoj analizi. Najprije će biti posmatran uticaj šuma na S-metod. Time se unificira analiza uticaja šuma u slučajevima najznačajnijih bilinearnih vremensko-frekvencijskih transformacija (Wignerove distribucije i spektrograma). Potom će se izvršiti analiza uticaja šuma na ostale distribucije iz generalisane Cohenove klase. Tom prilikom će biti, po odgovarajućim kriterijumima, upoređeni rezultati dobijeni S-metodom sa rezultatima dobijenim marginalnim oblicima S-metoda (Wignerovom distribucijom i spektrogramom), kao i rezultati dobijeni pojedinim distribucijama iz Cohenove klase. Veoma interesantan oblik bijelog šuma nastaje upotrebom registara konačne dužine riječi prilikom hardverske realizacije pojedinih distribucija. Iako su izražena nastojanja ka hardverskim realizacijama sa registrima veoma velike dužine, uvijek postoji potreba za analizom uticaja njihove, ipak, konačne dužine na tačnost dobijenih rezultata. Razlog tome su često veliki broj operacija i, kao posljedica toga, značajno akumuliranje greške. Naime, registri ograničene dužine unose kvantizacionu grešku u sistem, kao što i zaokruživanje rezultata aritmetičkih operacija rezultira greškom. Uticaj ovih grešaka na konačne rezultate zavisi od odabrane reprezentacije brojnih vrijednosti (fixed- i floating-point aritmetika). Aproksimiranjem napravljene greške bijelim šumom, signal smješten u registru konačne dužine možemo, matematičkim putem, predstaviti zbirom tačnog signala i aditivnog bijelog šuma. Analiza efekata kvantizacije zauzima značajan prostor prilikom zaokruživanja izlaganja u drugoj cjelini disertacije.

Sljedeća cjelina je posvećena trenutnoj frekvenciji i njenoj estimaciji. Ova atraktivna tema je često predmet proučavanja značajnih naučnih studija i radova posvećenih analizi signala. Naime, vremensko-frekvencijska analiza predstavlja veoma interesantan prilaz estimaciji trenutne frekvencije analiziranog signala. Osnova za primjenu vremensko-frekvencijskih metoda u estimaciji trenutne frekvencije je njihova osobina ‘prvog momenta’. Prisustvo šuma, međutim, značajno degradira estimaciju ‘prvog momenta’ uslijed odsustva usrednjavanja u njegovoj definiciji.

Alternativa ovom prilazu je pronalaženje maksimuma vremensko-frekvencijske reprezentacije. Preciznije, estimacija trenutne frekvencije se temelji na najznačajnijoj osobini vremensko-frekvencijskih metoda, koncentrisanju energije signala na njegovoj trenutnoj frekvenciji. U disertaciji će biti prezentirana upotreba kvadratnih distribucija u određivanju trenutne frekvencije. Biće poredeni najčešće upotrebljavani metodi (spektrogram i Wignerova distribucija) sa najznačajnjim distribucijama za redukovanje interferencije. Za razliku od dosad prezentiranih rezultata u slučaju spektrograma (slučaj konstantnog frekvenčijski-modulisanog (FM) signala), u disertaciji će biti prestavljeni bias i varijansa greške estimacije, dobijeni analizom bilo kog oblika FM signala. Takođe će biti predstavljen algoritam za estimaciju trenutne frekvencije distribucijama sa adaptivnom i vremenski-promjenljivom širinom prozora, upotrijebljenog u njihovoј definiciji. Metodom se minimizira srednja kvadratna greška estimatora u slučaju diskretnih parametara optimizacije. Tom prilikom se upotrebljava samo izračunata asimptotska vrijednost varijanse estimatora.

Nakon sprovedenih analiza uticaja šuma na vremensko-frekvencijsko predstavljanje signala i njegovu trenutnu frekvenciju, u disretaciji se razmatra primjena izvedene analize u optimalnom nestacionarnom filtriranju, [24], [66], [67], [88]-[90], [143]. Vremensko-frekvencijskom analizom se postiže veoma efikasna obrada signala sa vrlo nestacionarnim karakteristikama. S druge strane, u definiciji vremenski-promjenljivih spektara postoje izvjesni stepeni slobode, tako da se nude mnoge definicije i oblici rješenja vremenski-promjenljivih filtera. U disertaciji će biti posmatrano vremenski-promjenljivo filtriranje definisano po analogiji sa Wignerovom distribucijom i uz primjenu Weylovog predstavljanja funkcije oslonca. Analizirat će se uticaj širine funkcije oslonca s aspekta zadovoljenja poželjnih osobina vremenski-promjenljivog filtriranja i predložiti njen adekvatan izbor u slučaju filtriranja signala sa veoma nelinearnom trenutnom frekvencijom. Predstaviti će se algoritam za efikasno određivanje funkcije oslonca nestacionarnog filtra u vremensko-frekvencijskoj ravni. Izvedena analiza će se, potom, proširiti na slučaj multikomponentnih signala maskiranih šumom. Efikasno vremenski-promjenljivo filtriranje multikomponentnih signala se postiže primjenom spektrograma i S-metoda, kombinovanih sa ranije predstavljenim metodima razvijenim za slučaj monokomponentnih signala. Teorija će biti ilustrovana na realnim signalima. Na koncu će biti predložen hardver za realizaciju optimalnog nestacionarnog filtra. Kao veoma interesantan primjer filtriranja nestacionarnog multikomponentnog signala, analizirat će se govorni signal maskiran aditivnim šumom.

VREMENSKO-FREKVENCIJSKA ANALIZA SIGNALA

- METODI ZA ANALIZU, PREDNOSTI I NEDOSTACI

Objekat i cilj vremensko-frekvencijske (TF) analize je opisivanje promjena spektralnog sastava signala u vremenu, odnosno razvijanje matematičkih metoda potrebnih za razumijevanje vremenski promjenljivog spektralnog sastava signala. Njen osnovni zadatak se sastoji u pronalaženju odgovarajućih dvodimenzionalnih transformacija za predstavljanje signala po vremenu i po frekvenciji istovremeno. Aplikativnu analizu predstavljenog problema je, možda, najjednostavnije opisati posmatrajući dva često analizirana procesa: sunčevu svjetlost u toku dana, od izlaska do zalaska sunca, i govorni signal. Poznata je činjenica da se Fourierovom analizom vrši dekompozicija analiziranog signala, čime se dobijaju komponente koje se nalaze na pojedinačnim frekvencijama, uz istovremeno određivanje njihovog relativnog inteziteta. Na taj način dobijamo sadržaj svih spektralnih komponenti signala, bilo svjetlosnog ili govornog. Međutim, ovako dobijeni spektar nije vremenski raspoređen, odnosno njime ne dobijamo nikakvu informaciju o vremenskom trenutku nastajanja pojedine spektralne komponente. Drugim riječima, Fourierovom transformacijom (FT) se ne obezbjeđuje vremenska raspodjela frekvencijskog sadržaja signala. Ovo je značajan nedostatak u mnogim praktičnim primjenama obrade signala (radari, govor, biomedicina, seizmologija, ...) kod kojih je raspodjela

spektralnih komponenti u vremenu podjednako značajna kao i njihovo postojanje. Ovim nedostacima ćemo posvetiti posebnu pažnju, posmatrajući dva gore pomenuta signala.

Posmatrajući svjetlost prilikom zalaska sunca, zaključujemo da se njene spektralne komponente u tim trenucima značajno razlikuju od onih koje se primjećuju većim dijelom dana. Odnosno, spektralni sastav se značajno razlikuje prilikom zalaska sunca od istog koji se dobija u trenucima kada se sunce nalazi, npr., u svom zenitu. Međutim, ovaj proces je, po prirodi, relativno spor, tako da neće biti značajnijih promjena prilikom posmatranja signala svjetlosti u jednom relativno kratkom vremenskom intervalu od desetak minuta. Stoga je razumno analizirati ovakav proces u relativno kratkim vremenskim intervalima (od po 10 minuta), tj. odsjecanjem vremenski zavisnom funkcijom prozora stvarati uslove za procesiranje novodobijenog (izdijeljenog) signala svjetlosti Fourierovom transformacijom.

Ukoliko posmatramo proces sa bržim promjenama spektra, zaključujemo da bi se odabrani vremenski interval posmatranja, u kom se signal može smatrati stacionarnim, morao znatno korigovati proporcionalnim smanjivanjem. To bi istovremeno dovelo do značajnog sužavanja funkcije prozora kojom se dijeli analizirani proces. Prethodna razmišljanja predstavljaju osnovu za TF analizu i ujedno definišu standardne matematičke metode za proučavanje vremenski-promjenljivih spektara - **kratkotrajnu Fourierovu transformaciju** ('short-time Fourier transform' - STFT) i **spektrogram** (SPEC), kao varijaciju kratkotrajne FT.

Sama potreba za sužavanjem funkcije prozora pri posmatranju signala sa bržim promjenama spektralnog sastava ukazuje na značajne nedostatke nastale primjenom prethodnog metoda u analizi signala koji su na pojedinim svojim djelovima manje ili više stacionarni. Uz to, sužavanjem funkcije prozora se pogoršava frekvencijska rezolucija ovog metoda pošto se ovom modifikacijom širi spektar posmatranog signala, [2], [35], [37], [65], [126], [129]. Ovim se, već na startu, nameće neophodnost kompromisnog izbora između dobre vremenske i frekvencijske rezolucije.

Možda je, istorijski gledano, prvi interesantan primjer signala čiji se frekvencijski sadržaj mijenja veoma brzo i na kompleksan način - ljudski govor. U cilju njegove adekvatne analize razvijen je 40-tih godina ovog vijeka zvučni spektrogram, [35], [37], koji je, daljim razvojem, veoma brzo postao moćno sredstvo za analizu nestacionarnih procesa. S vremenom je razvijen veliki broj različitih transformacija koje, kao dvodimenzione funkcije vremena i frekvencije, predstavljaju gustine raspodjele energije posmatranog signala u TF ravni. Danas se opravdano postavlja pitanje postojanja idealne transformacije. Naime, ako postoji - koji je to oblik, u suprotnom - koja je od poznatih distribucija njoj najbliža. Odgovor na ovo pitanje još uvijek nije dat. Sve poznate transformacije, zavisno od vrste i od oblika zadatog problema, imaju svoju mogućnost adekvatne primjene.

U literaturi, [35], [37], [65], je uobičajeno da se vremensko-frekvencijske transformacije grubo klasifikuju u tri kategorije: **linearne, kvadratne** (ili takozvane **bilinearne**) **distribucije i distribucije višeg reda**.

Transformacije iz prve grupe se nazivaju linearnim zbog svoje osobine linearnosti koja je lako uočljiva iz same njihove definicije i predstavlja veoma važno svojstvo u analizi signala. Najvažniji predstavnik ove grupe je STFT, koju je prvi definisao Gabor, [57]. Osnovni nedostatak ove transformacije predstavlja protivrječnost pri izboru dobre vremenske i frekvencijske rezolucije. U posljednje vrijeme se definiše **Wavalet transformacija**, [35], [37], takođe iz klase linearnih transformacija. Obje ove transformacije imaju svoje energetske verzije: **spekrogram** i **skalogram**, respektivno.

Drugu grupu čine kvadratne distribucije. Svoje ime dobijaju po analogiji sa funkcijom raspodjele vjerovatnoće koja je višedimenzionala funkcija. Iako se kod distribucija iz ove klase susrijećemo sa gubitkom važne osobine linearnosti, od izuzetnog je značaja njihova velika prednost u analizi nestacionarnih procesa i zanemariva (u odnosu na linearne transformacije) protivrječnost pri izboru parametara koji utiču na kvalitet vremenske i frekvencijske rezolucije. Ove osobine preporučuju kvadratne distribucije kao osnovne, referentne i najčešće upotrebljavane metode u analizi spektralnog sastava nestacionarnih signala. Sve distribucije iz ove grupe pripadaju takozvanoj generalisanoj Cohenovoj klasi distribucija, [35], [37]. Najznačajniji predstavnici Cohenove klase su: **Wignerova distribucija (WD)** i **Spekrogram (SPEC)**. Napomenimo još i to da se WD, zajedno sa većinom kvadratnih distribucija, po prvi put definiše u cilju rješavanja problema iz kvantne mehanike.

Pored problema izbora adekvatne vremenske i frekvencijske rezolucije, veliki broj naučnih radova se bavi problemom postojanja i redukovanje efekata interferencije kod kvadratnih distribucija, [11], [35], [37], [63], [74]-[76], [126]. Naime, posljedica bilinearne prirode ovih transformacija je da se, pored komponenti signala na svojim trenutnim frekvencijama (auto-članovi), prilikom analize multikomponentnih signala uočava prisustvo komponenti signala nastalih međusobnom interferencijom auto-članova, [74]-[76], [126]. Metodi kojima se postiže redukovanje efekata interferencije čine posebnu klasu distribucija - distribucije za redukovanje interferencije (RID distribucije), [11], [29], [75], [194]. Pored distribucija iz ove klase, predlaže se, [126], S-metod za TF analizu signala kojim se postižu ponajbolji rezultati u potiskivanju efekata interferencije. Njime se, u slučaju fizičke razdvojenosti auto-članova u TF ravni, postiže potpuno eliminisanje efekata interferencije, uz jednovremeno predstavljanje multikomponentnih signala sumom WD njihovih auto-članova, [126], [167], redukovanje uticaja šuma na predstavljanje signala, [152], kao i značajno skraćenje vremena računanja, [126]. Pored toga, S-metod je veoma jednostavnim izrazom povezan sa osnovnom vremensko-frekvencijskom transformacijom - STFT, [126], što ga čini veoma interesantnim i jednostavnim za praktičnu implementaciju, [171].

I.1. KRATKOTRAJNA FOURIEROVA TRANSFORMACIJA I NJENA ENERGETSKA VERZIJA

Kao što je apsolvirano u uvodnom izlaganju, definicija kratkotrajne FT (STFT) počiva na principu Fourierove analize dijela posmatranog signala, odsječenog datom funkcijom prozora, u određenom trenutku t (slika I.1):

$$STFT_f(t, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) w^*(\tau - t) e^{-j\omega\tau} d\tau. \quad (\text{I.1})$$

U posljednjoj jednačini $w^*(\tau)$ predstavlja konjugovano-kompleksnu funkciju prozora. Pomjerajući prozor duž signala, u stvari, vršimo skeniranje signala dobijajući time vremensku predstavu njegovih spektralnih komponenti.

Osobine STFT se mogu izvesti iz njene definicije i osobina FT. Najznačajnije od njih su: osobina linearnosti, pomjeranja po vremenu i modulisanje signala.

Nemogućnost kompromisnog izbora širine prozora $w(\tau)$ u cilju postizanja zadovoljavajuće vremenske i frekveničiske rezolucije se smatra osnovnim nedostatkom STFT, [2]. Ilustrovat ćemo ovaj efekat analizom multikomponentnog signala predstavljenog sumom dva δ-impulsa i dva prostoperiodična signala:

$$f(t) = \delta(t - t_1) + \delta(t - t_2) + e^{j\omega_1 t} + e^{j\omega_2 t}. \quad (\text{I.2})$$

Jednostavnim transformacijama dobijamo STFT signala $f(t)$,

$$STFT_f(t, \omega) = w(t_1 - t)e^{-j\omega t_1} + w(t_2 - t)e^{-j\omega t_2} + W(\omega - \omega_1)e^{-j(\omega - \omega_1)t} + W(\omega - \omega_2)e^{-j(\omega - \omega_2)t}. \quad (\text{I.3})$$

Pretpostavimo

- da je $w(\tau)$ pravougaoni prozor širine T , odnosno: $w(\tau)=0$ za $|\tau|>T/2$,
- da se spektar funkcije prozora nalazi u domenu glavne latice, $W(\omega)=0$ za $|\omega|>2\pi/T$.

Iz (I.3) i uvedenih pretpostavki zaključujemo da je dva kratkotrajna signala (δ-impulsa) moguće razdvojiti u vremenskom domenu ukoliko je: $|t_1 - t_2| > T = d$ (vremenska rezolucija), tj. dva prostoperiodična signala u frekveničkom domenu ukoliko je: $|\omega_1 - \omega_2| > 4\pi/T = D$ (frekvenička rezolucija). Uočimo da je proizvod vremenske i frekveničke rezolucije konstantan i da, u slučaju prepostavljenog pravougaonog prozora $w(\tau)$, iznosi $Dd=4\pi$. Drugim riječima, poboljšavanjem rezolucije u jednom postižemo obrnuto proporcionalan efekat u drugom domenu, tako da se, u ovom slučaju, nameće zaključak o nemogućnosti jednovremenog postizanja idealne rezolucije u oba domena.

Za različite oblike funkcije prozora dobijaju se različite konstante (u našem primjeru ona iznosi 4π). Najmanja se dobija primjenom Gaussovog prozora, [35], [37], i iznosi $1/2$. Izvedenom činjenicom, o konstantnosti proizvoda

vremenske i frekvencijske rezolucije, sa svojom minimalnom vrijednošću - $1/2$, $Dd \geq 1/2$, [35], [37], [65], se, u analizi signala, definiše *princip neodređenosti*.

Interesantno je zaključiti da li STFT zadovoljava osobinu reverzibilnosti. U tom cilju integralimo jednačinu (I.1) po vremenu. Označavajući sa $\int_{-\infty}^{\infty} w^*(\tau-t)dt = W^*(0) = M_w$ konstantu zavisnu od oblika upotrijebljenog prozora, pokazujemo da analizirani signal može biti rekonstruisan na osnovu STFT sa tačnošću do kompleksne konstante,

$$f(\tau) = \frac{1}{2\pi M_w} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} STFT_f(t, \omega) e^{j\omega\tau} dt d\omega. \quad (\text{I.4})$$

Energetska verzija STFT - **spektrogram** (SPEC) se definiše kvadratom modula STFT, [2], [35], [37], [65]:

$$SPEC_f(t, \omega) = |STFT_f(t, \omega)|^2 = \left| \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) w^*(\tau-t) e^{-j\omega\tau} d\tau \right|^2. \quad (\text{I.5})$$

Uočimo, odmah, njegov veoma bitan nedostatak - gubitak osobine linearnosti, i kao posljedicu toga, pojavu efekata interferencije pri analizi multikomponentnih signala. Naime, u ovom slučaju, pored auto-članova, spektrogram može sadržati i članove čije je postojanje uslovljeno međusobnom interakcijom pojedinih komponenti analiziranog signala, [74]-[76], [126]. Ovi se članovi nazivaju kros-komponentama i, u principu, predstavljaju neželjene efekte kod TF predstavljanja signala. U cilju određivanja uslova pod kojima dolazi do pojave efekata interferencije kod spektrograma, proširimo našu analizu na multikomponentne signale oblika:

$$f(t) = \sum_{i=1}^M r_i(t) e^{j\phi_i(t)}. \quad (\text{I.6})$$

Pretpostavljajući sporopromjenljive amplitude $r_i(t)$ komponenti signala, u poređenju sa promjenama njihovih faza u okviru prozora, $r_i(t+\tau)w(\tau) \cong r_i(t)w(\tau)$ ¹, i diferencijabilne funkcije $\phi_i(t)$, kao i realan prozor $w(\tau)$,

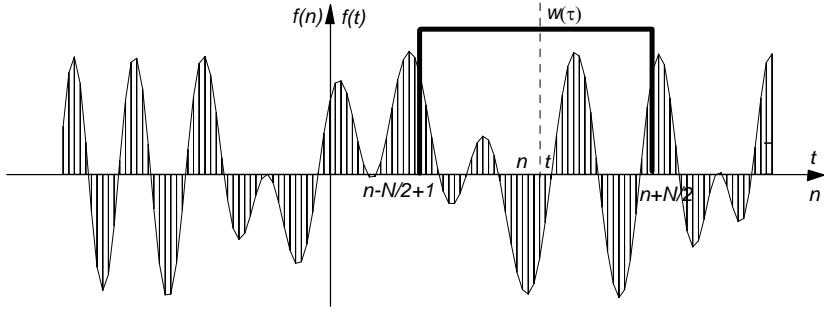
$$STFT_f(t, \omega) = \sum_{i=1}^M r_i(t) \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\phi_i(t+\tau)} w(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau. \quad (\text{I.7})$$

Razvijajući funkciju $\phi_i(t+\tau)$ u Taylorov red, u okolini tačke $t=0$, dobijamo:

¹Razvijajući $r_i(t+\tau)$ u Taylorov red u okolini tačke $t=0$:

$$r_i(t+\tau)w(\tau) = [r_i(t) + r_i^{(1)}(t)\tau + r_i^{(2)}(t)\tau^2/2 + \dots]w(\tau) \cong r_i(t)w(\tau),$$

uz prepostavku sporopromjenljivosti $r_i(t)$ u okviru prozora $w(\tau)$. Sa (1) u eksponentu je označen prvi izvod po nezavisno promjenljivoj, $r_i^{(1)}(t) = dr_i(t)/dt$.

Slika I.1: Odsjecanje posmatranog signala $f(t)$ funkcijom prozora u cilju sprovodenja TF analize

$$\begin{aligned} STFT_f(t, \omega) &= \sum_{i=1}^M r_i(t) e^{j\phi_i(t)} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j[\omega - \phi_i^{(1)}(\tau)]\tau} e^{j\phi_i^{(2)}(t+\tau_1)\frac{\tau^2}{2}} w(\tau) d\tau \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{i=1}^M r_i(t) e^{j\phi_i(t)} \delta(\omega - \phi_i^{(1)}(t)) *_{\omega} W(\omega) *_{\omega} FT[e^{j\phi_i^{(2)}(t+\tau_1)\frac{\tau^2}{2}}], \end{aligned} \quad (I.8)$$

gdje je $\tau_1 \in [0, \tau]$ i $FT[]$ operator FT. Pretpostavljajući da je drugi izvod faza komponenti multikomponentnog signala zanemarljiv unutar prozora ($\phi_i^{(2)}(t) \approx 0$), dobijamo:

$$STFT_f(t, \omega) = \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M r_i(t) r_j(t) e^{j[\phi_i(t) - \phi_j(t)]} \Lambda(t, \omega), \quad (I.9)$$

$$\Lambda(t, \omega) = W[\omega - \phi_i^{(1)}(t)] W^*[\omega - \phi_j^{(1)}(t)]. \quad (I.10)$$

Napokon, ukoliko se spektar funkcije prozora nalazi unutar glavne latice širine W_B , $W(\omega) = 0$ za $|\omega| \geq W_B/2$, razlikujemo sljedeće moguće slučajeve:

1. Ako je $\min|\phi_i^{(1)}(t) - \phi_j^{(1)}(t)| > W_B$ za sve vrijednosti i, j i dato t , energija signala je koncentrisana u auto-članovima,

$$SPEC_f(t, \omega) = \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M r_i(t) r_j(t) e^{j[\phi_i(t) - \phi_j(t)]} \Lambda(t, \omega) \delta(i-j) = \sum_{i=1}^M r_i^2(t) |W[\omega - \phi_i^{(1)}(t)]|^2. \quad (I.11)$$

2. Ako postoje l i k takvi da je $|\phi_l^{(1)}(t) - \phi_k^{(1)}(t)| < W_B$, tada, pored energije koncentrisane u auto-članovima, imamo i energiju kros-komponenti $r_l \exp(j\phi_l(t))$ i $r_k \exp(j\phi_k(t))$ lociranu između trenutnih frekvencija $\phi_l^{(1)}(t)$ i $\phi_k^{(1)}(t)$,

$$SPEC_f(t, \omega) = \sum_{i=1}^M r_i^2(t) |W[\omega - \phi_i^{(1)}(t)]|^2 + r_l(t) r_k(t) e^{j[\phi_l(t) - \phi_k(t)]} W[\omega - \phi_l^{(1)}(t)] W^*[\omega - \phi_k^{(1)}(t)]. \quad (I.12)$$

Na osnovu prethodne analize jednostavno se može zaključiti da spektrogram ne pati od efekata interferencije među komponentama signala koje su razdvojene u TF ravni. Nasuprot ovoj osobini, podvucimo njegov značajan nedostatak

pri analizi nestacionarnih procesa zbog odsjecanja analiziranog signala funkcijom prozora. Osim toga, spektrogram se definiše kao kvadrat modula spektra, tako da se njime gubi informacija o fazi i, samim tim, postupak čini nereverzibilan.

Prethodno izlaganje je ilustrovano numeričkim putem - TF analizom multikomponentnog signala, predstavljenog sumom linearne frekvencijske modulisanog (FM) signala i sinusoidalnog signala:

$$f(t) = \exp(j1250t) + \exp(j(680(t-0.1)^2 - 25\pi t \operatorname{sign}(\sin(2\pi t)))). \quad (\text{I.13})$$

Numerička analiza je sprovedena spektrogramom i još nekim često upotrebljavanim distribucijama, u cilju njihovog kasnijeg poređenja. Dobijeni rezultati su, u slučaju spektrograma, predstavljeni na slici I.5.(a).

I.2. KVADRATNE VREMENSKO-FREKVENCIJSKE DISTRIBUCIJE

Uočavajući gotovo nepremostiv nedostatak linearnih transformacija prilikom analize nestacionarnih procesa - nemogućnost istovremenog izbora idealne vremenske i frekvencijske rezolucije, naučnici su se do sredine ovog vijeka nalazili pred problemom definisanja transformacije kojom bi se otklonio ovaj nedostatak. Ovaj problem se počeo uspješno rješavati od 1948. godine kada je Ville primijenio Wignerovu distribuciju (definisanu u kvantnoj mehanici) na aktualnim problemima iz obrade signala. Razvitkom TF analize, ova distribucija postaje osnovni metod na kom se generiše opšta klasa kvadratnih distribucija (1966. god.). Uprkos gubitku osobine linearnosti, kvadratnim distribucijama se rješavaju problemi nastali upotrebom linearnih transformacija u obradi signala. Samim tim, njihova analiza postaje najčešći predmet proučavanja u literaturi. Takođe, ovoj analizi će biti posvećena najveća pažnja tokom izrade ove disertacije.

Fundamentalni cilj svake dvodimenzione funkcije vremena i frekvencije je da predstavi energiju ili intezitet signala po jedinici vremena i po jedinici frekvencije, odnosno da predstavi njenu gustinu. Međutim, princip neizvjesnosti ne dopušta definisanje pojma energije u određenoj tački, tako da nema smisla određivati energiju u svakoj tački TF ravni. Stoga se početna ideja posmatra kroz dva opšta uslova:

- 1) Integral tražene distribucije po ω -pravcu za određeni vremenski trenutak je jednak trenutnoj snazi signala,

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} P_f(t, \omega) d\omega = |f(t)|^2; \quad (\text{I.14})$$

- 2) Integral tražene distribucije po vremenu za posmatranu učestanost je jednak spektralnoj gustini energije signala:

$$\int_{-\infty}^{\infty} P_f(t, \omega) dt = |F(\omega)|^2. \quad (\text{I.15})$$

Tabela I.1: Poželjne osobine vremensko-frekvencijskih distribucija

Poželjna osobina	Matematička formulacija	Uslov
Realna vrijednost	$P_f^*(t, \omega) = P_f(t, \omega)$	
Pomjeranje po vremenu	$P_{f'}(t, \omega) = P_f(t - t_0, \omega)$	$f'(t) = f(t - t_0)$
Pomjeranje po frekvenciji	$P_{f'}(t, \omega) = P_f(t, \omega - \omega_0)$	$f'(t) = f(t) \exp(j\omega_0 t)$
Vremenski moment	$\frac{1}{2\pi} \iint t^n P_f(t, \omega) dt d\omega = \int t^n f(t) ^2 dt$	
Frekvencijski moment	$\frac{1}{2\pi} \iint \omega^n P_f(t, \omega) dt d\omega = \int \omega^n F(\omega) ^2 d\omega$	
TF skaliranje	$P_{f'}(t, \omega) = P_f(at, \omega/a)$	$f'(t) = \sqrt{ a } f(at), a \neq 0$
Trenutna frekvencija	$\frac{\int \omega P_f(t, \omega) d\omega}{\int P_f(t, \omega) d\omega} = \omega_i(t) = \frac{d}{dt}(\arg[f(t)])$	
Grupno kašnjenje	$\frac{\int t P_f(t, \omega) dt}{\int P_f(t, \omega) dt} = t_G(\omega) = \frac{d}{d\omega}(\arg[F(\omega)])$	
Ograničenje po vremenu	$P_f(t, \omega) = 0 \text{ za } t \notin [t_1, t_2]$	$f(t) = 0 \text{ za } t \notin [t_1, t_2]$
Ograničenje po frekvenciji	$P_f(t, \omega) = 0 \text{ za } \omega \notin [\omega_1, \omega_2]$	$F(\omega) = 0 \text{ za } \omega \notin [\omega_1, \omega_2]$
Konvolucija	$P_{f'}(t, \omega) = P_h(t, \omega) *_t P_f(t, \omega)$	$f'(t) = h(t) * f(t)$
Množenje	$P_{f'}(t, \omega) = P_h(t, \omega) *_\omega P_f(t, \omega)$	$f'(t) = h(t) f(t)$
Fourierova transformacija	$P_{f'}(t, \omega) = P_f(-\omega/c, ct)$	$f'(t) = \sqrt{ c } F(ct), c \neq 0$
Chirp konvolucija	$P_{f'}(t, \omega) = P_f(t - f/c, f)$	$f'(t) = f(t) * \sqrt{ c } \exp(j2\pi ct^2/2)$
Chirp množenje	$P_{f'}(t, \omega) = P_f(t, f - ct)$	$f'(t) = f(t) \exp(j2\pi ct^2/2)$

Ovi uslovi su poznati kao **marginalni uslovi**. Oni, zajedno sa činjenicom da je totalna energija analiziranog signala:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} P_f(t, \omega) dt d\omega = E_f, \quad (\text{I.16})$$

čine osnovne osobine koje je poželjno da zadovoljava pojedina distribucija. Primijetimo da zadovoljenjem bilo kog marginalnog uslova zadovoljavamo energetski uslov (I.16). Potpuni spisak poželjnih osobina, [65], koje zadovoljavaju pojedine distribucije je dat u Tabeli I.1. One istovremeno predstavljaju kriterijume po kojima je moguće izvršiti međusobno poređenje matematičkih metoda upotrebljavnih u TF analizi signala. U daljem izlaganju ćemo dati pregled najčešće navođenih distribucija, čije se definicije temelje na zadovoljenju marginalnih osobina (I.14) i (I.15).

I.3. LOKALNI AUTOKORELACIONI METOD

Međusobnim povezivanjem gustine energije analiziranog signala (odnosno kvadratne distribucije) sa njegovom autokorelacionom funkcijom generiše se uopšteni prilaz i često korišćeni metod za definisanje odgovarajućih TF reprezentacija, [35], [37]. Osnovna ideja se sastoji u zapisivanju spektralne gustine snage analiziranog signala $f(t)$ u obliku:

$$|F(\omega)|^2 = \left| \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt \right|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) f^*(t_1) e^{-j\omega(t-t_1)} dt dt_1 = \int_{-\infty}^{\infty} R_f(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau, \quad (\text{I.17})$$

gdje je $R_f(\tau)$ autokorelaciona funkcija determinističkog signala $f(t)$,

$$R_f(\tau) = \int_t f(t+\tau) f^*(t) dt = \int_t f(t) f^*(t-\tau) dt = \int_t f(t+\tau/2) f^*(t-\tau/2) dt. \quad (\text{I.18})$$

Jednačinom (I.17) je generisana veza između spektra signala $f(t)$ i njegove autokorelace funkcije. Uz pretpostavku da možemo napisati vremenski promjenljivi spektar ovog signala u obliku (I.15), dobijamo:

$$P_f(t, \omega) = \frac{\partial}{\partial t} |F(t, \omega)|^2 = \int_{\tau} R_f(t, \tau) e^{-j\omega\tau} d\tau, \quad (\text{I.19})$$

gdje je $R_f(t, \tau) = f(t) f^*(t-\tau)$, ili ekvivalentno $R_f(t, \tau) = f(t+\tau/2) f^*(t-\tau/2)$, vremenski zavisna ili **lokalna autokorelaciona funkcija**.

Prethodnom jednačinom je definisana **Rihaczekova distribucija**,

$$RD_f(t, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) f^*(t-\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega + \Theta) F^*(\omega) e^{j\Theta t} d\Theta \quad (\text{I.20})$$

u vremenskom i frekvencijskom domenu, [35], [37]. Ova distribucija pokazuje značajne nedostatke prilikom analize veoma nestacionarnih procesa, [35], [37], [65], [86]-[89], [141]. Pošto je mogućnost analize veoma nestacionarnih procesa smisao i cilj razvijanja matematičkih metoda za TF analizu signala, Rihaczekova distribucija nalazi svoju upotrebnu vrijednost u veoma kratkom vremenskom periodu.

I.4. WIGNEROVA DISTRIBUCIJA I NJENE MODIFIKACIJE

Zapažajući da je lokalna autokorelaciona funkcija $R_f(t, \tau)$ u opštem slučaju predstavljena proizvodom $f(t+a\tau) \times f^*(t+b\tau)$, uz uslov: $(a-b)\tau=\tau$, izvršimo njenu generalizaciju,

$$R_f(t, \tau) = f(t + (k + 1/2)\tau) f^*(t + (k - 1/2)\tau), \quad (\text{I.21})$$

sa proizvoljnom konstantom k . Uvrštavajući posljednji izraz u jednačinu (I.19) dobijamo opšti oblik distribucije – **generalisanu WD (GWD)**:

$$GWD_f(t, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t + (k + 1/2)\tau) f^*(t + (k - 1/2)\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau. \quad (\text{I.22})$$

U osnovi generalisane WD (za $k=0$) je WD, kao njen najznačajniji predstavnik:

$$WD_f(t, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t + \frac{\tau}{2}) f^*(t - \frac{\tau}{2}) e^{-j\omega\tau} d\tau = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega + \frac{\Theta}{2}) F^*(\omega - \frac{\Theta}{2}) e^{j\Theta t} d\Theta. \quad (\text{I.23})$$

Uočimo da WD predstavlja FT autokorelace funkcije $R_f(t, \tau) = f(t + \tau/2) f^*(t - \tau/2)$. Zapažajući da je $R_f(t, \tau)$ Hermitska funkcija, $R_f(t, \tau) = R_f^*(t, -\tau)$, i upotrebljavajući činjenicu da je FT Hermitske funkcije - realna funkcija, jednostavno se može zaključiti da je i WD realna funkcija, što predstavlja njenu veoma važnu osobinu iz korpusa poželjnih osobina. WD omogućava bolju vremensku i frekvencijsku analizu nestacionarnih signala od spektrograma, iz razloga direktnе primjenljivosti na signal (odnosno, na nemodifikovani - prozorom neodsječeni signal). Direktna primjenljivost WD na analizirani signal ima za rezultat jednostavnost pri računanju, bolju rezoluciju i neposrednu reverzibilnost metoda. Međutim, na ovaj način nije moguće izračunavanje WD, osim za signale ograničenog trajanja, pri čemu se posmatra kompletan signal. Prevazilaženje ovog problema postižemo uvođenjem pseudo forme WD (PWD), [30], [33], koja omogućava upotrebu WD na odsječku signala $f(t)$,

$$PWD_f(t, \omega) = WD_{f_w}(t, \omega), \quad (\text{I.24})$$

gdje je: $f_w(\tau) = f(\tau)w^*(t-\tau)$. Razvijena forma pseudo WD je:

$$PWD_f(t, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} w(\tau/2) w^*(-\tau/2) f(t + \frac{\tau}{2}) f^*(t - \frac{\tau}{2}) e^{-j\omega\tau} d\tau. \quad (\text{I.25})$$

Zapazimo da pseudo WD predstavlja WD proizvoda dva signala, odnosno konvoluciju, po frekvenciji, WD analiziranog signala, $WD_f(t, \omega)$, i WD funkcije prozora u trenutku $t=0$, $WD_w(0, \omega)$,

$$PWD_f(t, \omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Theta} WD_f(t, \Theta) WD_w(0, \omega - \Theta) d\Theta. \quad (\text{I.26})$$

Drugim riječima, pseudo forma WD je zaobljena verzija WD u pravcu ω -ose TF ravni.

Napomenimo da se, uz navedene osobine, pokazuje da WD zadovoljava sve definisane poželjne osobine, Tabela I.1, što je njena jedinstvena karakteristika u poređenju sa ostalim TF metodama, [35], [37], [65], [141]. Sve ovo, a posebno njena jednostavna numerička realizacija, predstavlja dovoljan razlog za neprekidno proučavanje WD i njenih modifikacija. Ona, stoga, predstavlja najčešće upotrebljavnu distribuciju u TF analizi o čemu svjedoči veliki broj

naučnih radova objavljenih u najpoznatijim svjetskim časopisima u posljednjih nekoliko godina. Iz ovih razloga je analizi njenih karakteristika posvećena velika pažnja i prilikom izrade ove disertacije.

I.5. S-METOD ZA VREMENSKO-FREKVENCIJSKU ANALIZU SIGNALA

Kao što je uočeno u slučaju spektrograma, sve kvadratne distribucije su nelinearne funkcije, te stoga pokazuju značajne nedostatke prilikom analize nestacionarnih signala – manje ili više izaražene efekte interferencije. U cilju posmatranja ovog problema kod pseudo WD, proširimo našu analizu na multikomponentni signal dat jednačinom (I.6). Povežimo pseudo formu WD sa ranije posmatranom STFT,

$$STFT_f(t, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t+\tau)w^*(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau, \quad (I.27)$$

$$PWD_f(t, \omega) = 2 \int_{-\infty}^{\infty} w(\tau)w^*(-\tau)f(t+\tau)f^*(t-\tau)e^{-j2\omega\tau}d\tau. \quad (I.28)$$

Uočavajući FT signala $f(t)$ odsječenog funkcijom prozora u jednačini (I.27), te zamjenjujući njenu inverznu formu u jednačinu (I.28), u slučaju realne funkcije prozora $w(\tau)$, dobijamo:

$$\begin{aligned} PWD_f(t, \omega) &= \frac{1}{\pi} \int_{\Theta} STFT_f(t, \Theta) \left(\int_{\tau} w(-\tau)f^*(t-\tau)e^{j(\Theta-2\omega)\tau}d\tau \right) d\Theta = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{\Theta} STFT_f(t, \Theta) STFT_f^*(t, 2\omega - \Theta) d\Theta = \frac{1}{\pi} STFT_f(t, 2\omega)^* \underset{\omega}{\circ} STFT_f^*(t, 2\omega). \end{aligned} \quad (I.29)$$

Uključujući u (I.29) izraze (I.9)-(I.10) za STFT multikomponentnog signala, dobijamo:

$$PWD_f(t, \omega) = \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M r_i(t)r_j(t)e^{j[\phi_i(t)-\phi_j(t)]}S(t, \omega), \quad (I.30)$$

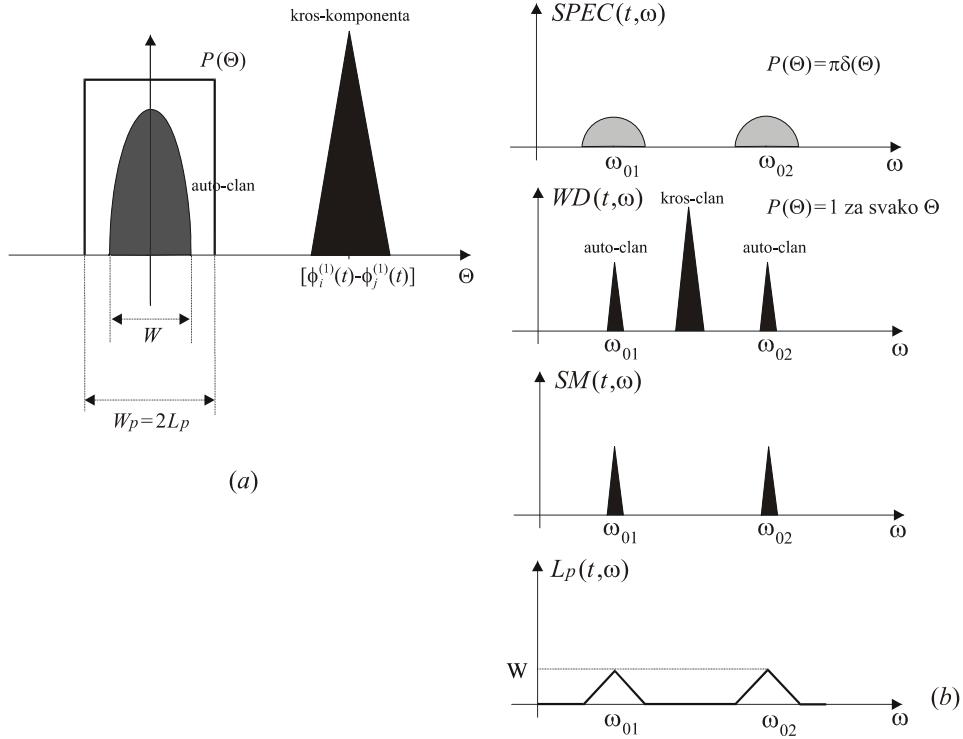
$$S(t, \omega) = \frac{1}{\pi} \int W(\omega + \Theta - \phi_i^{(1)}(t))W^*(\omega - \Theta - \phi_j^{(1)}(t))d\Theta. \quad (I.31)$$

Ograničavajući funkciju prozora $w(\tau)$ pretpostavkama uvedenim prilikom analize spektrograma, $PWD_f(t, \omega)$ uzima nenule vrijednosti za:

$$\left| \omega + \Theta - \phi_i^{(1)}(t) \right| < \frac{W_B}{2} \quad \text{i} \quad \left| \omega - \Theta - \phi_j^{(1)}(t) \right| < \frac{W_B}{2}. \quad (I.32)$$

Kombinovanjem prethodnih uslova lako se može zaključiti da su oni ekvivalentni sa:

$$\left| \omega - \frac{\phi_i^{(1)}(t) + \phi_j^{(1)}(t)}{2} \right| < \frac{W_B}{2}, \quad (I.33)$$

Slika I.2: Uticaj prozora $P(\Theta)$ na eliminisanje ili ublažavanje efekata interferencije

$$\left| \Theta - \frac{\phi_i^{(1)}(t) - \phi_j^{(1)}(t)}{2} \right| < \frac{W_B}{2}. \quad (\text{I.34})$$

Primijetimo da pseudo WD postoji u okolini frekvencija $(\phi_i^{(1)}(t) + \phi_j^{(1)}(t))/2$, za svako $i \neq j$. Drugim riječima, u ovom slučaju kros-komponente (za $i \neq j$) uvijek postoje, bez obzira na međusobnu udaljenost komponenti multikomponentnog signala, tako da je, uslijed kvadratne prirode WD, neminovna pojava efekata interferencije. Takođe, primijetimo da su kros-komponente centrirane, po ω -pravcu, između i -te i j -te komponente multikomponentnog signala.

U cilju donošenja vizuelnih zaključaka, adekvatnih prethodnim, teorija je ilustrovana numeričkom analizom multikomponentnog signala (I.13), slika I.5.(b). Sa slike se mogu neposredno primijetiti kros-komponente koje ispunjavaju središnji dio prostora među auto-članovima analiziranog signala.

Zaključimo da se auto-članovi ($i=j$) dobijaju integraljenjem u relativno uskom intervalu $|\Theta| < W_B/2$, u pravcu Θ -ose, dok se kros-komponente, u pravcu ove ose, dobijaju integraljenjem na intervalu iste širine, ali lociranim na određenoj udaljenosti, $(\phi_i^{(1)}(t) - \phi_j^{(1)}(t))/2$, od ishodišta. Odnosno, primijetimo da je moguće eliminisati neželjene kros-komponente koje se, u odnosu na auto-članove, nalaze na udaljenosti većoj od W_B po Θ -pravcu, sa jednom vremenim integraljenjem po auto-članovima. U tu svrhu se uvodi, [126], prozor $P(\Theta)$ širine W_p , slika I.2 (a),

$$W_B < W_p < \min_{i,j} |\phi_i^{(1)}(t) - \phi_j^{(1)}(t)| - W_B. \quad (\text{I.35})$$

Ovim razmišljanjem dolazimo do S-metoda (SM) za vremensko-frekvencijsku analizu signala,

$$SM_f(t, \omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} P(\Theta) STFT_f(t, \omega + \Theta) STFT_f^*(t, \omega - \Theta) d\Theta. \quad (\text{I.36})$$

Pogodnim izborom prozora $P(\Theta)$ dobijamo marginalne slučajeve ovog metoda:

1. za $P(\Theta) = \pi\delta(\Theta)$ - spektrogram;
2. za $P(\Theta) \equiv 1$, za $\forall \Theta$ - pseudo WD analiziranog signala.

Ova dva specijalna slučaja sugerisu da S-metod predstavlja reprezentaciju čije će karakteristike očuvati dobre osobine pomenutih distribucija. Naime, već je navedeno da spektrogram ne pati od efekata interferencije među separiranim komponentama signala, a da njihovo prisustvo degradira primjenljivost WD. Takođe je uočen značajan nedostatak spektrograma nastao upotreboom funkcije prozora u njegovoj definiciji, kao i značajno manja koncentisanost signala na trenutnoj frekvenciji u odnosu na WD, [126], [141], [146].

Interesantno je, na koncu, izvesti zaključke o minimalnoj širini prozora $P(\Theta)$, kojom se postiže koncentracija signala kao kod WD, sa maksimalno potisnutim efektima interferencije. Posmatrajmo, najprije, stacionarni monokomponentni signal $f(t)$ čija je STFT koncentisana oko frekvencije ω_0 , $|\omega - \omega_0| < W$. Primijetimo da će se integracija kod S-metoda po auto-članu u cjelini obaviti ukoliko je $P(\Theta)$ pravougaoni prozor, $P(\Theta) = 0$ za $|\Theta| > L_p$, takav da je $L_p \geq W$. U ovom slučaju je najpogodnije, iz razloga smanjenja kompleksnosti računanja, [126], i eventualnog potiskivanja efekata interferencije, kao i još nekih efekata (glava III), odabrat konstantnu i minimalnu moguću širinu prozora $L_p = W$. Primijetimo da se, u ovom slučaju, izborom prozora $P(\Theta)$ konstantne širine (za svaku t i ω) postiže koncentracija signala analogna slučaju pseudo forme WD, [47], [146], [167]. Međutim, kako se integracija kod S-metoda vrši po proizvodu STFT signala i njene konjugovano-kompleksne vrijednosti, jednostavno se može zaključiti da je širinu prozora $P(\Theta)$ moguće dalje sužavati, obezbjeđujući integraciju samo u domenu postojanja STFT analiziranog signala, slika I.2. Naime, širina prozora $L_p = W$ je neophodna samo u centralnoj tački $\omega = \omega_0$, dok je integracija nepotrebna u tačkama TF ravni u kojima STFT signala uzima nulte vrijednosti, tj. $P(\Theta) = 0$ za $|\omega - \omega_0| \geq W$. Među ovim marginalnim slučajevima, frekvencijski zavisna širina prozora $L_p(\omega)$ linearno opada od svoje maksimalne vrijednosti W , do 0, slika I.2, tako da je optimalna širina prozora $P(\Theta)$, na datoј frekvenciji,

$$L_p(\omega) = \begin{cases} W - |\omega - \omega_0|, & |\omega - \omega_0| < W \\ 0, & |\omega - \omega_0| \geq W. \end{cases} \quad (I.37)$$

Posmatrajmo sada M-komponentni signal $f(t) = \sum_{i=1}^M f_i(t)$. Prepostavimo da se STFT svake njegove komponente $f_i(t)$ nalazi u domenu $D_i(t, \omega)$, $i=1,2,\dots,M$. Označavajući širinu i -tog domena po ω , za posmatrani vremenski trenutak t , sa $2W_i(t)$, kao i njegovu centralnu frekvenciju sa $\omega_{0i}(t)$, zaključujemo da će se u (I.36) obaviti potpuna integracija po auto-članovima, uz eliminisanje efekata interferencije, $SM(t, \omega) = \sum_{i=1}^M PWD_i(t, \omega)$ ($PWD_i(t, \omega)$ je pseudo WD i -te komponente analiziranog signala), ukoliko se domeni $D_i(t, \omega)$, $i=1,2,\dots,M$ ne preklapaju u TF ravni, $D_i(t, \omega) \cap D_j(t, \omega) = \emptyset$, $i \neq j$, i ukoliko je vremensko-frekvencijski promjenljiva širina prozora $P_{(t, \omega)}(\Theta)$:

$$L_p(t, \omega) = \begin{cases} W_i(t) - |\omega - \omega_{0i}(t)|, & (t, \omega) \in D_i(t, \omega), i = 1, 2, \dots, M \\ 0, & \text{drugdje.} \end{cases} \quad (I.38)$$

Ovim je definisana od signala zavisna forma S-metoda,

$$SM_f(t, \omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} P_{(t, \omega)}(\Theta) STFT_f(t, \omega + \Theta) STFT_f^*(t, \omega - \Theta) d\Theta. \quad (I.39)$$

Primijetimo da, pri analizi M-komponentnog signala $f(t)$, S-metod sa konstantnom širinom prozora pokazuje značajne nedostatke. Naime, ukoliko su širine STFT pojedinih komponenti analiziranog signala različite, potrebno je odabrati prozor $P(\Theta)$ širine $\max_i \{2W_i, i = 1, 2, \dots, M\}$. Ovako odabrani prozor je preširok u najvećem dijelu TF ravni, sa izuzetkom centralne tačke ω_{0i} najšire komponente analiziranog signala. Odnosno, odabrani prozor može biti neodgovarajući za gotovo sve komponente multikomponentnog signala. Sa druge strane, izbor suviše uzanog prozora rezultira u niskoj koncentraciji signala na trenutnoj frekvenciji, dok izbor suviše širokog prozora može imati negativne posljedice na redukovanje efekata interferencije, kompleksnost računanja, [126], kao i na uticaj šuma na TF reprezentaciju signala, glava III.

Distribucijom (I.39) se, uz uslov fizičke separiranosti komponenti multikomponentnog signala u TF ravni, postiže reprezentacija analiziranog signala oslobođena efekata interferencije. Zapazimo da je u slučaju preklapanja komponenti $f_i(t)$ i $f_j(t)$, u vremenskom trenutku t , nemoguće potisnuti kros-komponente među njima. Kros-komponente će tada biti predstavljene u svojoj punoj formi ukoliko se upotrijebi od signala zavisna distribucija (I.39) i u značajno redukovanoj formi u slučaju upotrebe prozora konstantne širine. Stoga bi, u slučaju preklapanja komponenti signala u značajnom broju tačaka TF ravni, rješenje predstavljača prozor sa od signala zavisnom širinom, kao i sa redefinisanom

maksimalnom širinom u presječnim tačkama komponenti. Numerička analiza složenog signala, datog jednačinom (I.13), prethodno izvedenim oblicima S-metoda i za različite širine prozora $P(\Theta)$ je data na slici I.5.(c)-(e).

Iz prethodnih izvođenja, kao i numeričke analize zaključujemo da S-metod daje takvu reprezentaciju multikomponentnog signala da je raspodjela svake njegove komponente - njena WD, koja svaka za sebe (ponaosob) zadovoljava poželjne osobine, ali sa eliminisanim, odnosno značajno potisnutim kros-komponentama.

I.6. GENERALISANA COHENOVА KLASA KVADRATNIH DISTRIBUCIJA

Vratimo se na generalisanu WD, jednačina (I.22). Opšta lokalna autokoreaciona funkcija je:

$$f(t + (k + 1/2)\tau)f^*(t + (k - 1/2)\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{\omega} GWD_f(t, \omega) e^{j\omega\tau} d\omega. \quad (\text{I.40})$$

Zamjenjujući $\tau = 0$ u (I.40) zadovoljavamo marginalni uslov po frekvenciji,

$$|f(t)|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{\omega} GWD_f(t, \omega) d\omega. \quad (\text{I.41})$$

Analogno ovom postupku, u frekventnom domenu za $\Theta = 0$, imamo:

$$|F(\omega)|^2 = \int_t GWD_f(t, \omega) dt. \quad (\text{I.42})$$

Dakle, sve distribucije koje se mogu izvesti iz generalisane WD zadovoljavaju marginalne osobine. Sljedeći korak je definisanje opšte klase kvadratnih distribucija koja bi dala njihov zatvoreni analitički oblik. U tom cilju, pretpostavimo distribuciju $P_f(t, \omega)$ i definišimo njenu inverznu dvodimenzionu FT sa $M(\Theta, \tau)$, [129]. Cijeneći dosad rečeno, kao i fizičke karakteristike promjenljivih, zaključujemo da je:

$$\begin{aligned} M(\Theta, \tau) &= \frac{1}{2\pi} \int_t \int_{\omega} P_f(t, \omega) e^{-j\Theta t + j\omega\tau} dt d\omega, \\ P_f(t, \omega) &= \frac{1}{2\pi} \int_{\Theta} \int_{\tau} M(\Theta, \tau) e^{j\Theta t - j\omega\tau} d\Theta d\tau. \end{aligned} \quad (\text{I.43})$$

Uslov (I.16) je zadovoljen ako je: $M(0, 0) = E_f$. Marginalni uslovi se zadovoljavaju ispunjavanjem jednakosti:

$$\begin{aligned} M(\Theta, 0) &= \int_t |f(t)|^2 e^{-j\Theta t} dt, \\ M(0, \tau) &= \frac{1}{2\pi} \int_{\omega} |F(\omega)|^2 e^{j\omega\tau} d\omega. \end{aligned} \quad (\text{I.44})$$

Na osnovu prethodnih jednačina i jedinstvenosti FT zaključujemo da se kvadratne distribucije mogu napisati u opštem obliku sa:

$$P_f(t, \omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Theta, \tau} \int M(\Theta, \tau) e^{j\Theta t - j\omega \tau} d\Theta d\tau, \quad (I.45)$$

gdje je $M(\Theta, \tau)$ proizvoljna funkcija za sve vrijednosti promjenljivih (Θ, τ) , osim za $\Theta = 0$ i $\tau = 0$, kada ova funkcija zadovoljava (I.44) sa ciljem ispunjenja marginalnih osobina. Ako je potrebno zadovoljiti samo energetski uslov (I.16), ova funkcija ima tačno određenu vrijednost samo u ishodištu, $M(0,0) = E_f$.

Poznavanjem makar jedne distribucije $P_f(t, \omega)$ sa inverznom FT - $M(\Theta, \tau)$, koja uz to zadovoljava marginalne osobine, opšta funkcija $P_{fg}(t, \omega)$ sa inverznom FT:

$$M_g(\Theta, \tau) = M(\Theta, \tau)c(\Theta, \tau), \quad (I.46)$$

takođe zadovoljava marginalne uslove uz ograničenje: $c(\Theta, 0) = c(0, \tau) = 1$. Dakle, poznavanjem samo jedne može se formirati beskonačan broj TF reprezentacija. Svaka od njih se dobija za različite oblike funkcije $c(\Theta, \tau)$. Drugim riječima, opšti oblik kvadratnih distribucija se može predstaviti u sljedećoj formi:

$$\begin{aligned} P_{fg}(t, \omega) &= \frac{1}{2\pi} \int_{\Theta, \tau} \int M_g(\Theta, \tau) e^{j\Theta t - j\omega \tau} d\Theta d\tau = \\ &= \frac{1}{4\pi^2} \int_u \int_s \int_{\Theta, \tau} c(\Theta, \tau) P_f(u, s) e^{-j\Theta u + js\tau + j\Theta t - j\omega \tau} du ds d\Theta d\tau. \end{aligned} \quad (I.47)$$

Prepostavimo da je poznata distribucija $P_f(t, \omega)$ ustvari WD,

$$M(\Theta, \tau) = \frac{1}{2\pi} \int_t \int_{\omega} WD_f(t, \omega) e^{-j\Theta t + j\omega \tau} dt d\omega = \int_t f(t + \frac{\tau}{2}) f^*(t - \frac{\tau}{2}) e^{-j\Theta t} dt. \quad (I.48)$$

Karakteristična funkcija $M(\Theta, \tau)$ definisana prethodnom jednačinom se naziva ambiguity funkcijom, $AF_f(\Theta, \tau)$, tj.:

$$M_g(\Theta, \tau) = AF_f(\Theta, \tau)c(\Theta, \tau), \quad (I.49)$$

gdje je sa $c(\Theta, \tau)$ označena takozvana funkcija jezgra, [35], [37], definisana u AF^2 domenu.

Prvi je do istih rezultata došao Cohen, [35], izvodeći opštu klasu distribucija, ali uz upotrebu karakteristične funkcije i operatorskog računa. Bez obira da li se upotrebljava izvorni način izvođenja ili ovaj pojednostavljeni, dobija se **Cohenova klasa distribucija (CD)**, kao opšta funkcija $P_{fg}(t, \omega)$, uz poznatu funkciju: $P_f(t, \omega) = WD_f(t, \omega)$,

$$CD_f(t, \omega; c) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Theta, \tau} \int c(\Theta, \tau) AF_f(\Theta, \tau) e^{j\Theta t - j\omega \tau} d\Theta d\tau, \quad (I.50)$$

ili u svojoj razvijenoj formi:

²Ambiguity function ili Θ - τ domen sa u literaturi najčešće označava **AF domenom**.

$$CD_f(t, \omega; c) = \frac{1}{2\pi} \int \int \int c(\Theta, \tau) f(u + \frac{\tau}{2}) f^*(u - \frac{\tau}{2}) e^{j\Theta t - j\omega\tau - j\Theta u} du d\Theta d\tau. \quad (I.51)$$

Za razne oblike funkcije jezgra $c(\Theta, \tau)$ dobijamo različite distribucije, koje pripadaju opštoj Cohenovoj klasi. U principu, zamjenom $CD_f(t, \omega; c)$ na lijevoj strani prethodne jednačine proizvoljnom distribucijom iz Cohenove klase, dobijamo njoj odgovarajuću funkciju jezgra. Jednostavno se pokazuje se da se za $c(\Theta, \tau) = 1$, $c(\Theta, \tau) = \exp(j\Theta\tau/2)$ i $c(\Theta, \tau) = \exp(jk\Theta\tau)$ dobijaju WD, Rihaczekova i generalisana WD, respektivno. Takođe, pretpostavljajući funkciju jezgra u obliku ambiguity funkcije proizvoljne funkcije prozora $h(t)$, $c(\Theta, \tau) = AF_h(\Theta, \tau)$, dobijamo Spektrogram, kao i za $c(\Theta, \tau) = P(\Theta/2)^* \Theta AF_w(\Theta, \tau)/2\pi$ - S-metod za TF analizu signala.

Koristeći izraz za WD u frekvencijskom domenu dobijamo generalisanu Cohenovu klasu definisanu u frekvencijskom domenu, ekvivalentnu sa (I.51),

$$CD_f(t, \omega; c) = \frac{1}{2\pi} \int \int \int c(\Theta, \tau) F(s + \frac{\Theta}{2}) F^*(s - \frac{\Theta}{2}) e^{j\Theta t - j\omega\tau + js\tau} ds d\Theta d\tau. \quad (I.52)$$

Vratimo se, na koncu, na jednačinu (I.47) i integralimo je po promjenljivima Θ i τ ,

$$\begin{aligned} P_{fg}(t, \omega) &= \frac{1}{2\pi} \int \int P_f(u, s) \left[\frac{1}{2\pi} \int \int c(\Theta, \tau) e^{j\Theta(t-u) - j(\omega-s)\tau} d\Theta d\tau \right] du ds = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int \int P_f(u, s) \Pi(t-u, \omega-s) du ds = P_f(t, \omega)^* \Pi(t, \omega). \end{aligned} \quad (I.53)$$

$\Pi(t, \omega)$ je inverzna dvodimenzionala FT funkcije jezgra $c(\Theta, \tau)$. Zapazimo jednu veoma interesantnu činjenicu: *ako je sa $P_f(u, s)$ predstavljena WD tada se svaka distribucija iz opšte klase (I.51) može posmatrati kao zaobljena WD.*

Kros-komponente kod generalisane Cohenove klase distribucija

Poznata je činjenica da sve kvadratne distribucije pate od uticaja efekata interferencije prilikom analize multikomponentnih signala, [35], [37], [74]-[76]. U cilju matematičkog predstavljanja ovih efekata posmatrajmo signal oblika:

$$f(t) = \sum_{k=1}^N f_k(t). \quad (I.54)$$

Proizvoljna kvadratna distribucija (iz opšte Cohenove klase) signala $f(t)$ je:

$$CD_{ff}(t, \omega; c) = \sum_{k=1}^N CD_{kk}(t, \omega; c) + \sum_{\substack{k, l=1 \\ k \neq l}}^N CD_{kl}(t, \omega; c). \quad (I.55)$$

U (I.55) su sa $CD_{kl}(t, \omega; c)$ predstavljene kros-komponente oblika:

$$CD_{kl}(t, \omega; c) = \frac{1}{2\pi} \int \int \int c(\Theta, \tau) f_k\left(u + \frac{\tau}{2}\right) f_l^*\left(u - \frac{\tau}{2}\right) e^{j\Theta t - j\omega\tau - j\Theta u} du d\Theta d\tau, \quad (I.56)$$

odnosno, posljednjom jednačinom je definisana kros-distribucija (iz Cohenove klase) među signalima $f_k(t)$ i $f_l(t)$.

Analizirajmo efekte interferencije, izvodenjem ambiguity funkcije signala koji je u vremenskom domenu predstavljen sumom dva δ -impulsa, kao i signala koji je dat u obliku zbiru dva prostoperiodična signala. Predstavimo, u tom cilju, jednačinu (I.48) u obliku Fourierove transformacije, po t , lokalne autokorelace funkcije $R_f(t, \tau)$,

$$AF_f(\Theta, \tau) = \int_t R_f(t, \tau) e^{-j\Theta t} dt. \quad (\text{I.57})$$

1. Prepostavljajući signal $f(t) = \delta(t - t_1) + \delta(t - t_2)$, jednostavno zaključujemo da je:

$$R_f(t, \tau) = \frac{1}{2} [\delta(t - t_1) + \delta(t - t_2)] \delta(\tau/2) + \frac{1}{2} \delta(t - (t_1 + t_2)/2) [\delta(t - t_1 + t_2) + \delta(t + t_1 - t_2)]. \quad (\text{I.58})$$

Prilikom izvođenja posljednjeg izraza upotrijebljena je sljedeća jednakost: $\delta(t + \tau/2)\delta(t - \tau/2) = \delta(t)\delta(\tau/2)/2$. Prva dva sabirka predstavljaju auto-članove analiziranog signala na njihovim trenutnim frekvencijama $t = t_1$ i $t = t_2$, dok sljedeća dva sabirka predstavljaju kros-komponente locirane na $t = (t_1 + t_2)/2$ udaljenosti od ishodišta t -ose. Primijetimo, uz to, da se auto-članovi nalaze oko ishodišta τ -ose, dok su kros-komponente udaljene za $t_1 - t_2$ po istoj osi.

2. Analogno ovome, analizirajmo signal $f(t) = \exp(j\omega_1 t) + \exp(j\omega_2 t)$, sa FT: $F(\omega) = 2\pi\delta(\omega - \omega_1) + 2\pi\delta(\omega - \omega_2)$. Primjenjujući analizu, adekvatnu prethodnoj, definisanu u frekvencijskom domenu izrazom:

$$AF_F(\Theta, \tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{\omega} F(\omega + \Theta/2) F^*(\omega - \Theta/2) e^{j\omega\tau} d\omega, \quad (\text{I.59})$$

jednostavno zaključujemo da su auto-članovi locirani oko $\Theta=0$, dok su kros-komponente udaljene od ishodišta Θ -ose. Drugim riječima, auto-članovi analiziranih signala su locirani oko ishodišta $\Theta-\tau$ ravni, dok su im kros-komponente udaljene od koordinatnog početka $\Theta-\tau$ ravni. Odnosno, mogu se izvesti isti zaključci kao u slučaju WD: *postojanje kros-komponenti kod distribucija iz Cohenove klase nije uslovljeno međusobnim rastojanjem pojedinih komponenti multikomponentnog signala, već oblikom funkcije jezgra $c(\Theta, \tau)$* .

Iz ovih opservacija jednostavno zaključujemo da se kros-komponente mogu eliminisati, ili značajno redukovati, primjenom distribucija čija bi funkcija jezgra imala oblik takav da eliminiše integraciju daleko od koordinatnih osa $\Theta-\tau$ ravni, a istovremeno, u cilju zadovoljavanja marginalnih osobina, zadovoljava: $c(\Theta, 0) = c(0, \tau) = 1$. Na ovom principu je najprije definisana eksponencijalna **Choi-Williamsova distribucija**, [28], sa funkcijom jezgra oblika: $c(\Theta, \tau) = \exp(-\Theta^2 \tau^2 / \sigma)$, kontrolisanim parametrom σ . Izborom parametra σ zapravo opređujemo stepen redukovanja neželjenih kros-komponenti. Međutim, njegov izbor mora biti kompromisiran, pošto se sa malim σ postiže zadovoljavajuće potiskivanje efekata interferencije, ali i značajno izobličavanje auto-članova.

U cilju postizanja vizuelnih zaključaka izvršena je numerička analiza signala (I.13) za različite vrijednosti parametra σ , slika I.5.(f) i (g). Sa slika se jednostavno mogu izvesti isti zaključci. Pokazuje se, takođe, da se ovi pozitivni rezultati postižu na račun inteziviranja vremena računanja, [29], [126].

Poželjne osobine distribucija i ograničenja funkcije jezgra

Primijetimo da se Cohenovom klasom uspijeva sažeti mnoštvo kvadratnih distribucija različitih oblika i osobina na jednostavan način, u formi pogodnoj za jedinstveno proučavanje osobina svih njenih članova. Pokazuje se, [30]-[32], [68], da zadovoljavanje osobina (P) distribucija iz Cohenove klase dovodi do ograničenja (Q) funkcije jezgra, koja su pojedinačno predstavljena u Tabeli I.2. Na taj način, ispitivanjem funkcije jezgra mogu biti određene opšte osobine posmatrane kvadratne distribucije (iz Cohenove klase).

I.7. VREMENSKO-FREKVENCIJSKE DISTRIBUCIJE: POZADINA I NOTACIJA

Dosad smo utvrdili postojanje dva domena predstavljanja distribucija, AF i TF (ili $t-\omega$) domen. Svojom definicijom distribucije predstavljaju dvodimenzione funkcije vremena i frekvencije. Svaka od ovih dimenzija ima svoju frekvencijsku i svoju vremensku predstavu. Drugim riječima, distribucije se mogu predstaviti u četiri različita domena i u narednim izlaganjima će biti ravnopravno korišćena.

Podimo, najprije, od vremenskog domena. Lokalna autokorelaciona funkcija kompleksnog signala $f(t)$ je:

$$R_f(t, \tau) = f(t + \tau/2)f^*(t - \tau/2). \quad (\text{I.60})$$

Wignerova distribucija signala $f(t)$ se definiše kao FT lokalne autokorelace funkcije $R_f(t, \tau)$ po τ -pravcu,

$$WD_f(t, \omega) = \int_{\tau} R_f(t, \tau) e^{-j\omega\tau} d\tau. \quad (\text{I.61})$$

Analogno definiciji WD, ali sa različitim fizičkim značenjem, simetrična ambiguity funkcija se definiše kao inverzna FT, po t , trenutne autokorelace funkcije $R_f(t, \tau)$:

$$AF_f(\Theta, \tau) = \frac{1}{2\pi} \int_t R_f(t, \tau) e^{j\Theta t} dt. \quad (\text{I.62})$$

Primjetimo da su WD i ambiguity funkcija povezane dvodimenzionom FT,

$$WD_f(t, \omega) = \int_{\Theta} \int_{\tau} AF_f(\Theta, \tau) e^{-j(\Theta t + \omega \tau)} d\Theta d\tau. \quad (\text{I.63})$$

Analogno definiciji ovih veličina u vremenskom, uvedimo njihove definicije u frekvencijskom domenu. U tom cilju, označimo sa $R_F(\Theta, \omega)$ trenutnu spektralnu autokorelacionu funkciju,

Tabela I.2: Poželjne osobine (P) i odgovarajuća ograničenja funkcije jezgra (Q)

P0. Nenegativnost: $CD_f(t, \omega; c) \geq 0 \quad \forall t, \omega$.

Q0. $c(\Theta, \tau)$ je ambiguity funkcija proizvoljne funkcije $w(\tau)$.

P1. Realnost: $CD_f(t, \omega; c) \in \mathbb{R}$.

Q1. $c(\Theta, \tau) = c^*(-\Theta, -\tau)$.

P2. Pomjeranje po vremenu: $g(t) = f(t - t_0) \Rightarrow CD_g(t, \omega; c) = CD_f(t - t_0, \omega; c)$.

Q2. $c(\Theta, \tau)$ ne zavisi od t .

P3. Pomjeranje po frekvenciji: $g(t) = f(t) \exp(j\omega_0 t) \Rightarrow CD_g(t, \omega; c) = CD_f(t, \omega - \omega_0; c)$.

Q3. $c(\Theta, \tau)$ ne zavisi od ω .

P4. Marginalni uslov po vremenu (trenutna snaga signala): $\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} CD_f(t, \omega; c) d\omega = |f(t)|^2$.

Q4. $c(\Theta, 0) = 1 \quad \forall \Theta$.

P5. Marginalni uslov po frekvenciji (spektralna gustina snage signala): $\int_{-\infty}^{\infty} CD_f(t, \omega; c) dt = |F(\omega)|^2$.

Q5. $c(0, \tau) = 1 \quad \forall \tau$.

P6. Trenutna frekvencija: $\left[\int_{-\infty}^{\infty} \omega CD_f(t, \omega; c) d\omega / \int_{-\infty}^{\infty} CD_f(t, \omega; c) d\omega \right] = \omega_i(t)$.

Q6. Q4 i $[\partial c(\Theta, \tau) / \partial \tau]_{\tau=0} = 0 \quad \forall \Theta$.

P7. Grupno kašnjenje: $\left[\int_{-\infty}^{\infty} t CD_f(t, \omega; c) dt / \int_{-\infty}^{\infty} CD_f(t, \omega; c) dt \right] = t_g(\omega)$.

Q7. Q5 i $[\partial c(\Theta, \tau) / \partial \Theta]_{\Theta=0} = 0 \quad \forall \tau$.

P8. Ograničenost po vremenu: $f(t)=0$ za $|t| > t_c \Rightarrow CD_f(t, \omega; c) = 0$ za $|t| > t_c$.

Q8. $\varphi(t, \tau) = \int_{-\infty}^{\infty} c(\Theta, \tau) \exp(-j\Theta t) d\Theta = 0$ za $|\tau| < 2|t|$.

P9. Ograničenost po frekvenciji: $F(\omega)=0$ za $|\omega| > \omega_c \Rightarrow CD_f(t, \omega; c) = 0$ za $|\omega| > \omega_c$.

Q9. $\int_{-\infty}^{\infty} c(\Theta, \tau) \exp(j\omega \tau) d\tau = 0$ za $|\Theta| < 2|\omega|$.

P10. Potiskivanje interferencije među komponentama multikomponentnog signala.

Q10. $c(\Theta, \tau)$ je oblika dvodimenzionog niskopropusnog filtra.

P11. Ukupna snaga signala: $\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} CD_f(t, \omega; c) dt d\omega = E_f = \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt$.

Q11. $c(0,0) = 1$.

$$R_F(\Theta, \omega) = F(\omega + \Theta/2)F^*(\omega - \Theta/2). \quad (\text{I.64})$$

Usvajajući prethodnu notaciju i fizičke osobine promjenljivih, lako se pokazuje da je:

$$R_F(\Theta, \omega) = \int \int_{t \tau} R_f(t, \tau) e^{-j(\omega\tau + \Theta t)} dt d\tau, \quad (\text{I.65})$$

$$WD_F(t, \omega) = \int_{\Theta} R_F(\Theta, \omega) e^{-j\Theta t} d\Theta = 2\pi W_f(-t, \omega), \quad (\text{I.66})$$

$$AF_F(\Theta, \tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Theta} R_F(\Theta, \omega) e^{j\omega\tau} d\omega = 2\pi AF_f(-\Theta, \tau). \quad (\text{I.67})$$

Prethodno izvedene relacije za $R_f(t, \tau)$, $AF_f(\Theta, \tau)$, $WD_f(t, \omega)$, $R_F(\Theta, \omega)$, $AF_F(\Theta, \tau)$ i $WD_F(t, \omega)$ su vizuelno prikazane dijagramom na slici I.3. Može se primijetiti da, u osnovi, postoji šest međusobno povezanih domena: vremenski (t), frekvencijski (ω), vremensko-korelacioni (t, τ)³, spektralno-korelacioni (ω, Θ)⁴, ambiguity (Θ, τ) ili AF i vremensko-frekvencijski (t, ω) ili TF domen. Svaki od ovih domena posjeduje jedinstvene prednosti i adekvatan je za predstavljanje određenog tipa signala. Primijetimo da je procedura $f(t) \rightarrow R_f(t, \tau)$ nereverzibilna u smislu rekonstruisanja signala $f(t)$ na osnovu $R_f(t, \tau)$. Naime, signal $f(t)$ se može rekonstruisati iz $R_f(t, \tau)$ sa tačnošću do konstantne faze, pošto signali $f(t)$ i $f(t)\exp(j\alpha)$ daju identičnu lokalnu autokorelacionu funkciju. Podsjetimo, takođe, da analizirani signal može biti rekonstruisan iz WD i AF sa tačnošću do konstantne faze, poglavljje I.4.

Pored zadovoljenja svih poželjnih osobina, naveli smo, do sada, i nekoliko značajnih nedostataka WD. Ovdje ćemo naglasiti dva najznačajnija: *njenu neobaveznu nenegativnost i istaknute efekte interferencije među komponentama signala, lociranim u različitim djelovima TF ravni*. Ova dva fenomena mogu izazvati poteškoće prilikom interpretacije WD kao energetske distribucije po vremenu i frekvenciji. Ponekad su nenegativnost i kros-komponente tijesno povezane, pošto, u opštem slučaju, kros-komponente fluktuiraju u TF domenu i proizvode višak negativnih vrijednosti. U mnogim slučajevima, potiskivanjem kros-komponenti postižemo redukovanje negativnih vrijednosti u amplitudi signala, [29]. Podvučimo, ipak, da uprkos na više mesta isticanoj želji za potiskivanjem kros-komponenti (u cilju poboljšanja interpretabilnosti vremenski promjenljivog spektra analiziranog signala), one sadrže značajne informacije o međusobnoj povezanosti pojedinih komponenti signala. Ova njihova osobina je posebno značajna i upotrebljiva u

³Vremensko-korelacioni, $t-\tau$ domen se u literaturi obično naziva *time-lag*, ili skraćeno **TL domen**.

⁴Spektralno-korelacioni, $\omega-\Theta$ domen se obično naziva *frequency-lag* ili **FL domen**.

nekim praktičnim aplikacijama (radari i sonarni uređaji). U cilju potiskivanja negativnih vrijednosti i efekata interferencije kod WD, često se primjenjuje zaobljavanje u oba domena, vremenskom i frekvencijskom:

$$WD_f^S(t, \omega) = \frac{1}{4\pi^2} \int \int_{us} WD_f(u, s) \Pi(t-u, \omega-s) du ds, \quad (I.68)$$

gdje je sa $\Pi(t, \omega)$ definisana funkcija jezgra u TF domenu. Uvodeći notaciju iz (I.53),

$$c(\Theta, \tau) = FT_{t, \omega}[\Pi(t, \omega)] = \int \int_{t \omega} \Pi(t, \omega) e^{-j\Theta t - j\omega \tau} dt d\omega \quad (I.69)$$

i primjenjujući, uz to, dvodimenzionu konvolucionu teoremu dobijamo Cohenovu klasu, definisanu jednačinom (I.51).

Drugim riječima, $WD_f^S(t, \omega) = CD_f(t, \omega; c)$. Generalno, jezgro $c(\Theta, \tau)$ može zavisiti od t, ω , kao i od signala $f(t)$. Mićemo u radu razmatrati shift-invarijantne slučajeve, Tabela I.2, P2-P3.

Takođe, $CD_f(t, \omega; c)$ može biti predstavljena kao FT generalisane autokorelacione funkcije,

$$R_f^g(t, \tau) = \frac{1}{2\pi} \int_u R_f(u, \tau) \phi(t-u, \tau) du \quad (I.70)$$

u obliku, [29], [75]:

$$CD_f(t, \omega; \phi) = \int_{\tau} R_f^g(t, \tau) e^{-j\omega \tau} d\tau. \quad (I.71)$$

Sa $\phi(t, \tau)$ je označena funkcija jezgra u TL domenu,

$$\phi(t, \tau) = FT_{\Theta} [c(\Theta, \tau)] = \int_{\Theta} c(\Theta, \tau) e^{-j\Theta t} d\Theta. \quad (I.72)$$

Na koncu, $CD_f(t, \omega; c)$ može biti shvaćena kao inverzna FT generalisane spektralne korelacione funkcije,

$$R_F^g(\Theta, \omega) = \frac{1}{2\pi} \int_v R_F(\Theta, v) \Psi(\Theta, \omega - v) dv \quad (I.73)$$

u formi:

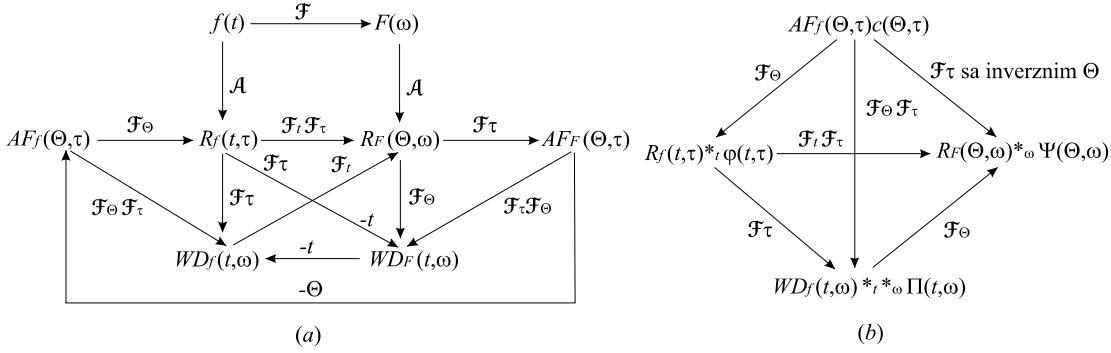
$$CD_f(t, \omega; \Psi) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Theta} R_F^g(\Theta, \omega) e^{j\Theta t} d\Theta. \quad (I.74)$$

Sa $\Psi(\Theta, \omega)$ je označena funkcija jezgra u FL domenu:

$$\Psi(\Theta, \omega) = \int_{\tau} c(-\Theta, \tau) e^{-j\omega \tau} d\tau. \quad (I.75)$$

Drugim riječima, polazeći od definicije Cohenove klase distribucija, [35] i jednačine (I.51), zaključujemo da se kvadratne distribucije, absolutno ravnopravno, mogu predstaviti na četiri načina, [30]-[33], [75]:

1. kao dvodimenziona konvolucija WD sa funkcijom jezgra u TF domenu;



Slika I.3: (a) Veze između signala $f(t)$, njegove FT, lokalne autokorelace funkcije, spektralne autokorelacijske funkcije i WD. Operatori predstavljaju: \mathcal{A} - autokorelacijsku transformaciju, \mathcal{F} - Fourierovu transformaciju.

(b) Cohenova klasa distribucija u različitim domenima.

2. kao dvodimenzionala FT proizvoda ambiguity funkcije analiziranog signala i funkcije jezgra date u AF domenu.

Ovaj proizvod se najčešće naziva generalisanim ambiguity funkcijom, [39], [75];

3. kao FT (po promjenljivoj τ) konvolucije (u vremenskom domenu) lokalne autokorelace funkcije i funkcije jezgra date u TL domenu;
4. kao FT (po promjenljivoj Θ) konvolucije (u frekvencijskom domenu) lokalne spektralne autokorelace funkcije i funkcije jezgra date u FL domenu.

Ove interpretacije su veoma značajne prilikom projektovanja funkcije jezgra, [29], [39], [194], i prilikom implementacije pojedinih distribucija. Na slici I.3.(b) su prikazani odnosi među ove četiri interpretacije Cohenove klase.

Poželjne osobine distribucija i odgovarajuća ograničenja funkcije jezgra, predstavljena u Tabeli I.2, su uglavnom prenijeta iz [30], [32] (osobine P0-P10), dok je osobina P11 uvedena u [29], [75]. Umjesto P11, mogla se razmatrati reverzibilnost i unitarnost distribucija iz Cohenove klase, [35], [37]. U radu je, međutim, dat prioritet redukovaniju interferencije i odlučeno je da se ta osobina kombinuje sa P0-P10. Uz to, poznato je da nijedna distribucija ne zadovoljava sve poželjne osobine navedene u Tabeli I.2. Najčešća osobina koja nije zadovoljena je P0 - nenegativnost. Ovu osobinu zadovoljava samo Spectrogram. Svaka distribucija, zajedno sa svojim prednostima i nedostacima, odgovara samo određenom tipu signala i tipu aplikacije. Stoga je i izbor distribucije povezan sa karakteristikama analiziranog signala i primjenom same reprezentacije, [4], [16].

Na koncu, vratimo se spektrogramu, ovog puta sa drugog aspekta: *postojanja kros-komponenti samo u presječnim tačkama komponenti signala u TF ravni*. Ranije smo zaključili da je spektrogram član Cohenove klase kvadratnih

distribucija, te predstavili njegovu funkciju jezgra u AF domenu. Znajući veze među pojedinim domenima, lako je pronaći njegovu funkciju jezgra u ostalim domenima:

$$\begin{aligned}\varphi_{SPEC}(t, \tau) &= 2\pi R_w(t, \tau), \\ c_{SPEC}(\Theta, \tau) &= 2\pi AF_w(\Theta, \tau), \\ \Psi_{SPEC}(\Theta, \omega) &= R_W(\Theta, \omega), \\ \Pi_{SPEC}(t, \omega) &= 2\pi WD_w(t, \omega).\end{aligned}\quad (\text{I.76})$$

Primijetimo da se spektrogram može posmatrati kao dvodimenzionala konvolucija dvije WD (WD signala $f(t)$ i WD funkcije prozora $w(\tau)$) u TF domenu, ili, ekvivalentno, kao dvodimenzionala FT proizvoda dvije AF,

$$\begin{aligned}SPEC_f(t, \omega) &= \frac{1}{2\pi} \int_u \int_s WD_f(u, s) WD_w(t-u, \omega-s) duds \\ &= 2\pi \int_\Theta \int_\tau AF_f(\Theta, \tau) AF_w(\Theta, \tau) e^{-j(\Theta t + \omega \tau)} d\Theta d\tau.\end{aligned}\quad (\text{I.77})$$

Predstavili smo STFT linearnom transformacijom, te, kao posljedicu ove osobine, zaključili da ne pati od efekata interferencije prilikom analize multikomponentnih signala. Međutim, spektrogram je bilinearna transformacija (primijetimo da integral spektrograma po čitavoj TF ravni daje proizvod energije signala i energine funkcije prozora). Dakle, slično kao i WD, spektrogram pati od pojave kros-komponenti. Dokazali smo, međutim, da su u mnogim aplikacijama one neupadljive, odnosno da efekati interferencije kod spektrograma dolaze do izražaja samo kada komponente signala nijesu razdvojene u TF ravni. Razlozi za isticanje ovog efekta se nalaze u filtriranju signala niskopropusnim filtrom, definisanim ambiguity funkcijom upotrebljavane funkcije prozora, [51], [74]. Uz to, spektrogram je jedina distribucija koja zadovoljava osobinu nenegativnosti P0. Ovo je posebno značajno u slučajevima kada ga želimo interpretirati kao raspodjelu energije analiziranog signala u TF ravni. Spektrogram, međutim, ne zadovoljava mnoge poželjne osobine (P5-P10 iz Tabele I.2). Ponovimo, uz to, da zahtijeva kompromisani izbor širine funkcije prozora u cilju postizanja zadovoljavajuće vremenske i frekvencijske rezolucije.

Ograničenja i nedostaci WD i spektrograma objašnjavaju razloge za neprekidnim ulaganjem napora u cilju definisanja metoda kojima bi uočeni nedostaci bili otklonjeni. Pored veoma detaljno izučavanog S-metoda, poglavljje I.5, predlaže se čitav set distribucija kojima se značajno potiskuju efekti interferencije među komponentama analiziranog multikomponentnog signala, [29], [35], [65], [75], [194]. Sama metodologija upotrijebljena za projektovanje ovih distribucija, kao i najznačajniji efekti postignuti tom prilikom su ukazali na njihov zajednički naziv, distribucije za redukovanje interferencije (RID distribucije).

I.8. DISTRIBUCIJE ZA REDUKOVANJE INTERFERENCIJE - RID DISTRIBUCIJE

Procedura za projektovanje distribucija za redukovanje interferencije se temelji na zadovoljenju osobine P10, Tabela I.2, zajedno sa zadovoljavanjem ostalih poželjnih osobina, P1-P9. Iako ne zadovoljavaju osobinu P0, RID distribucije zadovoljavaju veći dio poželjnih osobina, obezbeđujući, uz to, visoku vremensku i frekvencijsku rezoluciju. Potreban i dovoljan uslov za zadovoljenje ograničenja Q1-Q11 funkcije jezgra je da za jezgro RID distribucije važi:

$$|c(\Theta, \tau)| \ll 1 \quad \text{za} \quad |\Theta\tau| \gg 0. \quad (\text{I.78})$$

Razmatranjem dualnih osobina iz Tabele I.2, predlaže se, [75], procedura za projektovanje jezgra RID distribucije:

I korak: Kreira se primitivna realna funkcija $h(t)$ koja zadovoljava sljedeće osobine:

- 1) integral funkcije $h(t)$ po njenoj oblasti definisanosti ima jediničnu vrijednost, $\int_t h(t)dt = 1$;
- 2) $h(t)$ je simetrična funkcija, $h(-t) = h(t)$;
- 3) $h(t)$ je ograničena na intervalu $[-1/2, 1/2]$, tj., $h(t) = 0$, za $|t| > 1/2$;
- 4) $h(t)$ je glatka funkcija na krajevima intervala definisanosti, tako da njen frekvencijski odziv ima veoma malu vrijednost, $|H(\Theta)| \ll 1$ za $|\Theta| \gg 0$, gdje je $H(\Theta) = FT[h(t)]$.

II korak: Pronalazi se FT funkcije $h(t)$:

$$H(\Theta) = \int_t h(t)e^{-j\Theta t} dt. \quad (\text{I.79})$$

III korak: Zamjenjuje se promjenljiva Θ sa $\Theta\tau$ u (I.79). Time se dobija jezgro $c(\Theta, \tau)$ kao funkcija proizvoda promjenljivih Θ i τ , [35],

$$c(\Theta, \tau) = H(\Theta\tau). \quad (\text{I.80})$$

Dokaz:

Navedena procedura obezbeđuje zadovoljenje velikog dijela posmatranih poželjnih osobina. Podimo redom. Funkcija jezgra $c(\Theta, \tau)$ kao funkcija proizvoda promjenljivih Θ i τ , u cilju zadovoljenja marginalnih osobina Q4-Q5, zahtijeva zadovoljavanje jednakosti:

$$c(\Theta, 0) = c(0, \tau) = \int_t h(t)dt, \quad (\text{I.81})$$

odnosno, ispunjenje osobine 1) iz I koraka. Zadovoljavajući marginalne osobine, osobinom 1) iz I koraka se zadovoljavaju i organičenja Q6 i Q7, pod uslovom postojanja prvog izvoda funkcije $H(\Theta)$, pošto je:

$$\frac{dH(\Theta)}{d\Theta} = \int_t -jth(t)e^{-j\Theta t} dt = 0. \quad (I.82)$$

Osobinom 2) iz I koraka je omogućeno postizanje realnosti funkcije $H(\Theta)$,

$$H^*(\Theta) = \int_t h(t)e^{j\Theta t} dt = \int_t h(-t)e^{-j\Theta t} dt = H(\Theta), \quad (I.83)$$

čime je implicirano ograničenje Q1. Upotrebljavajući osobinu skaliranja FT, jednostavno se pronađa funkcija jezgra RID distribucije u TL domenu:

$$\varphi(t, \tau) = \int_{\Theta} H(\Theta\tau) e^{-j\Theta t} d\Theta = \int_u h(u) \int_{\Theta} e^{-j\Theta(u\tau+t)} d\Theta du = \frac{2\pi}{|\tau|} h(-t/\tau). \quad (I.84)$$

Zadovoljavajući osobinu 3) iz I koraka, sada je lako zaključiti de važi:

$$\varphi(t, \tau) = 0 \quad \text{za } |\tau| < 2|t|, \quad (I.85)$$

odnosno, da je zadovoljeno ograničenje Q8. Primjenjujući osobinu dualnosti funkcije jezgra u TL i FL domenu jednostavno zaključujemo da je istovremeno zadovoljeno i ograničenje Q9 funkcije jezgra. Takođe, ograničenja Q2 i Q3 su automatski zadovoljena prethodnom procedurom, pošto je obezbijeđeno da $c(\Theta, \tau)$ ne zavisi od t ili od ω .

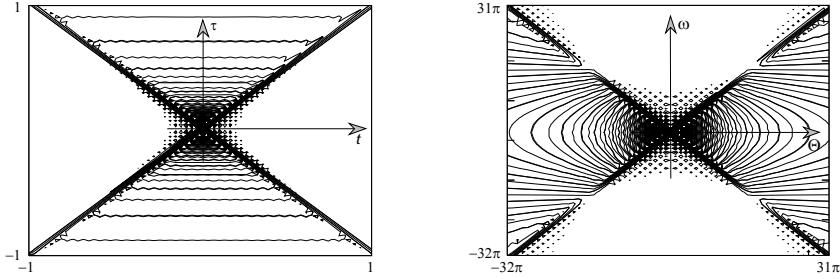
Osobina 4) iz I koraka ima centralno mjesto u obezbjeđivanju potiskivanja efekata interferencije (osobina P10 iz Tabele I.2). Naime, auto-članovi su locirani u okolini ishodišta $\Theta - \tau$ domena, dok se kros-komponente nalaze na određenoj udaljenosti od ishodišta, [51], [63], [129] i poglavlj I.6. Stoga se jezgrom tipa neskopropusnog filtra, uvedenim osobinom 4) iz koraka I, mogu efikasno redukovati efekti interferencije, uz istovremeno zadržavanje rezolucije prilikom reprezentacije auto-članova. Drugim riječima, lako je zaključiti da je ova osobina ekvivalentna ograničenju Q10 iz Tabele I.2. ■

Primijetimo da koraci II i III upotrebljavaju osobinu skaliranja FT i dualnost osobina P4-P5, P6-P7 i P8-P9. Rezultat cjelokupne procedure je RID jezgro sa osobinom $c(\Theta, \tau) = c(\Theta\tau)$, [35], [37]. Osobinama 1) - 4) I koraka definisana je kros-konusna forma RID jezgra u TL domenu, slika I.4.

Koristeći primitivnu funkciju $h(t)$, projektovanu prema zahtjevima iz predložene procedure, RID distribucije se mogu, upotrebljavajući razvijeni oblik (I.71) interpretacije Cohenove klase distribucija u TL domenu, predstaviti u zajedničkoj integralnoj formi izrazom:

$$RID_f(t, \omega; h) = \iint_{u \tau} \frac{1}{|\tau|} h((u-t)/\tau) f(u + \tau/2) f^*(u - \tau/2) e^{-j\omega\tau} du d\tau. \quad (I.86)$$

Upoređujući prethodni izraz sa adekvatnim izrazom za Cohenovu klasu distribucija, zaključujemo da RID distribucije imaju sljedeće oblike funkcije jezgra u (t, τ) , (Θ, τ) , (ω, Θ) i (t, ω) domenima, respektivno:



Slika I.4: Jezgro Born-Jordanove distribucije u TL i FL domenu

$$\varphi_{RID}(t, \tau) = \frac{2\pi}{|\tau|} h(t/\tau), \quad (I.87)$$

$$\Psi_{RID}(\Theta, \omega) = \frac{4\pi^2}{|\Theta|} h(\omega/\Theta), \quad (I.88)$$

$$c_{RID}(\Theta, \tau) = H(\Theta\tau), \quad (I.89)$$

$$\Pi_{RID}(t, \omega) = 2\pi \int_{\tau} \frac{1}{|\tau|} h(t/\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau. \quad (I.90)$$

Primijetimo da jezgro RID distribucije u (Θ, ω) domenu ima kros-konusni oblik, odnosno isti oblik kao u (t, τ) domenu, jednačine (I.88) i (I.87). Ova činjenica se jednostavno uočava i sa slike I.4. Oblici funkcije jezgra najčešće upotrebljavanih RID distribucija, u svim posmatranim domenima (I.87)-(I.90) su prikazane u [68].

U prethodnoj proceduri, za projektovanje funkcije jezgra, se vremenskim oblikom funkcije $h(t)$ određuje koncentraciju signala (njegovih auto-članova) na trenutnoj frekvenciji, zajedno sa izvjesnim stepenom potiskivanja efekata interferencije. Kao što se moglo očekivati potrebno je napraviti kompromis u cilju zadovoljenja oba efekta. Naime, ukoliko je $h(t)$ oblika Dirakovog δ impulsa (kao kod WD), rezultantnom distribucijom se ističu efekti interferencije, dok se zadržava visoka koncentracija auto-članova. Sa druge strane, ukoliko je $h(t)$ glatka funkcija sa veoma niskim frekvencijskim sadržajem, rezultantna distribucija efikasno potiskuje efekte interferencije na račun postignute koncentracije auto-članova. Za razne oblike funkcije $h(t)$ dobijaju se jezgra različitih distribucija. Na primjer, impulsnim, pravougaonim i Gaussovim prozorom dobijamo jezgra WD, Born-Jordanove i Choi-Williamsove distribucije. U Tabeli I.3 su predstavljene distribucije koje mogu biti dobijene zamjenom pojedinih vremenskih oblika funkcije $h(t)$, kao i osobine iz korpusa poželjnih osobina koje one zadovoljavaju.

Uz navedene, veoma često upotrebljavane distribucije iz RID klase su Zao-Atlas-Marksova, $c(\Theta, \tau) = \text{rect}(\Theta\tau/\alpha)$, i

Butterworthova distribucija, $c(\Theta, \tau) = 1/[1 + (\tau/\tau_0)^{2M} (\Theta/\Theta_0)^{2N}]$, $\tau_0 = \Theta_0 = 2\pi/3$, $M = N = 1$.

Tabela I.3: Pojedini TF metodi (dobijeni za specifične oblike funkcije $h(t)$) i osobine koje oni zadovoljavaju

TFD	Funkcija $h(t)$	$c(\Theta, \tau)$	P0	P1	P2	P3	P4	P5	P6	P7	P8	P9	P10
WD	$\delta(t)$	1		x	x	x	x	x	x	x	x	x	x
RD	$\delta(t + 1/2)$	$\exp(j\Theta\tau/2)$			x	x	x	x			x	x	
GWD	$\delta(t + \alpha)$	$\exp(j\alpha\Theta\tau)$			x	x	x	x					
Re[RD]	$\frac{\delta(t-1/2)+\delta(t+1/2)}{2}$	$\cos(\Theta\tau/2)$		x	x	x	x	x	x	x	x	x	x
CWD	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{t^2}{\sigma^2}\right)$	$\exp\left(-\frac{(\Theta\tau)^2}{\sigma^2}\right)$		x	x	x	x	x	x	x			x
Sinc	$\frac{\sin(\alpha t/2)}{\pi t}$	$\text{rect}(\Theta\tau/\alpha)$		x	x	x	x	x	x	x	x		x
SPEC		$AF_w(\Theta\tau)$		x	x	x	x						x
BJD*	$\text{rect}(t)$	$c(\Theta\tau) = \frac{\sin(\Theta\tau/2)}{\Theta\tau/2}$		x	x	x	x	x	x	x	x	x	x
P-CW*	$\frac{w(t)}{\sqrt{2\pi}\alpha} \exp\left(-\frac{t^2}{2\alpha^2}\right)$	$e^{-\frac{\alpha^2\Theta_1^2}{2}} * W(\Theta_1)$		x	x	x	x	x	x	x	x	x	x
P-Sinc*	$\frac{\sin(\alpha t/2)}{\pi t} w(t)$	$\text{rect}(\frac{\Theta_1}{\alpha}) * W(\Theta_1)$		x	x	x	x	x	x	x	x	x	x
Troug.*	$2 - 4 t , t < 0.5$	$c^2(\Theta\tau)$		x	x	x	x	x	x	x	x	x	x

RD - Rihaczekova distribucija, GWD - generalisana WD, CWD - Choi-Williamsova distribucija,

BJD - Born-Jordanova distribucija, P - pseudo forma pojedine distribucije

$\Theta_1 = \Theta\tau$, $W(\Theta) = FT[w(\tau)]$

Sa * su označeni metodi koji pripadaju RID klasi distribucija.

I.9. DISTRIBUCIJE VIŠEG REDA - L-WIGNEROVA DISTRIBUCIJA

Kvadratnim distribucijama je nemoguće postići idealnu koncentraciju analiziranog FM signala, sa izuzetkom konstantnog FM signala, kao i linearog FM signala analiziranog Wignerovom distribucijom. U cilju povećanja koncentracije nelinearnih FM signala na njihovoj trenutnoj frekvenciji, definišu se, [125], [127]-[130], [133]-[136], TF distribucije višeg reda. Analizirajmo, u tom smislu, kompleksni FM signal $f(t) = r(t)\exp(j\phi(t))$, sa sporopromjenljivim

vom amplitudom $r(t)$ u poređenju sa promjenama faze $\phi(t)$, $|r^{(1)}(t)| \ll |\phi^{(1)}(t)|$. Pretpostavljajući da postoji prvi izvod faze analiziranog signala $\phi^{(1)}(t)$, trenutna frekvencija analiziranog signala se definiše u obliku, [17]:

$$\omega_i(t) = \frac{d\phi(t)}{dt} \equiv \phi^{(1)}(t). \quad (\text{I.91})$$

Za signale predstavljene u ovoj formi definiše se, [129], idealna distribucija (ITFD) trenutne snage $2\pi|r(t)|^2$, koja je koncentrisana na trenutnoj frekvenciji $\omega_i(t)$:

$$ITFD_f(t, \omega) = 2\pi|r(t)|^2 \delta[\omega - \phi^{(1)}(t)] \quad (\text{I.92})$$

Uporedimo dosad posmatrane distribucije sa ITFD. Napišimo, najprije, ITFD u formi (I.45). Pronalaženjem dvodimenzione FT prethodnog izraza, a potom njene inverzne dvodimenzione FT, dobijamo:

$$ITFD_f(t, \omega) = \frac{1}{2\pi} \int \int \int r^2(u) e^{j\phi^{(1)}(u)\tau} e^{-j\Theta t - j\omega\tau + j\Theta u} du d\Theta d\tau. \quad (\text{I.93})$$

Upoređujući posljednju jednakost sa definicionim izrazom (I.51) i upotrebljavajući jedinstvenost FT, lako se pokazuje da će posmatrana distribucija biti idealna ukoliko je:

$$c(\Theta, \tau) \exp(j\phi(t + \tau/2) - j\phi(t - \tau/2)) = \exp(j\phi^{(1)}(t)\tau). \quad (\text{I.94})$$

Prilikom izvođenja jednačine (I.94) prepostavljena je konstantna amplituda $r(t)$ unutar vremenskog intervala ograničenog funkcijom jezgra, $r(t + \tau/2)r(t - \tau/2)c(\Theta, \tau) \cong r^2(t)c(\Theta, \tau)$. Posmatrajući, u disertaciji interesantan, slučaj funkcije jezgra nezavisne od analiziranog signala i razvijajući $\phi(t \pm \tau/2)$ u Taylorov red u okolini tačke $t=0$, jednostavno se pokazuje, [129], da se idealna TF reprezentacija postiže za $\phi^{(3)}(t) = 0$ i $c(\Theta, \tau) \equiv 1$. Drugim riječima, idealna distribucija se dobija jedino analizom linearног FM signala, $\phi(t) = at^2/2 + bt$, i to sa WD, $c(\Theta, \tau) \equiv 1$. Cohenova distribucija ovog signala je:

$$CD(t, \omega) = r^2(t) \int_{-\infty}^{\infty} c(-a\tau, \tau) e^{-j(\omega - \phi^{(1)}(t))\tau} d\tau. \quad (\text{I.95})$$

Primjetimo da analizom konstantnog FM signala, $\phi(t) = bt$, $a = 0$, postižemo idealnu koncentraciju signala na trenutnoj frekvenciji, uz zadovoljenje marginalnog uslova po frekvenciji, $c(0, \tau) = 1$. Ovaj uslov zadovoljavaju mnoge distribucije iz Cohenove klase, Tabele I.1-I.3.

Polazeći od idealnosti TF reprezentacije linearног FM signala prilikom njegove analize sa WD, u [127]-[130], [133]-[136] je predložen metod za poboljšanje koncentracije signala na njegovoj trenutnoj frekvenciji u slučaju signala sa proizvoljnim promjenama trenutne frekvencije. Metod je zasnovan na linearizaciji trenutne frekvencije u okolini

posmatranog trenutka t , uz jednovremeno zadržavanje nepromjenljivosti $\phi^{(1)}(t)$. Distribucija sa ovim osobinama se naziva L-Wignerovom distribucijom (LWD). Njena pseudo forma je definisana sa:

$$PLWD_f(t, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} w_L(\tau) f^L(t + \tau/(2L)) f^{*L}(t - \tau/(2L)) e^{-j\omega\tau} d\tau, \quad (I.96)$$

gdje je $w_L(\tau)$ prozor sa istim osobinama kao prozor $w(\tau)$ kod pseudo WD, dok je L cijeli ili racionalan broj veći od 0. Primijetimo da se za $L = 1$ dobija pseudo WD.

U cilju izvođenja neophodnih zaključaka, uporedimo L-Wignerovu distribuciju sa idealnom TF reprezentacijom proizvoljnog FM signala $f(t) = r(t) \exp(j\phi(t))$. Pretpostavljajući, kao i ranije, sporopromjenljivu amplitudu $r(t)$ ovog signala i razvijajući $\phi(t \pm \tau/2)$ u Taylorov red u okolini $t=0$, uobičajenim transformacijama pokazujemo da je:

$$PLWD_f(t, \omega) = \frac{1}{2\pi} r^{2L}(t) \delta(\omega - \phi^{(1)}(t)) *_{\omega} W_L(\omega) *_{\omega} FT[\exp(j(\phi^{(3)}(t + \tau_1) + \phi^{(3)}(t + \tau_2))/(24L^2))], \quad (I.97)$$

gdje je $W_L(\omega) = FT[w_L(\tau)]$ i $\tau_1, \tau_2 \in [0, \tau/(2L)]$. Primijetimo da izobličenja u predstavljanju analiziranog signala na njegovoj trenutnoj frekvenciji potiču od članova neparnog reda (počev od trećeg) u razvoju faze signala u stepeni red, te da su umanjena L^{n-1} puta u poređenju sa slučajem pseudo WD, (kada je $L=1$). Drugim riječima, vrijednosti $L > 1$ obezbjeđuju značajno poboljšanje koncentracije analiziranog signala na trenutnoj frekvenciji u odnosu na slučaj pseudo WD. Na primjer, dominantni treći član se za $L=2$ dijeli sa 4 što je ekvivalentno redukovani snage ovog člana za 12dB. Za $L \rightarrow \infty$ ovim metodom se postiže gotovo idealna koncentracija analiziranog signala.

Primijetimo da, pored navedenih prednosti, L-Wignerova distribucija pokazuje izvjesne nedostatke prilikom analize multikomponentnih signala, koji su značajnije izraženi nego u slučaju WD. Naime, L -tim stepenom analiziranog signala u definiciji L-Wignerove distribucije se unose dodatne komponente signala u poređenjem sa WD⁵. Navedeni problem se prevazilazi upotrebom S-metoda razvijenog u cilju potiskivanja efekata interferencije iz WD. Naime, povezujući $PLWD_f(t, \omega)$ sa $L=2$ i pseudo WD jednostavno se uočava mogućnost uvođenja rekurzivne relacije:

⁵Postoje situacije kada se L-Wignerovom distribucijom značajno redukuju efekti interferencije među komponentama signala separiranim u TF ravni. Posmatrajmo, u tom cilju, dvokomponentni signal čije komponente postoje u domenima $|t - t_1| < T_1$ i $|t - t_2| < T_2$. Kros-komponente su u (I.96) locirane na intervalima: $|t - (t_1 + t_2)/2| < (T_1 + T_2)/2$ i $|\tau/L - (t_1 - t_2)/2| < (T_1 + T_2)/2$ po t i τ osi, respektivno. Posmatrajmo, uz to, slučaj prozora $w(\tau)$ nepromjenljive širine.

Zapazimo da se domen predstavljen drugom nejednakosću značajno sužava kako L raste, tako da za $L \rightarrow \infty$ praktično ne postoji, odnosno da su kros-komponente potpuno potisnute među separiranim komponentama analiziranog signala.

$$PLWD_{L=2}(t, \omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} PWD(t, \omega + \Theta) PWD(t, \omega - \Theta) d\Theta, \quad (I.98)$$

odnosno modifikovane pseudo L-Wignerove distribucije, sa eliminisanim efektima interferencije, u formi:

$$PLWD_{L=2}(t, \omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} P(\Theta) PWD(t, \omega + \Theta) PWD(t, \omega - \Theta) d\Theta. \quad (I.99)$$

Prozor $P(\Theta)$ je sa istim osobinama kao prilikom definisanja S-metoda. Sa $PLW_{L=2}(t, \omega)$ je označena $PLWD_f(t, \omega)$

sa $L=2$. Analogno ovom postupku, frekvencijskom konvolucijom distribucija višeg reda dobijamo:

$$PLWD_{2L}(t, \omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} P(\Theta) PLWD_L(t, \omega + \Theta) PLWD_L(t, \omega - \Theta) d\Theta. \quad (I.100)$$

Postupkom (I.100), povećavanje stepena distribucije L , postižemo veću koncentraciju generalisane snage analiziranog signala $|f(t)|^{2L}$ na trenutnoj frekvenciji. Istovremeno se potiskuju neželjeni efekti interferencije.

I.10. L-KLASA DISTRIBUCIJA

Na isti način, kojim je na osnovu WD generalisana Cohenova klasa, izvršena je generalizacija L-klase distribucija višeg reda na osnovu L-Wignerove distribucije, [133]. Naime, uvodeći L-ambiguity funkciju i koristeći je prilikom definisanja L-generalisane karakteristične funkcije, definišemo L-klasu distribucija višeg reda (LD) kroz korake definisane u narednom izlaganju.

Definicija 1. L-ambiguity funkcija je dvodimenziona FT L-Wignerove distribucije,

$$LAF_f(\Theta, \tau) = \int_u f^L(u + \frac{\tau}{2L}) f^{*L}(u - \frac{\tau}{2L}) e^{-j\Theta u} du. \quad (I.101)$$

Definicija 2. Proizvodom L-ambiguity funkcije $LAF_f(\Theta, \tau)$ i proizvoljne funkcije jezgra $c(\Theta, \tau)$ dobijamo L-generalisalu karakterističnu funkciju $MG_f(\Theta, \tau)$.

Definicija 3. L-klasa distribucija je inverzna dvodimenziona FT L-generalisane karakteristične funkcije,

$$LD_f(t, \omega) = \frac{1}{2\pi} \iint_{\Theta u \tau} c(\Theta, \tau) f^L(u + \frac{\tau}{2L}) f^{*L}(u - \frac{\tau}{2L}) e^{-j\omega\tau - j\Theta u + j\Theta t} dud\Theta d\tau. \quad (I.102)$$

Primjetimo da se za $L = 1$ dobijaju distribucije iz Cohenove klase.

Analogno dokazivanju poželjnih osobina kod distribucija iz Cohenove klase, [30]-[32], [65], [75], u slučaju distribucija višeg reda se može izvesti, [133], niz sličnih osobina i njima odgovarajućih ograničenja funkcije jezgra. Ovdje ćemo se zadržati samo na reprezentaciji FM signala.

Teorema. Distribucija višeg reda iz L-klase, za $L \rightarrow \infty$, ima formu idealne distribucije, $A^{2L}W(\omega - \phi^{(1)}(t))$, za svaki FM signal oblika $f(t) = A \exp(\phi(t))$, ukoliko su izvodi faze analiziranog signala $\phi(t)$ konačni i ukoliko je $\lim_{L \rightarrow \infty} [c(\Theta, \tau)] = w(\tau)$, gdje je $w(\tau)$ funkcija prozora konačne širine, $W(\omega) = FT[w(\tau)]$.

Dokaz:

Pomenuto je ranije da se idealna kvadratna distribucija definiše jednim od sljedećih izraza: $2\pi A^2 \delta(\omega - \phi^{(1)}(t))$ ili $A^2 W(\omega - \phi^{(1)}(t))$. Idealna distribucija se definiše drugim izrazom u slučaju konačnog vremenskog intervala određenog funkcijom prozora $w(\tau) = IFT[W(\omega)]$. Kod distribucija iz L-klase idealnom reprezentacijom će biti smatrana matematička forma navedena u postavci teoreme. Razvijajući $\phi(u \pm \tau/(2L))$ u Taylorov red (do trećeg člana u njegovom razvoju) u okolini tačke $u = 0$, u slučaju pretpostavljenog FM signala, imamo:

$$f^L(u + \frac{\tau}{2L}) f^{*L}(u - \frac{\tau}{2L}) = A^{2L} e^{j\phi^{(1)}(u)\tau} \exp[j \frac{\phi^{(3)}(u + \tau_1) + \phi^{(3)}(u - \tau_2)}{3! L^2} (\tau/2)^3], \quad (I.103)$$

gdje je $0 \leq |\tau_1, \tau_2| \leq |\tau/(2L)|$. Pretpostavljajući konačne vrijednosti izvoda faze analiziranog signala $\phi^{(3)}(t)$ i $\phi^{(n)}(t)$, za $n \geq 3$, kao i konačne vrijednosti promjenljive τ , jednostavno se može zaključiti da je:

$$\lim_{L \rightarrow \infty} [\exp(j \frac{\phi^{(3)}(t + \tau_1) + \phi^{(3)}(t - \tau_2)}{3! L^2} (\tau/2)^3)] = 1 \quad (I.104)$$

Pokazuje se, [133], da prethodni izraz veoma brzo konvergira zbog obrnuto kvadratne zavisnosti od reda posmatrane distribucije, $1/L^2$, tako da se sljedeći izraz može smatrati tačnim već za $L \geq 4$,

$$\begin{aligned} LD_f(t, \omega) &\cong \frac{A^{2L}}{2\pi} \iint_{\Theta u \tau} c(\Theta, \tau) e^{j\phi^{(1)}(u)\tau} e^{-j\omega\tau - j\Theta u + j\Theta t} du d\Theta d\tau = \\ &= A^{2L} \int_u \Pi(t - u, \omega - \phi^{(1)}(u)) du. \end{aligned} \quad (I.105)$$

Ukoliko je $\lim_{L \rightarrow \infty} [c(\Theta, \tau)] = w(\tau)$, lako je pokazati da važi: $\Pi(t, \omega) = \delta(t)W(\omega)$ i $LD_f(t, \omega) = A^{2L}W(\omega - \phi^{(1)}(t))$. ■

I.11. DISKRETNI OBLICI VREMENSKO-FREKVENCIJSKIH REPREZENTACIJA

U cilju praktične primjene i numeričkih izračunavanja navedenih distribucija neophodno je izvršiti njihovu diskretizaciju, odnosno njihovo odabiranje, najprije u vremenskom, a potom i u frekvencijskom domenu. Prilikom diskretizacije upotrebljavamo poznati metod razvijen prilikom diskretizacije FT, [105], [108]. Međutim, u ovom

slučaju je neophodno posvetiti posebnu pažnju diskretizaciji kvadratnih distribucija. Razlog tome je pojava neželjenih efekata aliasinga, [33], [77], koji su posljedica primijenjenog metoda diskretizacije (saglasno teoremi o odabiranju).

Diskretna STFT

Primjenjujući pravougaono pravilo integracije, uz teoremu o odabiranju sa korakom odabiranja T_F , na STFT (I.1) analiziranog signala $f(t)$ dobijamo STFT diskretnog signala $f(n)$ (dobijenog odabiranjem signala $f(t)$),

$$STFT_f(n, \theta) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} f(n+i)w^*(i)e^{-j\theta i}, \quad (\text{I.106})$$

gdje je $STFT_f(n, \omega) = STFT_f(nT_F, \omega)/T_F$, $f(n) = f(nT_F)$ i $\theta = \omega T_F$ diskretna učestanost. Saglasno teoremi o odabiranju, maksimalni korak odabiranja je recipročna vrijednost dvostrukе maksimalne frekvencije signala (za analizirani signal pretpostavljamo da je ograničen u frekvencijskom domenu), [105], [108]. $STFT_f(n, \theta)$ je periodična funkcija, po θ , sa periodom 2π . Pretpostavimo da je sa N označena širina funkcije prozora $w(n)$. Odabiranjem prethodnog izraza u frekvencijskom domenu, sa korakom $2\pi/N$, dobijamo diskretnu STFT,

$$STFT_f(n, k) = \sum_{i=-N/2+1}^{N/2} f(n+i)w^*(i)e^{-j\frac{2\pi}{N}ki}. \quad (\text{I.107})$$

Pošto je spektrogram (I.5) definisan kvadratom modula STFT, jednostavno možemo napisati njegov diskretni oblik,

$$SPEC_f(n, k) = \left| \sum_{i=-N/2+1}^{N/2} f(n+i)w^*(i)e^{-j\frac{2\pi}{N}ki} \right|^2. \quad (\text{I.108})$$

Diskretna WD

Već je apsolvirano da se WD može predstaviti kao FT autokorelacione funkcije $R_f(t, \tau)$, koja je proizvod analiziranog signala sa svojim konjugovano-kompleksnim inverznim likom. Drugim riječima, korak kojim odabiramo signal u vremenskom domenu mora biti dva puta manji od koraka određenog teoremom o odabiranju. Ovo je posljedica činjenice da je maksimalna frekvencija autokorelacione funkcije dva puta veća od maksimalne frekvencije analiziranog signala, [33], [108]. Prema tome, korak odabiranja potreban za diskretizaciju WD je:

$$T_W = 1/(4f_m) = T_F/2. \quad (\text{I.109})$$

Primjenjujući postupak, sproveden prilikom diskretizacije STFT, [105], [108] i jednačina (I.107), na WD definisanu izrazom (I.23), najprije dobijamo WD diskretnog signala $f(n)$,

$$WD_f(n, \theta) = 2 \sum_{i=-\infty}^{\infty} f(n+i)f^*(n-i)e^{-j2\theta i}, \quad (\text{I.110})$$

a potom i diskretnu WD,

$$WD_f(n, k) = 2 \sum_{i=-\infty}^{\infty} f(n+i) f^*(n-i) e^{-j \frac{2\pi}{2N} 2ki}. \quad (\text{I.111})$$

Primijetimo da je perioda WD diskretnog signala $\theta_p = \pi$, tako da je broj odbiraka, uzet prilikom diskretizacije WD, dva puta veći od broja odabiraka potrebnog za diskretizaciju FT istog signala. Drugim riječima, ukoliko je N - broj odbiraka potreban za računanje diskretnog FT, neophodno je uzeti $2N$ odbiraka WD diskretnih signala u frekvencijskom domenu po dvostrukoj periodi, 2π . U suprotnom dolazi do neželjenih efekata aliasinga, [33], [77].

Ipak, u cilju prevazilaženja efekata aliasinga, najčešće se vrši TF analiza analitičke forme analiziranog realnog signala, [30]-[33], [77]. Naime, spektar analitičkog signala se može dobiti uzimajući nulte vrijednosti na negativnim, odnosno dvostrukе vrijednosti spektra realnog signala na pozitivnim učestanostima, [77]. Ovim postupkom se istovremeno eliminira kros-komponente koje su posljedica međusobne interakcije komponenti posmatranog realnog signala koje se nalaze na pozitivnim i negativnim frekvencijama, [68], [77], [147], [157], [158].

Kao što je ranije navedeno, u praktične svrhe najčešće koristimo pseudo formu WD,

$$PWD_f(n, k) = 2 \sum_{i=-N+1}^N w(i) w(-i) f(n+i) f^*(n-i) e^{-j \frac{2\pi}{2N} 2ki}. \quad (\text{I.112})$$

U prethodnom izrazu je prepostavljena realna funkcija prozora $w(n)$ širine $2N$. Ovim (pogodnim) izborom širine funkcije prozora omogućavamo da diskretna pseudo WD bude identična reprezentaciji, dobijenoj izračunavanjem WD originalnog signala (bez odsjecanja signala funkcijom prozora). Time se prevazilazi moguća greška pri računanju pseudo WD, uslovljena upotrebom funkcije prozora $w(n)$.

Diskretni S-metod

Diskretizaciju S-metoda (I.36) ćemo izvršiti analogno postupku sprovedenom prilikom njegovog izvođenja u kontinualnom domenu, tj. povezujući dva osnovna metoda, upotrebljavana u TF analizi signala, STFT i pseudo formu WD:

$$STFT_f(n, k) = \sum_{i=0}^{N-1} f(n+i) w(i) e^{-j \frac{2\pi}{N} ki}, \quad (\text{I.113})$$

$$PWD_f(n, k) = \sum_{i=0}^{N-1} w(i) w(-i) f(n+i) f^*(n-i) e^{-j \frac{2\pi}{N} 2ki}. \quad (\text{I.114})$$

N predstavlja broj odbiraka (uzet u frekvencijskom domenu) ne manji od broja odbiraka potrebnog za diskretizaciju STFT. Razlog uzimanja predloženog broja odbiraka je što on ne igra značajnu ulogu prilikom definisanja diskretnog S-metoda, pošto ova distribucija ne pati od problema aliasinga, osim na krajevima osnovnog intervala.

Primjenjujući inverznu FT na jednačinu (I.113) i znajući da je diskretna STFT periodična funkcija sa periodom N , $STFT_f(n, k + N) = STFT_f(n, k)$, $STFT_f(n, -k) = STFT_f(n, N - k)$, zaključujemo da (I.114) predstavlja konvoluciju diskretnog STFT i njene konjugovano-kompleksne vrijednosti,

$$PWD_f(n, k) = \frac{1}{N} \sum_{l=-N/2}^{N/2-1} STFT_f(n, k+l) STFT_f^*(n, k-l). \quad (\text{I.115})$$

U simetričnoj formi, posmatrano u odnosu na granice sumiranja, dobijamo:

$$PWD_f(n, k) = \frac{1}{N} \sum_{l=-N/2}^{N/2} \alpha(l) STFT_f(n, k+l) STFT_f^*(n, k-l), \quad (\text{I.116})$$

gdje je $\alpha(l)=1$, za sve vrijednosti l , izuzev za $|l|=N/2$, kada je: $\alpha(\pm N/2)=1/2$.

Ako posljednju jednačinu shvatimo kao usrednjenu vrijednost proizvoda STFT i njene konjugovano-kompleksne vrijednosti, diskretni S-metod možemo napisati u sljedećoj formi:

$$SM_f(n, k) = \frac{1}{2L_d+1} \sum_{l=-L_d}^{L_d} P_d(l) STFT_f(n, k+l) STFT_f^*(n, k-l), \quad (\text{I.117})$$

gdje je $W_p = 2L_d + 1$ širina diskretnog prozora $P_d(l)$. Primijetimo da za:

- 1) $P_d(l) = \delta(l)$ dobijamo spektrogram diskretnih signala;
- 2) $P_d(l) = 1$ i širinu prozora $2L_d + 1 = N$ dobijamo diskretni oblik pseudo WD (u kom slučaju bi $\alpha(l)$ bilo uključeno).

Uzimajući u obzir da je:

$$STFT_f(n, k+l) STFT_f^*(n, k-l) + STFT_f(n, k-l) STFT_f^*(n, k+l) = 2 \operatorname{Re}\{STFT_f(n, k+l) STFT_f^*(n, k-l)\},$$

te pretpostavljajući da je $P_d(l)$ - pravougaoni prozor širine $2L_d + 1$,

$$SM_f(n, k) = SPEC_f(n, k) + \frac{2}{2L_d+1} \sum_{l=1}^{L_d} \operatorname{Re}\{STFT_f(n, k+l) STFT_f^*(n, k-l)\}, \quad (\text{I.118})$$

jednostavno zaključujemo da S-metod predstavlja realnu dvo-dimenzionu funkciju.

Podsetimo se činjenice da je, pri diskretizaciji WD, neophodno preodabirati signal da bi se dobila njena diskretna verzija oslobođena aliasinga. Do istih zaključaka možemo doći polazeći od definicije (I.116) diskretnog WD. Naime, poznato je da diskretizacijom FT vršimo njeno periodično produženje, [105], [108]. Do aliasinga kod WD dolazi uslijed međusobne interakcije susjednih komponenti periodično produžene FT prilikom traženja konvolucije (I.116). Prevazilaženje aliasinga se obezbjeđuje dodavanjem nula u frekvencijskom domenu (ili preodabiranjem u vremenskom domenu), prije izračunavanja izraza (I.116) primjenom razvijenih FFT algoritama. U slučaju diskretnog S-metoda

(I.117)-(I.118) i uz pretpostavku broja odbiraka koji odgovara definiciji diskretne STFT, prozor $P_d(l)$ ne dozvoljava preklapanje unutar osnovnog intervala, izuzev, možda, na njegovim krajevima. Naime, na krajevima ovog intervala se može dogoditi da se unutar prozora nađu istovremeno komponente osnovnog i susjednog člana periodično produžene FT. U tim slučajevima, ovaj problem rješavamo direktnim izračunavanjima prema jednačini (I.118) izostavljujući članove koji sadrže $STFT(n, k \pm l)$ izvan osnovnog opsega. U najgorem slučaju, marginalne vrijednosti S-metoda, unutar osnovnog intervala, su jednake vrijednostima spektrograma u tim tačkama.

Zaključimo da, za računanje S-metoda nije potrebno preodabirati signal u vremenskom domenu, što je bio slučaj sa WD. Ovo je omogućeno implementiranjem prozora $P_d(l)$ u definiciji S-metoda, analogno njegovom uvođenju u cilju redukovanja kros-komponenti pri analizi multikomponentnih signala.

Za praktičnu (bilo hardversku ili softversku) implementaciju S-metoda (I.116) potrebno je poznavanje vrijednosti STFT u trenutku n . Vrijednosti STFT mogu biti dobijene upotrebom poznatih FFT rutina, [108], ili korišćenjem rekurzivnog izraza, [105]. Jednostavno se pokazuje, [68], [105], [129], da se, pretpostavljajući pravougaoni prozor $w(i)$, STFT može predstaviti sa:

$$STFT_f^r(n, k) = [f(n + N/2) - f(n - N/2)](-1)^k + STFT_f^r(n-1, k)W_N^{-k}, \quad (\text{I.119})$$

gdje je eksponent r upotrijebljen za označavanje pravougaonog prozora $w(i)$. Pretpostavljajući Hanningov ili Hammingov prozor prethodna jednačina se, u cilju dobijanja STFT, modifikuje, na sljedeći način:

$$STFT_f^H(n, k) = a_{-1}STFT_f(n, k-1) + a_0STFT_f(n, k) + a_1STFT_f(n, k+1), \quad (\text{I.120})$$

gdje su vrijednosti koeficijenata a_{-1} , a_0 , a_1 : (0.25, 0.5, 0.25) i (0.23, 0.54, 0.23) u slučajevima Hanningovog i Hammingovog prozora, respektivno, [47], [126]. Početno izračunavanje STFT vršimo FFT rutinom, a dalja izračunavanja se vrše uz pomoć rekurzivnih izraza (I.119)-(I.120).

U cilju prevazilaženja nedostataka S-metoda sa prozorom nezavisnim od analiziranog signala, uvodi se, poglavljje I.5, prozor sa širinom zavisnom od analiziranog signala. Širinu ovog prozora ćemo, u diskretnom domenu, označavati sa $W_p(n, k) = 2L_d(n, k) + 1$. Ona, za svako n i k , prati širinu STFT pojedine komponente multikomponentnog signala.

Odarana širina prozora $P_{(n, k)}(l)$ je takva da uključuje u sumiranje sve sabirke za koje su $STFT_f(n, k+l)$ i $STFT_f^*(n, k-l)$ različiti od nule i isključuje iz istog procesa one sabirke za koje je bar jedna od ovih komponenti jednaka nuli. Takođe, prekida računanje van komponenti signala. U praktičnim implementacijama navedeni postupak se svodi na upoređivanje vrijednosti $STFT_f(n, k \pm l)$ sa referentnom veličinom R . Za R se uzima razlomljeni dio

maksimalne apsolutne vrijednosti $STFT_f(n,k)$, za $\forall k$ i posmatrani trenutak n , $R = \max_k |STFT_f(n,k)| / Q$, gdje je $1 \leq Q < \infty$. Izbor referentne veličine nije kritičan pošto dobijeni rezultati nijesu previše osjetljivi na R , [171]. Na primjer, varijacije referentne veličine od 10% - 25% od $\max_k |STFT_f(n,k)|$ se ne mogu uočiti u krajnjoj TF reprezentaciji analiziranog signala. Primijetimo da se, kao i u slučaju S-metoda sa konstantnim prozorom $P_d(l)$, pogodnim izborom faktora Q mogu dobiti marginalni slučajevi S-metoda:

- 1) za $Q=1$ - spektrogram analiziranog signala, i
- 2) za $Q \rightarrow \infty$ - pseudo WD.

Na slici I.5.(e) je predstavljen S-metod sa prozorom zavisnim od analiziranog signala, sa referentnom vrijednošću pretpostavljenom sa 20% vrijednosti $\max_k |STFT_f(n,k)|$, $Q=5$.

Diskretna Cohenova klasa distribucija

Sve kvadratne shift-invarijantne distribucije su, u kontinualnom domenu, predstavljene članovima opšte Cohenove klase distribucija. U svrhu njihove praktične implementacije vrši se njihovo odabiranje u vremenskom i u frekvenčnom domenu. Međutim, kao što se dosad moglo primijetiti, ova procedura nije trivijalna uslijed postojanja efekata aliasinga. Postoji nekoliko prilaza za sprovođenje ovog postupka, koji se mogu grubo podijeliti na dva opšta:

1. tradicionalni simetrični prilaz, [189], i
2. alias-free⁶ definicija, [77].

U ovom radu ćemo istaći simetrični prilaz, pošto je blisak načinu definisanja WD i distribucija iz RID klase. Ostale distribucije mogu biti predstavljene analogno svom predstavljanju u kontinualnom domenu.

Prisjetimo se da se opšta Cohenova klasa može predstaviti kao FT generalisane autokorelacione funkcije $R_f(t, \tau)$,

$$CD_f(t, \omega; \phi) = \int_{\tau} R_f(t, \tau) e^{-j\omega\tau} d\tau, \quad (\text{I.121})$$

$$R_f(t, \tau) = \int_u f(u + \tau/2) f^*(u - \tau/2) \phi(t - u, \tau) du. \quad (\text{I.122})$$

Sprovodeći analizu sličnu onoj kod WD, nalazimo da se, u slučaju diskretnog signala $f(n)$, dobijenog odabiranjem $f(t)$, prethodne jednačine mogu predstaviti u sljedećoj formi:

⁶Alias-free je Engleska složenica, često upotrebljavana u literaturi za označavanje diskretnih oblika distribucija koje su oslobođene efekata aliasinga.

$$CD_f(n, \omega; \varphi) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} r_f(n, 2i) e^{-j2\omega i}, \quad (I.123)$$

$$r_f(n, 2i) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} f(m+i) f^*(m-i) \varphi(n-m, 2i). \quad (I.124)$$

gdje su: $n \in \mathbb{Z}$, \mathbb{Z} - skup cijelih brojeva i diskretna učestanost $\omega \in [-\pi, \pi]$. Ova definicija je u literaturi poznata kao generalisana diskretna TF reprezentacija, [16], [35], [97]. $\varphi(n, 2i)$ je diskretni ekvivalent funkcije jezgra $\varphi(t, \tau)$.

Generalisana Cohenova klasa distribucija analiziranog diskretnog signala $f(n)$ je, sada:

$$CD_f(n, \omega; \varphi) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \varphi(n-m, 2i) f(m+i) f^*(m-i) e^{-j2\omega i}. \quad (I.125)$$

Razmotrimo, na jedan interesantan način, [77], izvedenu definiciju diskretne Cohenove klase. Naime, ova definicija, uključujući WD diskretnih signala (sa funkcijom jezgra $\varphi(n, 2i) = 2\delta(n)$), predstavlja periodičnu funkciju po ω , sa periodom π (za razliku od perioda 2π kod diskretnе FT). Ovo je posljedica činjenice da se, iako trenutna autokoreaciona funkcija $R_f(t, \tau)$ zauzima isti opseg po τ -osi kao $f(t)$, samo parno-indeksirane autokorelacije iz skupa $\{r_f(n, 2i)\}$ upotrebljavaju u definiciji diskretne Cohenove klase. Ovo rezultira pododabiranjem za pola po τ -osi. U stvari, upotrebljava se samo polovina $\{f(\text{parno})f^*(\text{parno})\}$ i $\{f(\text{neparno})f^*(\text{neparno})\}$ dok se druga polovina $\{f(\text{parno})f^*(\text{neparno})\}$ i $\{f(\text{neparno})f^*(\text{parno})\}$ cijelog spoljašnjeg proizvoda $\{f(n)f^*(m)\}$ nikad ne koristi. Posljedica ovoga je gubitak informacija ukoliko se odabiranje vrši saglasno Nyqvistovom koraku, određenom implementiranjem teoreme o odabiranju. Stoga se diskretna Cohenova klasa koristi uz odabiranje signala sa dvostrukim korakom, u protivnom se ovom definicijom unose efekti aliasinga. U cilju prevazilaženja ovog problema, najčešće se, slično kao u slučaju WD, pristupa konverziji diskretnog realnog signala u njegov analitički oblik, [16], [23], [77]. Ovim se istovremeno eliminisu kros-komponente, koje su posljedica međusobne interakcije komponenti posmatranog signala koje se nalaze na pozitivnim i negativnim frekvencijama. Za kompleksne signale koji nijesu čisto realni ili analitički zahtijeva se dodatna obrada za izdvajanje “pravog” spektra od njegovih imaginarnih likova pomjerenih po τ -osi za π . Predložena obrada je potrebna čak i u slučajevima kada je analizirani signal preodabiran, [77].

Diskretna L-Wignerova distribucija

Realizacija L-Wignerove distribucije se može ostvariti na dva načina:

1) *Direktni metod.* Ovaj metod se zasniva na odabiranju analiziranog signala sa Nyquistovim korakom, saglasno teoremi o odabiranju, i stepenovanju istog signala L -tim izložiocem. U tom slučaju signal mora biti preodabran sa faktorom L u poređenju sa WD, zadržavajući, pritom, isti broj odbiraka upotrebljavnih u proračunu. Pokazuje se,

[130], [133], da, s obzirom na prethodnu pretpostavku, ovaj metod pri proračunu ne pokazuje značajno gore karakteristike u poređenju sa izvornim metodom, za $L=1$. Ipak, uz preodabiranje, kao značajan nedostatak se ističe povećanje broja kros-komponenti prilikom analize multikomponentnih signala.

2) *Rekurzivni metod.* Ovaj metod se zasniva na rekurzivnoj relaciji (I.100). U cilju njegovog definisanja u diskretnom domenu, primjenjuje se postupak analogan onom koji je sproveden prilikom definisanja diskretnog S-metoda. Naime, povezivanjem dvije L-Wignerove distribucije stepena $L/2$ i primjenom metoda za redukovanje efekata interferencije (iz dvodimenzionog domena), dobijamo L-Wignerovu distribuciju stepena L sa potisnutim kros-komponentama,

$$LWD_L(n, k) = LWD_{L/2}^2(n, k) + 2 \sum_{l=1}^{L_d} LWD_{L/2}(n, k+l) LWD_{L/2}(n, k-l). \quad (\text{I.126})$$

Posljednji izraz je izведен uz pretpostavku pravougaovog prozora $P_d(l)$ širine $2L_d + 1$.

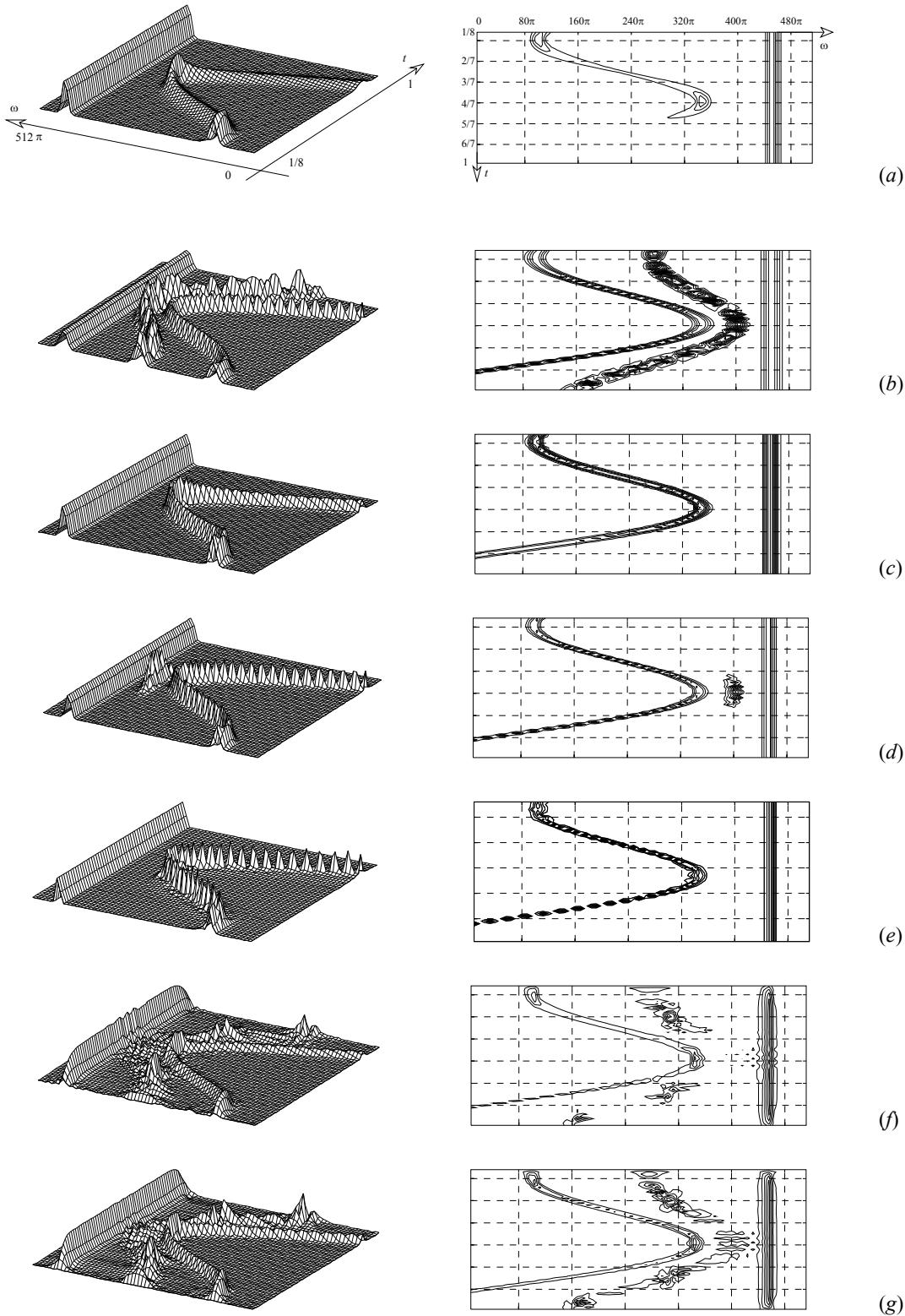
Napomenimo, na koncu, da se rekurzivnim metodom postiže niz prednosti u odnosu na direktni:

1. kros-članovi su značajno potisnuti (eliminisani u slučaju fizičke razdvojenosti komponenti u TF ravni),
2. preodabiranje analiziranog signala je nepotrebno,
3. za praktični proračun je ovaj metod znatno efekasniji od direktnog (analogno slučaju S-metoda, [130], [133]).

Koristeći se ovim metodom izvršena je numerička analiza signala (I.13), a rezultati su prikazani na slici I.5.(i).

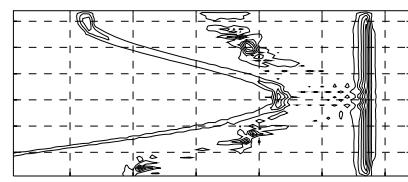
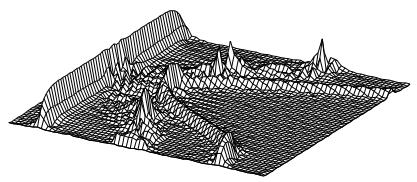
I.12. EKSPERIMENTALNI REZULTATI

U cilju potvrđivanja rezultata dobijenih u prethodnim izlaganjima, izvršena je numerička analiza multikomponentnog signala (I.13) posmatranim distribucijama. Rezultati su prikazani na slici I.5. Sa slike se jednostavno uočavaju analizirane prednosti i nedostaci pomenutih metoda. Primjetimo, naime, da spektrogram, slika I.5.(a), ne pati od efekata interferencije, ali i da je koncentracija komponenti signala na trenutnoj frekvenciji značajno manja u poređenju sa slučajem WD, slika I.5.(b). Sa druge strane, kros-komponente se u svom punom obliku pojavljuju kod WD i predstavljaju njen najznačajniji nedostatak. Iz grupe RID distribucija je predstavljena TF analiza posmatranog signala Choi-Williamsovom i Born-Jordanovom distribucijom, slike I.5.(f)-(h). Primjetno je značajno potiskivanje efekata interferencije, naročito u slučaju Choi-Williamsove distribucije sa malim σ , slika I.5.(f) (ovo se postiže na račun pogoršanja reprezentabilnosti auto-članova). Ipak, u cilju potiskivanja efekata interferencije, sa jednovremenim zadržavanjem koncentracije signala kao kod WD, najbolji efekti se postižu S-metodom, slike I.5.(c)-(e), posebno njegovim oblikom zavisnim od karakteristika analiziranog signala, slika I.5.(e).

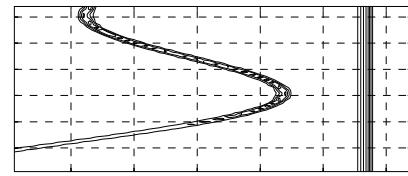
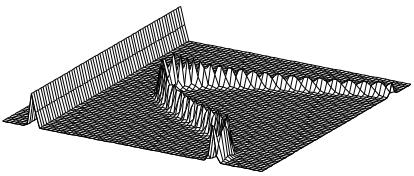


Slika I.5. Vremensko-frekvencijsa reprezentacija multikomponentnog signala (I.13) sljedećim distribucijama:

(a) Spectrogram, (b) pseudo WD, (c) S-metod sa $L_d = 2$, (d) S-metod sa $L_d = 7$, (e) S-metod sa prozorom zavisnim od analiziranog signala, (f) Choi-Williamsova distribucija sa $\sigma = \pi$, (g) Choi-Williamsova distribucija sa $\sigma = 2\pi$.



(h)



(i)

Slika I.5. (nastavak) (h) Born-Jordanova distribucija, (i) L-Wignerova distribucija sa $L=2$ i $L_d = 2$.



PROJEKTOVANJE HARDVERA ZA VLSI IMPLEMENTACIJU

VREMENSKO-FREKVENCIJSKIH METODA

Razvitkom i usavršavanjem oblasti u kojima vremensko-frekvencijska analiza pronalazi svoju punu upotrebnu vrijednost, zahtjevi za velikom brzinom njenih aplikacija u realnom vremenu postaju sve izraženiji, a time i interesantniji. Shodno tome, primjena TF analize u realnom vremenu zahtijeva efikasnu hardversku implementaciju razvijanih algoritama. U ranijim izlaganjima smo predstavili STFT kao najjednostavnije i najčešće proučavano i realizovano, odnosno konvencionalno, sredstvo u TF analizi signala u dugom nizu godina. Takođe smo pokazali da STFT posjeduje niz značajnih nedostataka; jedan od najznačajnijih je niska koncentracija analiziranog signala u TF ravni. Time je značajno degradirana njena aplikabilnost. U cilju poboljšanja koncentracije TF reprezentacije signala, razvijaju se mnogi matematički metodi, od kojih je osnovni Wignerova distribucija. U disertaciji je posebno analiziran S-metod kojim se postiže unificiranje dobrih osobina najznačajnijih TF reprezentacija, spektrograma i Wignerove distribucije, sa jednovremenim veoma jednostavnim povezivanjem sa STFT.

S-metod se ističe kao veoma atraktivran metod za hardversku implementaciju, pošto upotrebljava STFT kao međukorak u svojoj realizaciji, za koji već postoje razvijene hardverske realizacije. Prilikom implementacije u realnom vremenu posmatraju se isključivo realni signali. Kratkotrajna FT je kompleksna transformacija, tako da se njenim procesiranjem realnog signala dobijaju kompleksni koeficienti. U cilju zadržavanja realne transformacije analiziranog

realnog signala predlaže se upotreba Hartley-eve transformacije, [25], [78], [93]. Shodno tome, izvršena je hardverska implementacija S-metoda bazirana na ovoj transformaciji. U cilju daljeg poboljšanja koncentracije (u TF ravni) signala čija je trenutna frekvencija veoma nelinearna funkcija, definišu se distribucije višeg reda, [19], [118], [122], [125]-[128], [132]-[135]. Neke od njih: L-Wignerova i polinomialna Wigner-Villeova distribucija mogu biti definisane na bazi S-metoda, na sličan način na koji se S-metod definiše na osnovu STFT. Međutim, njihova softverska realizacija je komplikovanija i zahtijeva značajno intenziviranje vremena računanja u poređenju sa realizacijom S-metoda.

U ovoj glavi je predstavljena arhitektura, zajedno sa projektovanjem hardvera za VLSI implementaciju S-metoda i TF distribucija višeg reda. Isti hardver, dizajniran u cilju hardverske implementacije S-metoda je upotrijebljen za realizaciju distribucija višeg reda. To se postiže uvođenjem multipleksera i odgovarajućih kontrolnih signala, čime se zadržava isto vrijeme procesiranja kao u slučaju S-metoda. Razvijen je potpuni hardver za efikasnu ASIC implementaciju S-metoda, zajedno sa implementacijom STFT i Hartley-eve transformacije, kao međukoraka u njegovoj realiyaciji.

II.1. TEORIJSKA POZADINA

S-metod se definiše povezivanjem STFT sa pseudo formom WD, sa jednovremenim ulaganjem napora u cilju potiskivanja efekata interferencije u rezultujućoj transformaciji, glava I,

$$SM(t, \omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} P(\Theta) STFT(t, \omega + \Theta) STFT^*(t, \omega - \Theta) d\Theta, \quad (\text{II.1})$$

$$STFT(t, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t + \tau) w(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau. \quad (\text{II.2})$$

Ponovimo da se pseudo WD dobija kao marginalni slučaj (II.1) za $P(\Theta) = 1$. Dokazano je, glava I, da se odgovara-jućim izborom prozora $P(\Theta)$, postiže veoma visoka koncentracija signala na trenutnoj frekvenciji, bliska koncentraciji postignutoj kod WD. Pronalazeći veličinu prozora kojom se dobija isti auto-član kao u slučaju WD, izvodi se minima- lna širina prozora $P(\Theta)$ za dato ω i u slučaju monokomponentnog signala (koncentrisanog na intervalu $|\omega - \omega_0| < W$),

$$L_p(\omega) = \begin{cases} W - |\omega - \omega_0|, & \text{za } |\omega - \omega_0| < W \\ 0, & \text{drugdje.} \end{cases} \quad (\text{II.3})$$

Oblik (II.3) se dobija za sve pojedinačne komponente multikomponentnog signala $f(t) = \sum_{i=1}^M f_i(t)$, gdje su $f_i(t)$ monokomponentni signali koji se ne sjeku u TF ravni. S-metod tako pretpostavljenog signala se može predstaviti sumom Wignerovih distribucija pojedinačnih komponenti multikomponentnog signala,

$$SM(t, \omega) = \sum_{i=1}^M WD_i(t, \omega), \quad (\text{II.4})$$

gdje je $WD_i(t, \omega) = WD[f_i(t)]$ i $WD[\cdot]$ operator Wignerove distribucije. Cilj izlaganja u ovoj glavi je predstavljanje od signala zavisne i od signala nezavisne realizacije S-metoda, obje implementirane na veoma jednostavan i efikasan način.

Diskretni oblici

U cilju jednosatnijeg pojašnjenja predložene hardverske implementacije, pojednostavimo zapisivanje diskretnih oblika STFT i S-metoda (uvedenih u glavi I) sljedećim izrazima:

$$SM(n, k) = \sum_{i=-L_d}^{L_d} P(i) STFT(n, k+i) STFT^*(n, k-i), \quad (\text{II.5})$$

$$STFT(n, k) = \sum_{i=-N/2+1}^{N/2} f(n+i) w(i) \exp(-j2\pi ik/N), \quad (\text{II.6})$$

gdje je sa $P(i)$ označen diskretni oblik funkcije prozora $P(\Theta)$.

II.2. HARDVERSKA IMPLEMENTACIJA S-METODA BAZIRANA NA STFT

Prozor nezavisan od oblika analiziranog signala

Prepostavimo funkciju prozora $P(i)$ konstantne širine $W_p = 2L_d + 1$. Hardverska implementacija, analizirana u ovom poglavlju, predstavlja osnov za implementaciju sistema sa prozorom zavisnim od oblika analiziranog signala, kao i za implementaciju distribucija višeg reda. Posmatrajmo dvo-blokovsku arhitekturu, slika II.1.(a). U prvom bloku se realizuje STFT, dok se u drugom bloku implementira njegova modifikacija bazirana na S-metodu za TF analizu signala, sa ciljem povećanja koncentracije analiziranog signala. STFT može biti implementirana dvojako:

1. upotrebom razvijenih FFT čipova ili
2. prilazima baziranim na rekurzivnim algoritmima.

Oba prilaza su veoma dobro poznata u literaturi i praksi. Ovdje ćemo predstaviti prilaz baziran na rekurzivnom algoritmu, [6], [92], [108], [126], [129], koji je, zbog pojednostavljenog hardvera, pouzdaniji za VLSI implementaciju, [92].

U slučaju pravougaonog prozora $w(i)$, STFT se može napisati u rekurzivnoj formi, glava I,

$$STFT(n, k) = [f(n + N/2) - f(n - N/2)](-1)^k + STFT(n-1, k)e^{j2\pi k/N}. \quad (\text{II.7})$$

Potpuni sistem se sasoji od N kanala, $k = 0, 1, 2, \dots, N-1$, opisanih jednačinom (II.7). Takođe, u slučaju Hanningovog i Hammingovog prozora $w(i)$, STFT se dobija jednostavnom modifikacijom (II.7),

$$STFT_H(n, k) = a_{-1}STFT(n, k - 1) + a_0STFT(n, k) + a_1STFT(n, k + 1), \quad (\text{II.8})$$

gdje se koeficijenti a_{-1}, a_0, a_1 određuju na veoma jednostavan način, poglavlje I.11. Primjetimo da svaki kanal, opisan jednačinom (II.7) uključuje u sebi kompleksnu multiplikaciju $STFT(n-1, k)$ članom $\exp(j2\pi k/N)$. Shodno tome, posmatrajući odvojeno realni i imaginarni dio svih članova jednačine (II.7), svaki kanal može biti razbijen na dva podkanala, koji u sebi uključuju izračunavanja samo u realnom domenu. U cilju matematičkog opisivanja ovih kanala, modifikujemo (II.7) zapisivanjem kratkotrajne FT u obliku sume njenog realnog i njenog imaginarnog dijela, $STFT(n, k) = STFT_{\text{Re}}(n, k) + jSTFT_{\text{Im}}(n, k)$. Sada se lako mogu napisati jednačine kojima se opisuju dva podkanala:

$$STFT_{\text{Re}}(n, k) = F(n)(-1)^k + c(k)STFT_{\text{Re}}(n-1, k) - s(k)STFT_{\text{Im}}(n-1, k), \quad (\text{II.9})$$

$$STFT_{\text{Im}}(n, k) = c(k)STFT_{\text{Im}}(n-1, k) + s(k)STFT_{\text{Re}}(n-1, k), \quad (\text{II.10})$$

gdje su: $c(k) = \cos(2\pi k/N)$, $s(k) = \sin(2\pi k/N)$ i $F(n) = f(n + N/2) - f(n - N/2)$. Jednačina (II.5) postaje:

$$\begin{aligned} SM(n, k) = & |STFT(n, k)|^2 + 2 \sum_{i=1}^{L_d} STFT_{\text{Re}}(n, k+i)STFT_{\text{Re}}(n, k-i) + \\ & + 2 \sum_{i=1}^{L_d} STFT_{\text{Im}}(n, k+i)STFT_{\text{Im}}(n, k-i). \end{aligned} \quad (\text{II.11})$$

Ova se jednačina koristi za modifikaciju izlaza iz STFT bloka u cilju dobijanja S-metoda, slika II.1.(a).

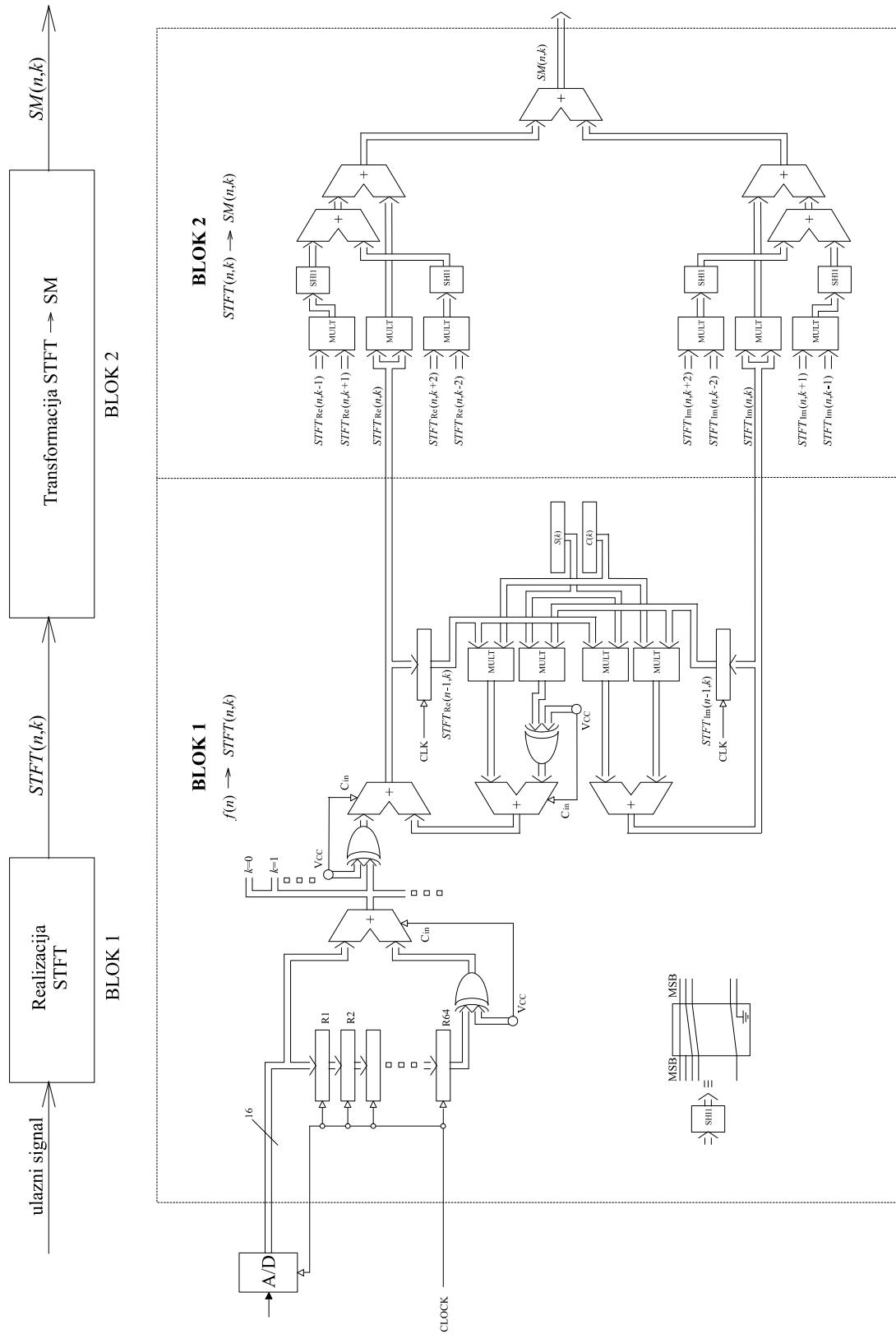
Na slici II.1.(b) je predstavljen hardver za implementaciju jednog kanala S-metoda prozorom širine $L_d = 2$. Hardver je projektovan za slučaj 16-bitne fixed-point aritmetike. Ukupan broj multiplikatora upotrijebljenih tom prilikom je $2(L_d + 3)$, dok je ukupan broj sabirača $2(L_d + 2)$. Pretpostavljeno je da su brojevi predstavljeni u Q15 formatu (15 bita se upotrebljava za predstavljanje razlomljenog dijela broja dok se bit najveće težine, MSB bit, upotrebljava za predstavljanje njegovog znaka). U ovom slučaju se kao rezultat operacije multipliciranja dobija broj sa dva bita upotrijebljena za predstavljanje njegovog znaka. U cilju postizanja korektnog rezultata dobijeni proizvod se pomjera za jedno mjesto ulijevo, [105]. Prilikom projektovanja hardvera je pretpostavljeno da je kolo za pomjeranje broja za jedan bit ulijevo sastavni dio multiplikatora. Najduži put koji prolazi signal je onaj koji povezuje registar sa sadržajem $STFT(n-1, k \pm L_d)$, kroz dva multiplikatora i $L_d + 3$ sabirača, sa izlazom $SM(n, k)$ sistema. Ovim putem je određen najmanji mogući korak odabiranja. Primjetimo da se, u poređenju sa implementacijom spektrograma, hardverskom implementacijom S-metoda unosi dodatno kašnjenje jedino sa L_d sabirača. Dakle, najmanji korak odabiranja je, u suštini, isti kod obje implementacije (spektrograma i S-metoda). Predloženi hardver može biti implementiran kao ASIC čip sa brzinom i performansama koje zahtijevaju veoma brze aplikacije u realnom vremenu.

Prozor zavisan od oblika analiziranog signala

Već je istaknuta (u glavi I) činjenica da je izbor prozora $P(i)$ fiksne širine, u opštem slučaju, neodgovarajući prilikom analize multikomponentnih signala čije komponente imaju različite širine svojih STFT. Prozor suviše male veličine rezultira niskom koncentracijom analiziranog signala, dok suviše širok prozor može imati negativne posljedice na isticanje efekata interferencije (glava I), uticaja šuma (glava III.1.) i kompleksnosti računanja, [126]. Ovim se opravdava uvođenje prozora čija je širina zavisna od analiziranog signala. Takvu širinu prozora u diskretnom domenu označavamo sa $W_p(n, k) = 2L_d(n, k) + 1$. Ona bi u čitavoj TF ravni (za svako n i k) pratila širine STFT pojedinih komponenti signala i uključila bi u sumiranje (jednačina (II.5)) sve članove kod kojih su $STFT(n, k+i)$ i $STFT^*(n, k-i)$ različite od nule. Takođe se, promjenljivom širinom prozora $P_{(n,k)}(i)$, iz procesa sumiranja isključuju svi članovi čija je bar jedna od prethodnih komponenti jednaka nuli, kao što se i zaustavlja isti proces van komponenti analiziranog signala. Prozor $P_{(n,k)}(i)$ se implementira kreiranjem logičkih kola koja će isključivati sve linije $i \geq i_0$, za posmatrano k , kada je bilo koji od dva faktora, $STFT(n, k+i_0)$ ili $STFT^*(n, k-i_0)$ jednak nuli. U praktičnim primjenama jednakost sa nulom poistovjećujemo sa vrijednošću apsolutne vrijednosti STFT koja nije veća od referentne vrijednosti R , $|STFT(n, k)| \leq R$, [171]. U praksi se referentna vrijednost određuje na osnovu jednostavne analize signala i predlagane implementacije sistema.

Notirajmo da je, u cilju optimalne upotrebe kapaciteta raspoloživih registara prilikom implementacije sistema bazirnog na aritmetici sa fiksnom tačkom, potrebno izvršiti skaliranje ulaznog signala odgovarajućim faktorom, [70], [105], [158] i glava III.4. U slučaju STFT, ulazni signal je potrebno skalirati tako da se izlazni signal iz sistema zadrži unutar opsega $[-1,1]$. Ova činjenica nameće definisanje referentne vrijednosti R u funkciji maksimalne apsolutne vrijednosti STFT. U procesu određivanja referentne vrijednosti, nije od interesa određivati njenu tačnu vrijednost, pošto postignuti rezultati nijesu značajno osjetljivi u tom pogledu. Već smo zaključili da je teško primjetiti razliku u TF reprezentaciji analiziranog signala prilikom variranja referentne vrijednosti između, na primjer, 10% i 25% maksimalne vrijednosti STFT. Preciznije, referentna vrijednost predstavlja razlomljeni dio $|STFT(n, k)|$ za svako k , $R = 1/Q$, gdje je $1 \leq Q < \infty$. U opštem slučaju, ukoliko nemamo apriornih saznanja o opsegu analiziranog signala, referentnu vrijednost definišemo razlomljenim dijelom maksimuma STFT u posmatranom trenutku t , $R = \max_k |STFT(n, k)|/Q$.

U cilju prilagođavanja hardvera sa slike II.1.(b) za slučaj prozora zavisnog od analiziranog signala, blok 2 hardvera se modifikuje kao na slici II.2. Izvršene modifikacije su označene isprekidanim pravougaonikom. Sa $x_{\pm i}$ ($i = 0, 1, \dots, L_d$) su označeni izlazi komparatora čiji su ulazi $|STFT(n, k \pm i)|^2$ i R^2 . Izlaz komparatora x_i je:



(a) Blok šema, Slika II.1. Arhitektura za realizaciju od signala nezavisnog S-metoda:

(b) Hardverska implementacija jednog kanala za $L_d = 2$

$$x_i = \begin{cases} 1, & \text{za } |STFT(n, k \pm i)| > R \\ 0, & \text{za ostale vrijednosti } |STFT(n, k \pm i)|. \end{cases} \quad (\text{II.12})$$

Kola neophodna za generisanje signala $x_{\pm i}$ su prikazana na slici II.2. Kontrolni signali c_i , kojima se određuje da li će i -ti član ući u sumiranje (II.11), se definiše izrazom:

$$c_i = \prod_{m=1}^i x_{k+m} x_{k-m} = c_{i-1} x_{k+i} x_{k-i}. \quad (\text{II.13})$$

Prepostavljeno je (bez gubitka na opštosti razmatranja) da je maksimalna moguća širina prozora $P(i)$ jednaka $2L_{d \max} + 1$ (prozor promjenljive širine sa predefinisanom maksimalnom širinom). Zaključimo da *spektrogram signala prolazi na izlaz sistema (ulazi u sumiranje (II.11)), čak i u slučaju kada je $|STFT(n, k)| \leq R$ za skoko k , tako da je: $c_0 \equiv 1$.* Primijetimo da je prilikom realizacije kontrolnog signala c_1 dodata logička jedinica (ili $+V_{CC}$ na slici II.2.). Ovo je urađeno u cilju postizanja simetrične realizacije svih kontrolnih signala c_i za $i \geq 1$.

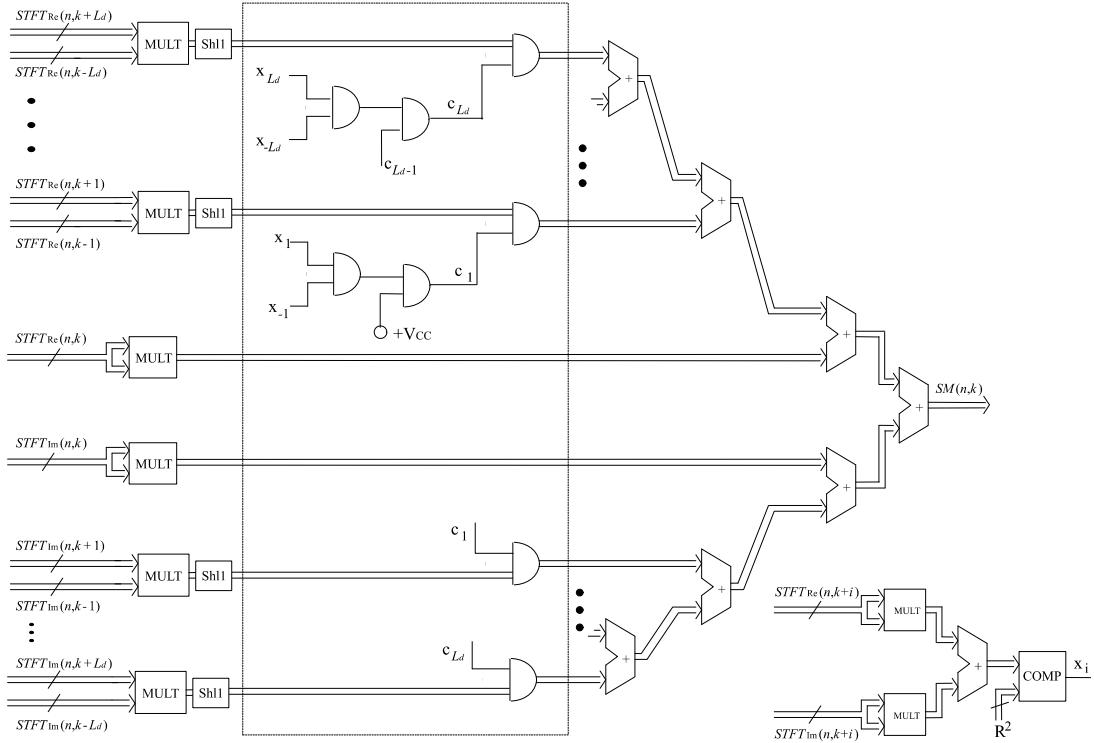
Napomenimo da, u slučaju visokog šuma možemo dobiti nultu vrijednost signala x_i (tj., $|STFT(n, i)| \leq R$), čak i u slučaju kada je apsolutna vrijednost STFT čistog signala (oslobođenog aditivnog šuma) veća od referentne veličine, $|STFT_f(n, k)| > R$. Ovaj efekat se, međutim, može zanemariti znajući da spektrogram signala prolazi do izlaza sistema u svakom slučaju. Pored toga, u cilju njegovog prevazilaženja, moguće je realizovati neznatno komplikovaniju logiku kojom bi se zaustavljalo sumiranje u jednačini (II.11) samo nakon detektovanja dvije uzastopne nulte vrijednosti x_i i x_{i+1} . U tom slučaju se kontrolni signali c_i definišu na sličan način kao u (II.13), zamjenom x_m sa $\chi_m = x_m + x_{m+1}$, gdje je sa $+$ označena logička ILI operacija. Posljednja modifikacija se može upotrijebiti i u drugim slučajevima, ne samo u slučaju signala maskiranih visokim šumom. Primjer njene poželjne upotrebe može biti slučaj kada STFT uzima nulte vrijednosti (ili vrijednosti manje od referentne veličine R) unutar pojedinih auto-članova.

II.3. HARDVERSKA IMPLEMENTACIJA S-METODA

BAZIRANA NA HARTLEY-EVOJ TRANSFORMACIJI

U slučaju realnog analiziranog signala predlaže se upotrijeba Hartley-eve transformacije (HT) umjesto STFT, [25], [78], [93]. Time se prevazilazi predstavljanje realnog signala kompleksnim koeficientima (njegovog spektra) prilikom implementacije STFT. Diskretni oblik Hartley-eve transformacije se može predstaviti jednačinom:

$$HT(n, k) = \sum_{i=-N/2+1}^{N/2} f(n+i)w(i)(\cos \frac{2\pi}{N}ik + \sin \frac{2\pi}{N}ik). \quad (\text{II.14})$$



Slika II.2. Modifikacija hardvera za implementaciju od signala zavisnog S-metoda

Hartley-eva transformacija i STFT su povezane na jednostavan način,

$$HT(n, k) = H_p(n, k) + H_n(n, k) = \operatorname{Re}\{STFT(n, k)\} + \operatorname{Im}\{STFT(n, k)\}, \quad (\text{II.15})$$

gdje su $H_p(n, k)$ i $H_n(n, k)$ parni i neparni dio Hartley-eve transformacije:

$$\begin{aligned} H_p(n, k) &= [HT(n, k) + HT(n, -k)]/2, \\ H_n(n, k) &= [HT(n, k) - HT(n, -k)]/2. \end{aligned} \quad (\text{II.16})$$

Saglasno relacijama (II.16) i rekurzivnom izrazu (II.7) jednostavno se može izvesti rekurzivni izraz za $HT(n, k)$ i pravougaoni prozor $w(i)$,

$$HT(n, k) = [f(n + N/2) - f(n - N/2)](-1)^k + HT(n - 1, k) \cos\left(\frac{2\pi k}{N}\right) + HT(n - 1, -k) \sin\left(\frac{2\pi k}{N}\right). \quad (\text{II.17})$$

Iz (II.14) se jednostavno pokazuje da važi: $HT(n, -k) = HT(n, N - k)$. U slučaju ostalih oblika prozora $w(i)$, Hartley-eva transformacija se modifikuje na isti način kao STFT (upotrebom koeficijenata $a_0, a_{\pm 1}, \dots$), poglavljje I.11. Sada je jednostavno izvesti funkcionalnu zavisnost S-metoda od Hartley-eve transformacije,

$$\begin{aligned} SM(n, k) &= \frac{1}{2}[HT^2(n, k) + HT^2(n, -k)] + \\ &+ \sum_{i=1}^{L_d} P(i)[HT(n, k + i)HT(n, k - i) + HT(n, -k + i)HT(n, -k - i)]. \end{aligned} \quad (\text{II.18})$$

Primijetimo da se (II.18) može predstaviti aritmetičkom sredinom $SM(n, k) = [SM_+(n, k) + SM_-(n, k)]/2$, gdje su:

$$SM_+(n, k) = HT^2(n, k) + \sum_{i=1}^{L_d} P(i)HT(n, k+i)HT(n, k-i), \quad (\text{II.19})$$

$$SM_-(n, k) = HT^2(n, -k) + \sum_{i=1}^{L_d} P(i)HT(n, -k+i)HT(n, -k-i). \quad (\text{II.20})$$

Polazeći od jednostavne činjenice da je $HT(n, -k) = HT(n, N-k)$, lako se zaključuje da važi: $SM_-(n, k) = SM_+(n, N-k)$, kao i da je, shodno tome:

$$SM(n, k) = \frac{SM_+(n, k) + SM_+(n, N-k)}{2}. \quad (\text{II.21})$$

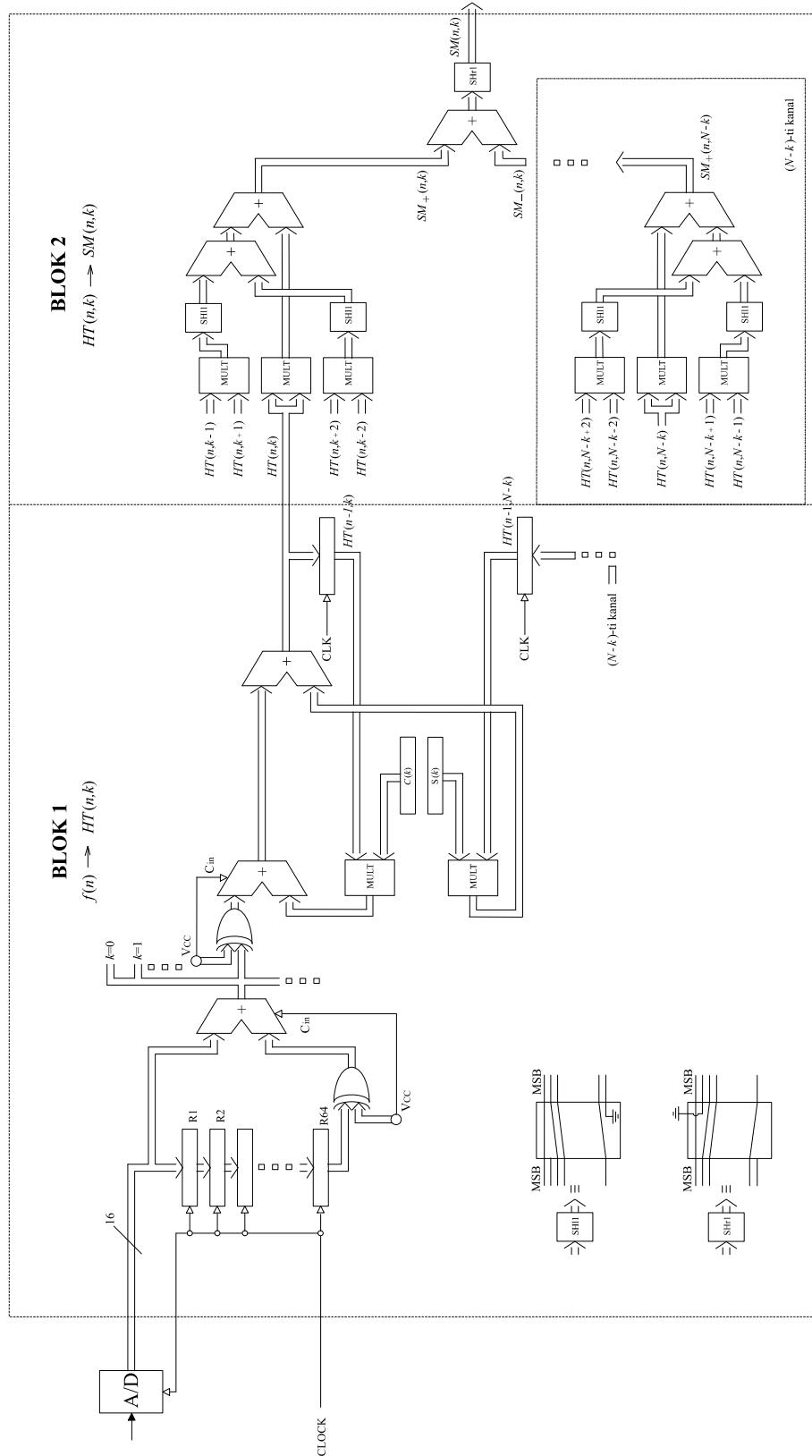
Prozor nezavisan od oblika analiziranog signala

Na slici II.3. je predložen hardver neophodan za implementaciju jednog kanala S-metoda sa prozorom $P(i)$ nezavisnim od oblika analiziranog signala. Hardver je dizajniran za slučaj 16-bitne fixed-point aritmetike. Sistem neophodan za realizaciju $SM_+(n, k)$ je isti kao gornji dio sistema sa slike II.1., upotrijebljenog za realizaciju S-metoda na bazi STFT, sa modifikacijom ulaza $STFT_{\text{Re}}(n, k \pm i)$ u $HT(n, k \pm i)$ za $i = 0, 1, \dots, L_d$. Polazeći od (II.21), drugi dio S-metoda, $SM_-(n, k)$ se dobija iz $(N-k)$ -og kanala. Značajno je primjetiti, takođe da je realizacija Hartley-eve transformacije (blok 1 na slici II.3.) jednostavnija od realizacije STFT (blok 1 na slici II.1.(b)). $HT(n, k)$ se realizuje implementiranjem jednačine (II.17) koja je, i sa formalne strane, identična jednačini (II.9), dobijenoj za realni dio STFT. Uz to, prilikom implementiranja $STFT(n, k)$ neophodno je realizovati i njen imaginarni dio (II.10), što je dodatni hardver u implementaciji STFT u poređenju sa slučajem Hartley-eve transformacije. Izlazna veličina $SM(n, k)$ (odnosno, srednja vrijednost veličina $SM_+(n, k)$ i $SM_+(n, N-k)$) je realizovana sistemom za pomjeranje jednog bita udesno (SHr1), čija je implementacija predstavljena na slici II.3. Zaključimo, na koncu, da implementacija S-metoda u ovom slučaju zahtijeva samo polovinu hardvera upotrebljavanog za hardversku realizaciju bloka 2 na slici II.1.(b), što se može objasniti osobinom realnosti Hartley-eve transformacije.

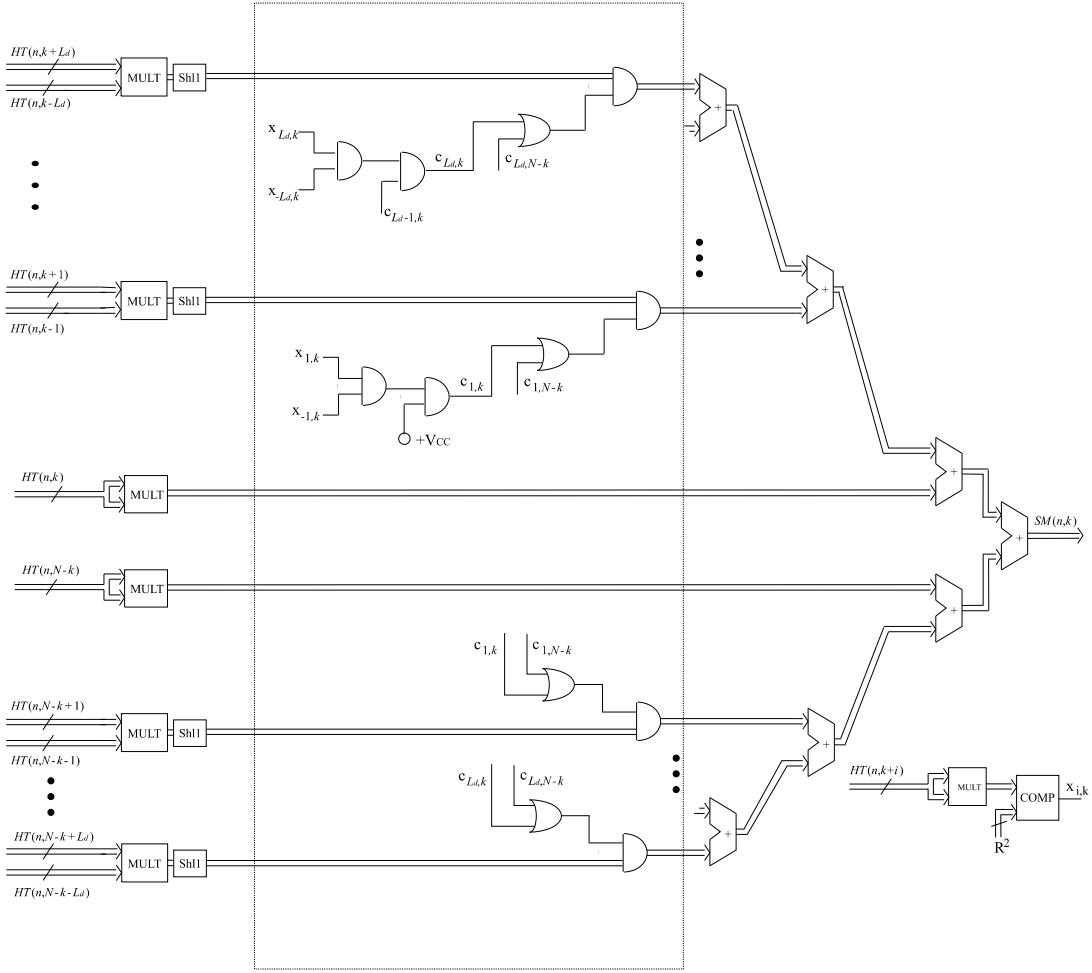
Prozor zavisani od oblika analiziranog signala

U ovom slučaju je potrebno odrediti signale kojima će se vršiti kontrola sumiranja prilikom dobijanja $SM_+(n, k)$ i $SM_-(n, k) = SM_+(n, N-k)$. Ovi signali bi zaustavili sumiranje (odnosno, isključili iz hardverske implementacije odgovarajuće linije) van auto-članova definisanih spektrogramom. U cilju njihovog definisanja, primijetimo da se spektrogram može na veoma jednostavan način povezati sa Hartley-evom transformacijom analiziranog signala,

$$SPEC(n, k) = \frac{1}{2}[HT^2(n, k) + HT^2(n, N-k)]. \quad (\text{II.22})$$



Slika II.3. Arhitektura za realizaciju S-metoda nezavisnog od analiziranog signala, bazirana na Hartley-evoj transformaciji (realizacija jednog kanala sa $L_d = 2$)



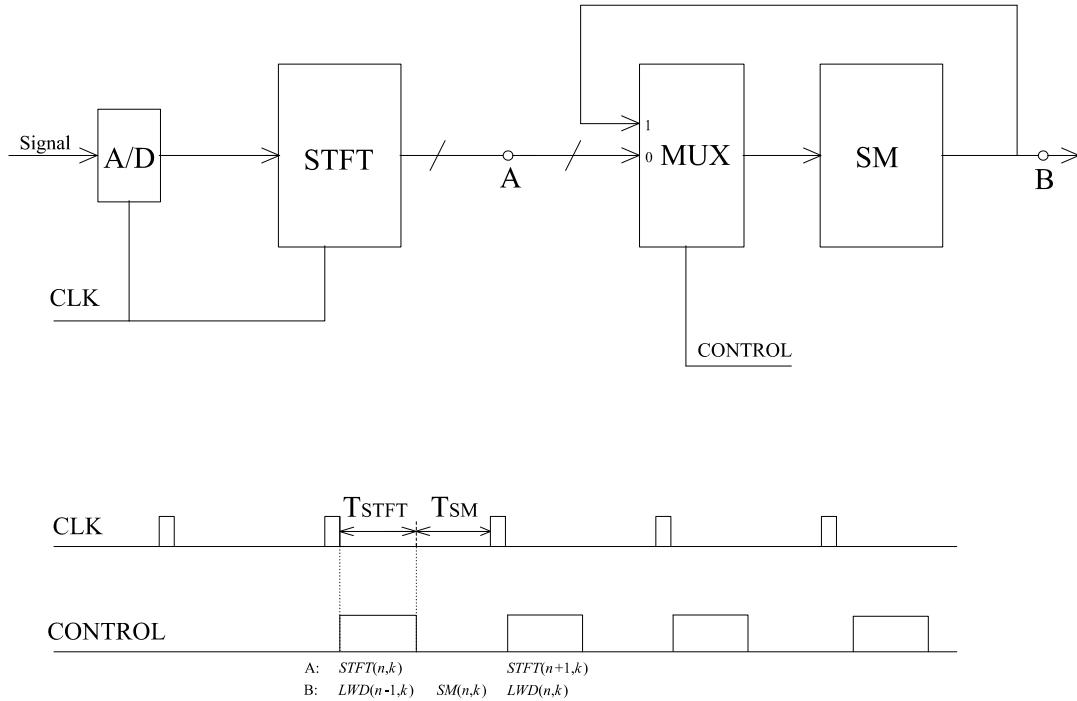
Slika II.4. Modifikacija hardvera za implementaciju od signala zavisnog S-metoda, baziranog na

Hartley-evoj transformaciji

$SPEC(n,k)$ je jednak nuli kada oba sabirka, $HT^2(n,k)$ i $HT^2(n,N-k)$, istovremeno uzimaju nultu vrijednost. Drugim riječima, auto-član dostiže svoju konačnu širinu (čime se postiže zaustavljanje sumiranja) ukoliko su veličine $HT^2(n,k)$ i $HT^2(n,N-k)$ istovremeno jednake nuli (ili, praktično, manje od referentne vrijednosti R). Signali neophodni za kontrolu sumiranja u (II.19) ili (II.20) pojedinačno, mogu biti dobijeni sistemom sa slike II.2., čiji su ulazni signali $HT(n,k)$ i $HT(n,N-k)$. Međutim, imajući u vidu prethodnu analizu, kontrolni signali za obje transformacije, $HT(n,k)$ i $HT(n,N-k)$, su isti i jednaki logičkoj sumi kontrolnih signala dobijeni za $HT(n,k)$ ili $HT(n,N-k)$ pojedinačno, slika II.4.

Referentna vrijednost R se definiše zavisno od veličine spektrograma. Dakle, saglasno prethodnoj diskusiji,

$$R = \frac{\max_k \{ \sqrt{[HT^2(n,k) + HT^2(n,N-k)]/2} \}}{Q}. \quad (\text{II.23})$$



Slika II.5. Blok-šema realizacije L-Wignerove distribucije, zajedno sa vremenskim oblicima kontrolnih signala

II.4. HARDVERSKA IMPLEMENTACIJA DISTRIBUCIJA VIŠEG REDA

L-Wignerova distribucija

Pokazali smo, glava I, da se vremensko-frekvencijskim distribucijama višeg reda mogu poboljšati određene karakteristike TF reprezentacije signala. Za praktične implementacije posebno su interesantne distribucije višeg reda koje se mogu predstaviti u dvodimenzionoj TF ravni, [19], [122], [127], [128], [130], [133]. Jedna od njih, koja se može veoma jednostavno i efikasno realizovati upotrebom ranije predloženog hardvera za implementaciju S-metoda je L-Wignerova distribucija, [127], [128], [130], [133] i glava I. Realizacija ove distribucije se može postići implementiranjem rekurzivne relacije:

$$LWD_L(n, k) = \sum_{i=-L_d}^{L_d} LWD_{L/2}(n, k+i) LWD_{L/2}(n, k-i), \quad (\text{II.24})$$

gdje je sa $LWD_L(n, k)$ označena L-Wignerova distribucija L -og reda. Redom distribucije $L = 1$ je predstavljen S-metod za TF analizu signala, $LWD_1(n, k) \equiv SM(n, k)$. Jednačina (II.24) je, formalno rečeno, ista sa (II.5). Stoga se, u cilju njene hardverske realizacije možemo poslužiti istim hardverom, dizajniranim u cilju implementacije S-metoda. Adaptirajući postojeći hardver sa slika II.1.–II.4. (blok 2 na slikama II.1. i II.3.) u cilju realizacije sistema sa $L = 2$, moramo uvesti multipleksore na ulazu bloka 2. Kontrolni signal multipleksera određuje da li sistem procesira

$STFT(n,k)$ ili $SM(n,k)$. Slično implementaciji S-metoda baziranoj na Hartley-evoj transformaciji, jednostavno se može zaključiti da se u kasnijim stepenima samo gornja polovina hardvera bloka 2, sa slike II.1., upotrebljava. Ovo je posljedica činjenice da je S-metod uvijek realna funkcija. Za vrijeme prvog dijela perioda odabiranja (označenog sa T_{STFT} na slici II.5.) blok 1 realizuje transformaciju $STFT(n,k)$, dok se u bloku 2 izračunava $LWD_2(n-1,k)$. Kontrolni signal se resetuje na nultu vrijednost u drugom dijelu perioda odabiranja (T_{SM}) i, kao posljedica toga, realizuje se $SM(n,k)$. Drugim riječima, realizacijom L-Wignerove distribucije nije intenzivirano vrijeme neophodno za procesiranje signala S-metodom, odnosno *sa istim hardverom, za vrijeme istog vremenskog perioda, sistem daje dvostruk izlaz: S-metod i L-Wignerovu distribuciju sa $L = 2$* . Primjetimo da se za izračunavanje $LWD_2(n-1,k)$ upotrebljava samo gornja polovina hardvera bloka 2, tako da se donja polovina hardvera bloka 2 može upotrijebiti za istovremeno izračunavanje $LWD_4(n-2,k)$. Na slici II.5. je prikazan potpun blok-dijagram modifikovanog hardvera za realizaciju distribucija višeg reda, zajedno sa neophodnim tajmingom kontrolnih signala multipleksora.

Polinomialna Wigner-Villeova distribucija

Interesantno je primijetiti da se, poznавajući veličine $SM(n,k)$ i $LWD_2(n,k)$, jednostavno može dobiti polinomialna Wigner-Ville-ova distribucija četvrtog reda ($WVD(n,k)$), [19], [122], oslobođena efekata interferencije (ili sa veoma redukovanim efektima interferencije),

$$WVD(n,k) = \sum_{i=-L_d}^{L_d} LWD(n, k+i) SM(n, k+[i/A]), \quad (\text{II.25})$$

gdje je konstanta $A = 0.85/1.35$, dok je sa $[i/A]$ označen cijeli broj najbliži veličini i/A . Obično je, u cilju postizanja aproksimacije bliske veličini $SM(n, k+i/A)$ ⁷ (dobijene upotrebom $SM(n, k+[i/A])$), neophodno izvršiti interpolaciju S-metoda, [19].

II.5. ANALIZA GREŠKE

Upotrebom registara konačne dužine, u sistem sa fixed-point aritmetikom unose dvije vrste greške, glava III:

1. *greška nastala kvantizacijom ulaznog signala i*
2. *greška nastala kvantizacijom rezultata postignutih operacija multipliciranja.*

Prilikom modeliranja sistema sa kvantizacionom greškom ulaznog signala, signal $f(n)$ zamjenjujemo sumom $f(n) + \varepsilon(n)$, tako da se, s matematičkog aspekta posmatranja, ova situacija svodi na analizu signala sa šumom, [152] i glava

⁷Aproksimacija veličine $SM(n, k+i/A)$ je neophodna, pošto i/A nije cijelobrojna veličina.

III.1., sa varijansom distribucije:

$$\sigma^2 = \frac{N^2 \sigma_\varepsilon^4}{2L_d + 1} + \frac{N\sigma_\varepsilon^2}{(2L_d + 1)^2} \sum_{i=-L_d}^{L_d} SPEC_f(n, k+i), \quad (\text{II.26})$$

gdje je $\sigma_\varepsilon^2 = 2^{-2b}/12$, [70], [105], [158] i glava III.4. Primijetimo da je, u slučaju vrijednosti spektrograma reda 1 i u slučaju zadovoljenja uslova: $N\sigma_\varepsilon^2 \ll 1$, izraz (II.26) reda veličine: $N\sigma_\varepsilon^2/(2L_d + 1)^2 = N \cdot 2^{-2b}/(12(2L_d + 1)^2)$. Na primjer, za $N = 64$, $b = 16$ i $L_d = 2$, σ^2 je reda veličine 2^{-34} . Greška $q(n)$, nastala kvantizacijom rezultata operacije multipliciranja $STFT(n-1, k)\exp(j2\pi k/N)$ u (II.7), ima varijansu $\sigma_q^2 = 2^{-2b}/4$, [68], [70], [105] i glava III.4. Ova greška se akumulira sa svakom iteracijom.

Zabilježimo da je predloženo dvo-blokovsko rješenje hardvera napravljeno u cilju postizanja što veće fleksibilnosti sistema, tako da je omogućena upotreba bilo kog respoloživog hardvera za realizaciju Fourierove transformacije. Drugim riječima, blok 1 za izračunavanje STFT (slika II.1.) može biti implementiran primjenom razvijenih FFT algoritama, umjesto predloženog rekurzivnog. Podvucimo, [105] i glava III.4., da se ovom slučaju greška kvantizacije ne akumulira i da se zadržava na veličini reda greške dobijene proračunavanjem izraza (II.26).



ANALIZA UTICAJA ŠUMA I EFEKATA OGRANICENE DUŽINE REGISTARA PRI HARDVERSKOJ REALIZACIJI VREMENSKO-FREKVencijskih metoda

Realni signali su, po pravilu, manje ili više izobličeni prisustvom aditivnog šuma. Stoga, analiza uticaja šuma na vremensko-frekvencijsku reprezentaciju signala predstavlja veoma zanimljivu i često izučavanu oblast, [68]-[71], [80]-[85], [99], [103], [138], [149]-[158]. Pošto su vremensko-frekvencijske (TF) distribucije nelinearne transformacije analiziranog signala, analiza uticaja šuma u ovom slučaju je složenija, a samim tim, i interesantnija za proučavanje. Ona može biti proučava-vana posmatrajući je sa dva aspekta:

1. Analiza uticaja šuma na same distribucije,
2. Analiza uticaja šuma na pojedine parametre distribucija (trenutna frekvencija, grupno kašnjenje, amplituda, ...).

U ovoj glavi ćemo se zadržati samo na prvom slučaju, dok će analizi uticaja šuma na pojedine parametre TF predstavljanja signala, posvetiti značajan prostor u narednoj cjelini disertacije. Predstavit ćemo analizu uticaja šuma na S-metod, kao i generalisanu analizu uticaja šuma na ostale TF reprezentacije iz Cohenove klase. Analizom uticaja šuma na S-metod se unificira ista analiza kod distribucija koje predstavljaju njegove marginalne slučajeve, spektrogram i pseudo WD. Prilikom analize uticaja šuma na distribucije iz opšte Cohenove klase, posebnu pažnju ćemo posvetiti najčešće upotrebljavanim RID distribucijama.

Kao veoma interesantan oblik aditivnog, bijelog šuma, na kraju ove cjeline je analiziran uticaj efekata konačne dužine registara na tačnost rezultata dobijenih TF analizom signala.

III.1. ANALIZA UTICAJA ŠUMA NA DISKRETNI S-METOD

Pokazano je da se S-metodom postiže takva reprezentacija multikomponentnih signala da je distribucija svake komponente analiziranog signala njena WD, koja svaka ponaosob zadovoljava sve poželjne osobine TF predstavljanja signala. Uz to, ovim metodom se postiže potpuno eliminisanje, ili, u najgorem slučaju, značajno redukovanje kros-komponenti koje se javljaju analizom istog signala sa Wignerovom distribucijom. Takođe, S-metod se može veoma efikasno realizovati, bilo numeričkim putem, [126], [129], [141] ili hardverski, glava II.

Uzimajući u obzir sve navedene prednosti ovog metoda, veoma je interesantno analizirati njegovo ponašanje sa još jednog aspekta - uticaja aditivnog šuma na predstavljanje signala. Pokazat ćemo da se ovim metodom, pod određenim uslovima, postižu poboljšane performanse u odnosu na adekvatno predstavljanje signala njegovim marginalnim slučajevima, spektrogramom i pseudo WD. Posmatrani su primjeri sinusoidalnog signala i linearne frekvenčijske modulisanog (FM) signala, kao pogodni za dobijanje rezultata analitičkim putem. Postignuti rezultati su demonstrirani na nizu numeričkih primjera.

III.1.1. ANALIZA SIGNALA ZAHVAĆENOG ŠUMOM

Povezujući diskretnu STFT i diskretnu pseudo WD, te posmatrajući tako dobijenu relaciju kao srednju vrijednost proizvoda diskretne STFT i njene konjugovano-kompleksne vrijednosti i analizirajući ponašanja ovih transformacija u slučaju multikomponentnih signala, diskretni oblik analiziranog S-metoda se može predstaviti u sljedećoj formi, glava I.11.:

$$SM_x(n, k) = \frac{1}{2L_d + 1} \sum_{l=-L_d}^{L_d} P_d(l) STFT_x(n, k + l) STFT_x^*(n, k - l). \quad (\text{III.1})$$

U cilju sprovođenja adekvatne analize uticaja šuma na diskretni S-metod, predstaviti ćemo prethodnu jednačinu koristeći razvijeni oblik diskretne STFT,

$$STFT_x(n, k) = \sum_{i=0}^{N-1} x(n+i) w^*(i) e^{-j \frac{2\pi}{N} ki}. \quad (\text{III.2})$$

Sada je:

$$SM_x(n, k) = \frac{1}{2L_d + 1} \sum_{l=-L_d}^{L_d} \sum_{i_1=0}^{N-1} \sum_{i_2=0}^{N-1} w(i_1) w^*(i_2) x(n+i_1) x^*(n+i_2) e^{-j\frac{2\pi}{N}k(i_1-i_2)} e^{-j\frac{2\pi}{N}l(i_1+i_2)}. \quad (\text{III.3})$$

Prepostavljujući da je deterministički signal $f(n)$ maskiran aditivnim šumom $v(n)$, varijanse σ_v^2 , kroz naredna izlaganja ćemo analizirati signal: $x(n)=f(n)+v(n)$. Zavisno od vrste aditivnog šuma, izvode se statistički pokazatelji estimatora S-metoda.

III.1.2. SREDNJA VRIJEDNOST ESTIMATORA S-METODA

Srednja vrijednost posmatranog estimatora $SM_x(n, k)$ ne zavisi od vrste aditivnog šuma, te je možemo pronaći nezavisno od uvođenja dodatnih pretpostavki. Za prepostavljeni signal $x(n)$ važi:

$$SM_x(n, k) = SM_f(n, k) + SM_{fv}(n, k) + SM_{vf}(n, k) + SM_v(n, k) \quad (\text{III.4})$$

gdje su:

$SM_f(n, k)$ i $SM_v(n, k)$ - diskretni S-metod signala $f(n)$ i šuma $v(n)$, respektivno,

$SM_{fv}(n, k)$ i $SM_{vf}(n, k)$ - kros-diskretni S-metoda signala $f(n)$ i šuma $v(n)$, odnosno šuma $v(n)$ i signala $f(n)$.

Prepostavljujući stacionarni šum nulte srednje vrijednosti, iz (III.4) dobijamo srednju vrijednost diskretnog S-metoda signala $x(n)$ u obliku:

$$\begin{aligned} E\{SM_x(n, k)\} &= SM_f(n, k) + E\{SM_v(n, k)\} = \\ &= SM_f(n, k) + \frac{1}{2L_d + 1} \sum_{l=-L_d}^{L_d} \sum_{i_1=0}^{N-1} \sum_{i_2=0}^{N-1} w(i_1) w^*(i_2) R_{vv}(i_1 - i_2) e^{-j\frac{2\pi}{N}k(i_1-i_2)} e^{-j\frac{2\pi}{N}l(i_1+i_2)}. \end{aligned} \quad (\text{III.5})$$

U slučaju bijelog šuma, $R_{vv}(i) = \sigma_v^2 \delta(i)$, i realnog prozora $w(i)$ posljednja jednačina poprima oblik:

$$E\{SM_x(n, k)\} = SM_f(n, k) + \frac{\sigma_v^2}{2L_d + 1} \sum_{l=-L_d}^{L_d} W_{w^2}(2l) = SM_f(n, k) + a_w \frac{N\sigma_v^2}{2L_d + 1}, \quad (\text{III.6})$$

gdje je: $W_{w^2}(l) = DFT[w^2(i)]$ - diskretna FT funkcije prozora $w^2(i)$ i

$$a_w = \frac{1}{N} \sum_{l=-L_d}^{L_d} W_{w^2}(2l) \quad (\text{III.7})$$

konstanta, zavisna od $w^2(i)$. Notirajmo da će se prozor $w^2(i)$ upotrebljavati u analizi umjesto prozora $w(i)$. Naime, kod pseudo WD imamo odgovarajući prozor $w(i)w^*(-i)$ koji se, za realnu i parnu funkciju prozora, svodi na $w^2(i)$. U

Tabeli III.1. su prikazane vrijednosti a_w za različite oblike funkcije prozora $w^2(i)$.

Tabela III.1. Vrijednosti konstanti a_w , r_w i C_w za različite oblike prozora $w^2(i)$

Prozor $w^2(i)$	Pravougaoni	Hanningov	Hammingov
a_w	1	0.5	0.54
r_w	$2L_d + 1$	$(3L_d + 1)/4$	$0.79L_d + 0.29$
C_w	1	0.375	0.3974

Za $L_d=0$ (odnosno za, $P_d(l) = \delta(l)$), dobijamo:

$$E\{SM_x(n, k)\} = SPEC_f(n, k) + Na_w \sigma_v^2. \quad (\text{III.8})$$

Ovim izrazom je predstavljena srednja vrijednost kod SPEC, koja je pojedinačnim izvođenjem dobijena u [105], [108], za slučaj pravougaonog prozora ($a_w=1$). Sa druge strane, zamjenjujući drugu marginalnu vrijednost prozora: $2L_d+1=N$ u jednačinu (III.6), dobijamo:

$$E\{SM_x(n, k)\} = PWD_f(n, k) + a_w \sigma_v^2, \quad (\text{III.9})$$

Izrazom (III.9) je predstavljena srednja vrijednost estimatora pseudo WD. Prilikom analize uticaja šuma na diskretnu WD, [158], dokazuje se neophodnost odsijecanja signala funkcijom prozora u cilju postizanja konačne vrijednosti varijanse. Međutim, ovo se u značajnoj mjeri utiče na njenu sistematsku grešku, [154], [158], tako da ju je interesantno posebno analizirati. Znajući da pseudo WD predstavlja konvoluciju (u frekvencijskom domenu) WD analiziranog signala i WD funkcije prozora $w(n)$ u trenutku $n=0$, jednačina (I.26), jednačinu (III.9) možemo napisati u obliku:

$$E\{PWD_x(n, k)\} = WD_f(n, k) *_k W_{w^2}(2k) + a_w \sigma_v^2. \quad (\text{III.10})$$

Primjetimo da je drugi sabirak u prethodnoj jednačini konstantan, tako da možemo prepostaviti, bez gubitka na opštosti razmatranja, da on ne unosi sistematsku gršku u proračun WD. Takođe, primjetimo da se odsjecanjem analiziranog signala funkcijom prozora $w(n)$ povećava sistematska greška kod WD zbog postojanja konvolucione sume originalne WD, $WD_f(n, k)$, sa $W_{w^2}(2k)$. U cilju sprovođenja adekvatne matematičke analize preći ćemo u kontinualni domen po frekvenciji. Posljednja jednačina se, u tom slučaju, može napisati u obliku:

$$E\{PWD_x(n, \omega)\} = WD_f(n, \omega) *_{\omega} W_{w^2}(2\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} WD_f(n, \omega - \theta) W_{w^2}(2\theta) d\theta. \quad (\text{III.11})$$

Razvijajući $WD_f(n, \omega - \theta)$ u Taylorov red u okolini tačke $\theta=0$, te zadovoljavajući opšte uslove najčešće upotreblijavanih funkcija prozora⁸, dobijamo:

$$WD_f(n, \omega) *_{\omega} W_{w^2}(2\omega) \cong WD_f(n, \omega) + \frac{1}{2\pi} \frac{\partial^2 WD_f(n, \omega)}{\partial \omega^2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \theta^2 W_{w^2}(2\theta) d\theta. \quad (\text{III.12})$$

Prilikom izvođenja posljednje jednačine upotrebljavane su sljedeće jednostavne činjenice: $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} W_{w^2}(2\theta) d\theta = \pi$ i

$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \theta W_{w^2}(2\theta) d\theta = 0$. Sistematska greška (bias) WD estimatora je:

$$b \cong \frac{1}{2\pi} \frac{\partial^2 WD_f(n, \omega)}{\partial \omega^2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \theta^2 W_{w^2}(2\theta) d\theta = \frac{1}{8} b_f(n, \omega) m_2, \quad (\text{III.13})$$

gdje je $m_2 = \int_{-\pi}^{\pi} \theta^2 W_{w^2}(2\theta) d\theta / 2\pi$ amplitudski moment prozora $w^2(i)$ i $b_f(n, \omega) = \partial^2 WD_f(n, \omega) / \partial \omega^2$. U cilju analitičkog izračunavanja vrijednosti amplitudskog momenta možemo ga predstaviti u obliku $m_2 = (d^2 [w^2(i)] / di^2)|_{i=0}$.

Sada je jednostavno izračunati amplitudski momenat proizvoljnog prozora $w^2(i)$. Npr., u slučaju Hanningovog prozora $w^2(i)$, dobijamo: $m_2 = 0.5(2\pi / N)^2$, kao i sistematsku grešku WD estimatora:

$$b \cong \frac{1}{16} b_f(n, \omega) \left(\frac{2\pi}{N}\right)^2. \quad (\text{III.14})$$

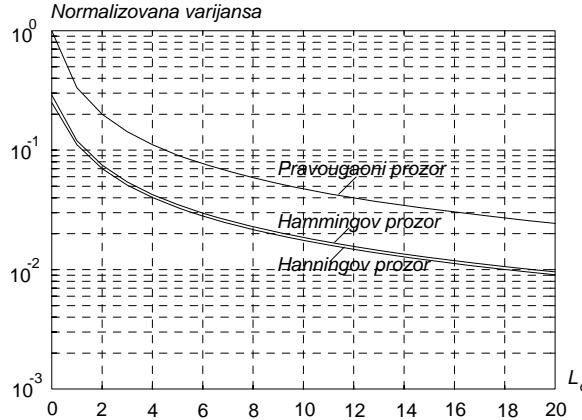
Primjetimo da se odsjecanjem signala funkcijom prozora značajno povećava sistematska greška WD estimatora, odnosno da je bias WD estimatora obrnuto proporcionalan širini prozora $w^2(i)$ upotrijebljenog u definiciji pseudo WD.

III.1.3. VARIJANSA ESTIMATORA S-METODA

U slučaju S-metoda ima smisla analizirati uticaj šuma samo u slučajevima njegove kompleksne i realne forme. Analiza uticaja analitičkog šuma nema svoj smisao, koji nalazi prilikom analize WD i drugih kvadratnih distribucija, [16], [23], [77], [97], [99] i poglavlja III.2. i III.3. Razlog tome je nepostojanje kros-komponenti među komponentama signala na pozitivnim i negativnim učestanostima, kao i nepostojanje problema vezanih za neželjene efekte aliasinga, [126].

⁸Opšti uslovi koje zadovoljavaju najčešće upotrebljavane funkcije prozora se mogu predstaviti na sljedeći način:

$$w(0) = 1, \int_{-\pi}^{\pi} W(e^{j\omega}) d\omega = 2\pi.$$



Slika III.1. Normalizovana varijansa kod diskretnog SM

Pretpostavimo, najprije, da je $v(n)$ aditivni kompleksni šum sa nezavisnim realnim i imaginarnim djelovima podjednakih varijansi, $\sigma_v^2/2$. Usljed nezavisnosti realnog i imaginarnog dijela šuma, ukupna varijansa šuma je σ_v^2 , [108]. Prilikom izračunavanja varijanse diskretnog S-metoda podimo od njegovog definicionog izraza (III.3). Iz činjenice da je $SM_x(n,k)$ realna funkcija, glava I, varijansa diskretnog S-metoda se može napisati u sljedećoj formi:

$$\sigma_{xx}^2 = E\{SM_x^2(n,k)\} - E^2\{SM_x(n,k)\}. \quad (\text{III.15})$$

Nakon nekoliko uobičajenih transformacija, [105], [108], pokazuje se da se varijansa može predstaviti sumom dvije komponente, $\sigma_{xx}^2 = \sigma_{fv}^2 + \sigma_{vv}^2$. Komponenta σ_{fv}^2 zavisi od analiziranog signala $f(n)$ i od šuma $v(n)$, dok druga komponenta varijanse, σ_{vv}^2 zavisi samo od aditivnog šuma $v(n)$. Opšti oblik σ_{vv}^2 komponente varijanse je:

$$\begin{aligned} \sigma_{vv}^2 &= \frac{1}{(2L_d+1)^2} \sum_{l_1, l_2=-L_d}^{L_d} \sum_{i_1, i_2, i_3, i_4=0}^{N-1} w(i_1)w(i_2)w(i_3)w(i_4) \times \\ &\times [E\{v(n+i_1)v^*(n+i_2)v(n+i_3)v^*(n+i_4)\} - E\{v(n+i_1)v^*(n+i_2)\}E\{v(n+i_3)v^*(n+i_4)\}] \times \\ &\times \exp(-j\frac{2\pi}{N}k(i_1-i_2+i_3-i_4)) \exp(-j\frac{2\pi}{N}[l_1(i_1+i_2)+l_2(i_3+i_4)]). \end{aligned} \quad (\text{III.16})$$

Prepostavljajući Gaussov šum $v(n)$, [108],

$$\begin{aligned} &E\{v(n+i_1)v^*(n+i_2)v(n+i_3)v^*(n+i_4)\} = \\ &= R_{vv}(i_1-i_2)R_{vv}(i_3-i_4) + R_{vv}^*(i_1-i_3)R_{vv}^*(i_2-i_4) + R_{vv}(i_1-i_4)R_{vv}(i_3-i_2) \end{aligned} \quad (\text{III.17})$$

i bijeli šum, konačno dobijamo:

$$\sigma_{vv}^2 = \frac{\sigma_v^4}{(2L_d+1)^2} \sum_{l_1, l_2=-L_d}^{L_d} W_w^2(l_1+l_2) = \frac{r_w N^2 \sigma_v^4}{(2L_d+1)^2}, \quad (\text{III.18})$$

gdje je:

$$r_w = \frac{1}{N^2} \sum_{l_1, l_2 = -L_d}^{L_d} W_{w^2}^2(l_1 + l_2). \quad (\text{III.19})$$

Sa r_w je označena konstanta zavisna od vrste primijenjenog prozora $w^2(i)$, Tabela III.1. Normalizovane vrijednosti varijanse $\sigma_{vv}^2 / (N^2 \sigma_v^4)$ za najčešće upotrebljavane oblike prozora $w^2(i)$ su prikazane na slici III.1.

U slučaju posmatranog (kompleksnog) šuma $v(n)$ imamo da je: $E\{v(n_1)v(n_2)\} = 0$ i $E\{v^*(n_1)v^*(n_2)\} = 0$. Tada se komponenta varijanse koja zavisi od analiziranog signala i od šuma, σ_{fv}^2 , može predstaviti u obliku:

$$\begin{aligned} \sigma_{fv}^2 &= \frac{\sigma_v^2}{(2L_d + 1)^2} \times \\ &\times \left\{ \sum_{l_1, l_2 = -L_d}^{L_d} \sum_{i_1, i_2, i_3, i_4 = 0}^{N-1} w^2(i_3) w(i_1) f(n+i_1) w(i_4) f^*(n+i_4) \exp(-j \frac{2\pi}{N} [i_1(k+l_1) - i_4(k-l_2) + i_3(l_1+l_2)]) + \right. \\ &+ \left. \sum_{l_1, l_2 = -L_d}^{L_d} \sum_{i_1, i_2, i_3 = 0}^{N-1} w^2(i_1) w(i_2) f^*(n+i_2) w(i_3) f(n+i_3) \exp(-j \frac{2\pi}{N} [i_3(k+l_2) - i_2(k-l_1) + i_1(l_1+l_2)]) \right\}. \end{aligned} \quad (\text{III.20})$$

Uočavajući diskretne forme STFT u posljednjoj jednačini, $\sum_{i=0}^{N-1} w(i)f(n+i) \exp(-j \frac{2\pi}{N} i(k+l_1)) = STFT_f(n, k+l_1)$,

jednačinu (III.20) možemo predstaviti sa:

$$\sigma_{fv}^2 = \frac{2\sigma_v^2}{(2L_d + 1)^2} \sum_{l_1, l_2 = -L_d}^{L_d} W_{w^2}(l_1 + l_2) STFT_f(n, k+l_1) STFT_f^*(n, k-l_2). \quad (\text{III.21})$$

Za pravougaonu funkciju prozora $w^2(i)$, $W_{w^2}(l_1 + l_2) = N\delta(l_1 + l_2)$, posljednja se jednačina svodi na sljedeći veoma jednostavan oblik:

$$\sigma_{fv}^2 = \frac{2N\sigma_v^2}{(2L_d + 1)^2} \sum_{l=-L_d}^{L_d} SPEC_f(n, k+l). \quad (\text{III.22})$$

Slični oblici se mogu dobiti i za ostale funkcije prozora $w^2(i)$. Npr., u slučaju Hanningovog prozora, $W_{w^2}(l_1 + l_2) = 0.5N\delta(l_1 + l_2) - 0.25N[\delta(l_1 + l_2 - 1) + \delta(l_1 + l_2 + 1)]$,

$$\sigma_{fv}^2 = \frac{N\sigma_v^2}{(2L_d + 1)^2} \sum_{l=-L_d}^{L_d} \{SPEC_f(n, k+l) - \frac{1}{2}[STFT_f(n, k+l+1) + STFT_f(n, k+l-1)]STFT_f^*(n, k+l)\}. \quad (\text{III.23})$$

III.1.3.1. REALNI ŠUM

U slučaju realnog šuma važi, [108]: $R_{vv}(n) = R_{v^*v}(n) = R_{vv^*}(n) = R_{v^*v^*}(n)$. Opservacijama, sličnim kao u slučaju kompleksnog šuma, dobijamo:

$$\sigma_{vv}^2 = \frac{\sigma_v^4}{(2L_d + 1)^2} \sum_{l_1, l_2 = -L_d}^{L_d} \sum_{i_1, i_2 = 0}^{N-1} w^2(i_1) w^2(i_2) (1 + e^{-j\frac{2\pi}{N}2k(i_1-i_2)}) e^{-j\frac{2\pi}{N}[i_1(l_1+l_2)+i_2(l_1+l_2)]}. \quad (\text{III.24})$$

Prvi sabirak u posljednjoj jednačini predstavlja varijansu S-metoda dobijenu u slučaju kompleksnog šuma, jednačina (III.18). Sličnim transformacijama se može uprostiti i drugi sabirak, tako da se posljednja jednačina može predstaviti u sljedećoj formi:

$$\sigma_{vv}^2 = \frac{r_w N^2 \sigma_v^4}{(2L_d + 1)^2} + \frac{\sigma_v^4}{(2L_d + 1)^2} \sum_{l_1, l_2 = -L_d}^{L_d} W_w^2(l_1 + l_2 + 2k) W_w^2(l_1 + l_2 - 2k). \quad (\text{III.25})$$

Polazeći od definicije $W_w^2(l)$ i konstante r_w , dobijamo:

$$\sigma_{vv}^2 = \frac{r_w N^2 \sigma_v^4}{(2L_d + 1)^2} + \frac{\sigma_v^4}{(2L_d + 1)^2} \sum_{l_1, l_2 = -L_d}^{L_d} W_w^2(l_1 + l_2) \delta(2k) = \frac{r_w N^2 \sigma_v^4}{(2L_d + 1)^2} [1 + \delta(2k)]. \quad (\text{III.26})$$

Primijetimo da se varijanse σ_{vv}^2 , dobijene u slučajevima realnog i kompleksnog šuma sa nezavisnim realnim i imaginarnim djelovima, veoma malo razlikuju u najvećem dijelu TF ravni. Jedina razlika među njima je u postojanju faktora $\delta(2k)$ u prvom slučaju, tako da se jednostavno može zaključiti da varijansa σ_{vv}^2 ima dvostruko veću vrijednost u slučaju realnog šuma na frekvenciji koja odgovara vrijednosti $k = 0$.

Sličnim transformacijama, izvodimo σ_{fv}^2 komponentu varijanse:

$$\begin{aligned} \sigma_{fv}^2 = & \frac{2\sigma_v^2}{(2L_d + 1)^2} \sum_{l_1, l_2 = -L_d}^{L_d} \{ W_w^2(l_1 + l_2) STFT_f(n, k + l_1) STFT_f^*(n, k - l_2) + \\ & + W_w^2(l_1 + l_2 - 2k) \operatorname{Re}[STFT_f(n, k + l_1) STFT_f(n, k + l_2)] \}. \end{aligned} \quad (\text{III.27})$$

Zaključimo da se varijansa, u slučaju realnog šuma, malo (gotovo neznatno) razlikuje od varijanse dobijene u slučaju kompleksnog šuma sa nezavisnim realnim i imaginarnim djelovima podjednakih varijansi.

III.1.4. VARIJANSA KOD SPEKTROGRAMA I KOD PSEUDO WD

U posebnom slučaju $L_d = 0$, $P_d(l) = \delta(l)$, jednačina (III.26) se svodi na oblik:

$$\sigma_{vv}^2 = r_w \Big|_{L_d=0} N^2 \sigma_v^4 [1 + \delta(2k)]. \quad (\text{III.28})$$

Kako je u slučaju diskretnih signala: $\delta(2k) = \delta^2(k)$, kao i sa druge strane:

$$N^2 \delta(2k) = \left[\sin\left(\frac{2\pi}{N} kN\right) \middle/ \sin\left(\frac{2\pi}{N} k\right) \right]^2, \quad (\text{III.29})$$

jednostavno dobijamo varijansu u slučaju spektrograma,

$$\sigma_{vv}^2 = r_w \Big|_{L_d=0} \left[N^2 + \left(\sin \frac{2\pi}{N} kN \right) \left/ \sin \frac{2\pi}{N} k \right. \right]^2 \sigma_v^4. \quad (\text{III.30})$$

Posljednja jednačina je, odvojenim izvođenjem, prezentirana u [105] u slučaju pravougaonog prozora $w^2(i)$.

Zamjenjujući $2L_d + 1 = N$ ($P_d(l) = 1$, za $\forall l$) u jednačinu (III.26), te uočavajući da je:

$$\delta(2k) = \sin \left(\frac{2\pi}{N} 2kN \right) \left/ \left(N \sin \left(\frac{2\pi}{N} 2k \right) \right) \right., \quad (\text{III.31})$$

dobijamo varijansu pseudo WD (uzimajući u obzir $\alpha(l)$, jednačina (I.116)):

$$\sigma_{vv}^2 = r_w \Big|_{L_d=N/2} \left[1 + \sin \left(\frac{2\pi}{N} 2kN \right) \left/ \left(N \sin \left(\frac{2\pi}{N} 2k \right) \right) \right. \right]^2 \sigma_v^4. \quad (\text{III.32})$$

Posljednja se jednačina u slučaju pravougaunog prozora svodi na oblik:

$$\sigma_{vv}^2 = N \left[1 + \sin \left(\frac{2\pi}{N} 2kN \right) \left/ \left(N \sin \left(\frac{2\pi}{N} 2k \right) \right) \right. \right]^2 \sigma_v^4, \quad (\text{III.33})$$

koji je pojedinačnim izvođenjem dobijen u [158]. Uočimo da varijansa pseudo WD estimatora (koja je beskonačna u slučaju originalne (prozorom neodsječene) WD), uzima konačnu vrijednost zavisnu od konstante r_w . Drugim riječima, može se zaključiti da je, u cilju smanjenja varijanse šuma, neophodno izvršiti odsjecanje analiziranog signala što užom funkcijom prozora. Suprotno ovom zaključku, pokazano je da se ovim značajno povećava sistematska greška pseudo WD estimatora. Stoga se, u cilju određivanja optimalne širine prozora $w^2(i)$ nameće potreba njenog kompromisnog izbora. Izbor se vrši minimiziranjem srednje kvadratne greške pseudo WD estimatora, $e^2 = b^2 + \sigma_{xx}^2$, [154], [158]. Time se postiže minimiziranje greške posmatranog estimatora u svim tačkama TF ravni. Posmatrajući signale konačne snage, $|f(n)|^2 \leq P_f$, varijansu WD estimatora možemo grubo aproksimirati sljedećim izrazom:

$$\sigma_{xx}^2 \leq r_w \Big|_{L_d=N/2} (4P_f + 2\sigma_v^2) \sigma_v^2. \quad (\text{III.34})$$

Pretpostavljajući Hanningov prozor $w^2(i)$, $r_w \Big|_{L_d=N/2} = 3N/8$, posljednja jednačina poprima oblik:

$$\sigma_{xx}^2 \leq 3N(4P_f + 2\sigma_v^2) \sigma_v^2 / 8, \quad (\text{III.35})$$

tako da se srednja kvadratna greška pseudo WD estimatora, u ovom slučaju, može napisati u obliku:

$$e^2 = b_f^2(n, \omega) \frac{(2\pi/N)^4}{256} + \frac{3N}{8} (4P_f + 2\sigma_v^2) \sigma_v^2. \quad (\text{III.36})$$

Optimalnu širinu prozora $w^2(i)$ dobijamo u stacionarnoj tački srednje kvadratne greške (određenoj iz jednakosti $\partial e^2 / \partial N = 0$). U slučaju Hanningovog prozora,

$$N = 5 \sqrt{\frac{b_f^2(n, \omega) \pi^4}{3\sigma_v^2(2P_f + \sigma_v^2)}}. \quad (\text{III.37})$$

Primjetimo da je optimalna širina prozora direktno proporcionalna drugom izvodu WD po frekvenciji. *Ova veličina nije unaprijed poznata, tako da je optimalna širina prozora (III.37) praktično neupotrebljiva.* U cilju njenog adekvatnog određivanja razvija se, [153]-[155], algoritam za efiksno TF predstavljanje signala sa šumom. Algoritam upotrebljava samo analitičku formulu za varijansu šuma analiziranog estimatora. Kvalitet predstavljanja primjenom algoritma je veoma blisak kvalitetu reprezentacije signala sa šumom sa optimalnom širinom prozora (III.37), naravno, pod uslovom da je analizirani signal unaprijed poznat. Isti algoritam može biti generalisan za slučaj predstavljanja multikomponentnih signala proizvoljnom kvadratnom distribucijom iz Cohenove klase. Algoritam se upotrebljava i prilikom određivanja trenutne frekvencije analiziranog signala, kada će biti detaljno razmatran. Njegov uprošćeni oblik će biti predstavljen prilikom određivanja funkcije oslonca vremenski-promjenljivih (nestacionarnih) filtera.

III.1.5. PRIMJER SINUSOIDALNOG SIGNALA $f(n)$

Prepostavimo da se analizirani signal $f(n)$ unutar prozora, za dati trenutak n , može predstaviti sinusoidom (konstantni FM signal):

$$x(n) = f(n) + v(n) = A \exp(j \frac{2\pi}{N} k_0 n) + v(n). \quad (\text{III.38})$$

Diskretni oblik STFT korisnog signala $f(n)$, u trenutku n , može biti predstavljen u obliku:

$$\text{STFT}_f(n, k) = \sum_{i=0}^{N-1} f(n+i) w(i) e^{-j \frac{2\pi}{N} ki} = N \delta(k - k_0) f(n) \quad (\text{III.39})$$

za pretpostavljeni pravougaoni prozor $w(i)$. Istovremeno je S-metod ovako definisanog signala $f(n)$, u slučaju primjene pravougaonog prozora $P_d(l)$,

$$\begin{aligned} \text{SM}_f(n, k) &= \frac{1}{2L_d + 1} \sum_{l=-L_d}^{L_d} \text{STFT}_f(n, k+l) \text{STFT}_f^*(n, k-l) = \\ &= \frac{A^2 N^2}{2L_d + 1} \sum_{l=-L_d}^{L_d} \delta(k - k_0 + l) \delta(k - k_0 - l) = \frac{A^2 N^2}{2L_d + 1} \delta(k - k_0), \end{aligned} \quad (\text{III.40})$$

pri čemu je upotrijebljena činjenica da je: $\delta(k - k_0 + l)\delta(k - k_0 - l) = \delta(k - k_0)\delta(l)$. Iz (III.40) dobijamo dva marginalna slučaja S-metoda - spektrogram i pseudo WD, respektivno,

$$SPEC_f(n, k) = A^2 N^2 \delta(k - k_0), \quad (\text{III.41})$$

$$PWD_f(n, k) = A^2 N \delta(k - k_0). \quad (\text{III.42})$$

Kao kriterijum za poređenje navedenih TF metoda definišemo *maksimalni odnos signal-šum* (S/N_{\max}). On se definiše odnosom kvadrata apsolutne maksimalne vrijednosti distribucije i varijanse estimatora posmatrane distribucije⁹. Na primjer, u slučaju S-metoda:

$$S/N_{\max} = \frac{\left| \max \{SM_f(n, k)\} \right|^2}{\sigma_{vv}^2 + \sigma_{fv}^2}. \quad (\text{III.43})$$

U slučaju kompleksnog šuma sa nezavisnim realnim i imaginarnim djelovima, jednačine (III.18), (III.22) i (III.40), posljednja jednačina poprima sljedeći oblik:

$$S/N_{\max} = \frac{\left(\frac{A^2 N^2}{2L_d + 1} \right)^2}{\frac{N^2 \sigma_v^2}{2L_d + 1} \left(\frac{2AN}{2L_d + 1} \sum_{l=-L_d}^{L_d} \delta(k - k_0 + l) + \sigma_v^2 \right)} = \begin{cases} \frac{A^4 N^2}{(2L_d + 1) \sigma_v^4}, & \text{za } |k - k_0| > L_d \\ \frac{A^4 N^2}{(2L_d + 1) \sigma_v^2 \left(\frac{2A^2 N}{2L_d + 1} + \sigma_v^2 \right)}, & \text{za } |k - k_0| \leq L_d. \end{cases} \quad (\text{III.44})$$

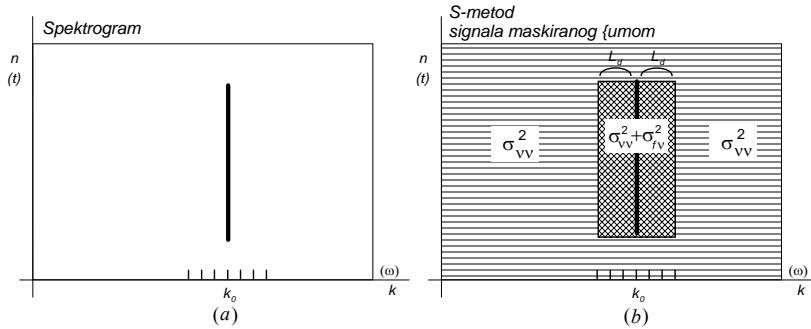
Primijetimo da u ovom slučaju možemo razlikovati dva dijela TF ravni:

1. Π_{vv} , u kom postoji samo jedna komponenta varijanse šuma: σ_{vv}^2 (za $|k - k_0| > L_d$);
2. Π_{fv} , u kom postoje obje komponente varijanse šuma: $\sigma_{vv}^2 + \sigma_{fv}^2$ (za $|k - k_0| \leq L_d$), slika III.2.

⁹Alternativno, odnos signal-šum može biti predstavljen lokalnim odnosom posmatrane distribucije i njene varijanse:

$$S/N = \frac{|SM_f(n, k)|^2}{\sigma_{vv}^2 + \sigma_{fv}^2}.$$

U radu je data prednost definiciji (III.43) pošto su tako dobijeni rezultati jednostavniji. Takođe, definicijom (III.43) se vrši međusobno poređenje maksimalne vrijednosti distribucije sa šumom u čitavoj TF ravni. Ovo je veoma značajno u mnogim praktičnim primjenama, posebno kada se maksimalna vrijednost posmatrane distribucije upotrebljava za estimaciju trenutne frekvencije analiziranog signala. U tom slučaju nije interesantan lokalni odnos definisan prethodnom jednačinom, posebno ne u tačkama TF ravni u kojima je distribucija jednaka nuli. U tim tačkama je predloženo poređenje maksimalne vrijednosti sa varijansom distribucije, što predstavlja mjeru kvaliteta željene detekcije.



Slika III.2: Raspodjela varijanse u slučaju sinusoidalnog signala maskiranog dodatim šumom,

(a) spektrogram, (b) S-metod

Traženje maksimalnog odnosa signal-šum (S / N_{\max}) u dijelu TF ravni gdje ne postoji signal (Π_{vv} dio ravni) je veoma značajno sa praktičnog aspekta. Naime, prilikom detektovanja signala na trenutnoj frekvenci, interesantno je da li u okolini postoje značajne smetnje čija bi amplituda "prikrila" signal na "stvarnoj" trenutnoj frekvenci. Drugim riječima, ukoliko je šum takve snage, relativno posmatrano u odnosu na snagu signala, da doprinosi pogrešnom detektovanju maksimalne vrijednosti analiziranog signala, takav je šum nepoželjan, a samim tim je i distribucija sa ovakvim odnosom signal-šum praktično neupotrebljiva. Uočimo da je u Π_{vv} dijelu ravni:

$$S / N_{\max} = \frac{A^4 N^2}{\sigma_v^4 (2L_d + 1)} = \frac{N^2}{2L_d + 1} (S / N_i)^2, \quad (\text{III.45})$$

gdje je $S / N_i = A^2 / \sigma_v^2$ odnos signal-šum na ulazu sistema. Jednostavno je zaključiti da se maksimalni odnos S / N_{\max} dobija u slučaju spektrograma ($L_d=0$), dok se njegova minimalna vrijednost dobija u slučaju pseudo WD ($2L_d+1=N$). Ovo je očekivan rezultat kada se prisjetimo da se spektrogram može posmatrati kao zaobljena WD, što je često primjenjivan pristup prilikom njegovog definisanja, [2].

Iz (III.44) uočavamo da je u Π_{fv} dijelu ravni:

$$S / N_{\max} = \frac{(A / \sigma_v)^4}{\frac{2L_d + 1}{N^2} + \frac{2}{N} (A / \sigma_v)^2 \sum_{l=-L_d}^{L_d} \delta(k - k_0 + l)}. \quad (\text{III.46})$$

Primjetimo da na S / N_{\max} odnos tada dominantno utiče komponenta varijanse šuma koja zavisi od signala i šuma - σ_{fv}^2 . Međutim, ova komponenta varijanse egzistira samo u onom dijelu TF ravni koji je ograničen prozorom $P_d(l)$, Π_{fv} oblast, slika III.2. Kod spektrograma se ova oblast poklapa sa domenom TF ravni u kome je spektrogram signala različit od nule, tj. $k = k_0$, jednačina (III.41). Nasuprot tome, kod pseudo WD ova se oblast nalazi na svim

frekvencijama na kojima postoji signal $f(n)$. Drugim riječima, u slučaju pseudo WD dobijamo istu veličinu S / N_{\max} odnosa na svim frekvencijama,

$$\frac{S}{N_{\max}} = \frac{(A/\sigma_v)^4}{\frac{1}{N} + \frac{2}{N}(A/\sigma_v)^2} = \frac{(S/N_i)^2}{\frac{1}{N} + \frac{2}{N}(S/N_i)}. \quad (\text{III.47})$$

Kod spektrograma, u najgorem slučaju (na frekvenciji $k = k_0$), imamo:

$$\frac{S}{N_{\max}} = \frac{(A/\sigma_v)^4}{\frac{1}{N^2} + \frac{2}{N}(A/\sigma_v)^2} = \frac{(S/N_i)^2}{\frac{1}{N^2} + \frac{2}{N}(S/N_i)}. \quad (\text{III.48})$$

Na ostalim frekvencijama ovaj je odnos, kod spektrograma, predstavljen izrazom (III.45) za $L_d=0$.

Ako, na primjer, odaberemo vrijednost amplitude signala $f(n)$, $A = \sigma_v$, tada je u najgorem slučaju za spektrogram:

$S / N_{\max} = N^2 / (1 + 2N)$. Ova se veličina, u slučaju razumnog izbora vrijednosti broja odbiraka N ($N \gg 1$), može aproksimirati veličinom: $S / N_{\max} \approx N/2$. U slučaju pseudo WD, na svim frekvencijama imamo: $S / N_{\max} = N/3$. Zapazimo da i u ovom slučaju spektrogram pokazuje bolje karakteristike sa aspekta S / N_{\max} odnosa u poređenju sa pseudo WD. Njihov odnos izražen u logaritamskoj razmjeri, ima vrijednost: $d = 10 \log(3/2) = 1.761[\text{dB}]$.

III.1.6. LINEARNI FREKVENCIJSKI MODULISANI SIGNAL $f(n)$

Posmatrajmo linearni FM signal $f(t)$ maskiran aditivnim Gaussovim šumom:

$$x(t) = f(t) + n(t) = A \exp(j \frac{at^2}{2}) + n(t). \quad (\text{III.49})$$

Razlog definisanja signala (III.49) u kontinualnom domenu leži u primjenljivosti matematičkih oblika koji ne mogu biti korektno definisani u diskretnom domenu. Dobijene rezultate ćemo, na koncu, transformisati u diskretni domen prije nego što započnemo analizu signala sa šumom.

U cilju dobijanja aproksimativnih kontinualnih formi analiziranih distribucija primijenimo metod stacionarne faze¹⁰. Prepostavimo dovoljno veliku konstantu a , kako bismo ispunili zahtjev za sporopromjenljivom amplitudom

¹⁰Predstavimo metod stacionarne faze, [108], primjenjujući ga na FT signala $y(t) = A(t) \exp(j\phi(t))$. Prepostavimo da signal $y(t)$ zadovoljava uslov: $|A^{(1)}(t)/A(t)| \ll |\phi^{(1)}(t)|$. U tom slučaju, metod stacionarne faze daje FT analiziranog signala u obliku:

signala, A , u odnosu na promjene faze $\varphi(t) - \omega t$, $\varphi(t) = at^2/2$. Sprovodeći navedenu analizu, dobijamo aproksimativni izraz za kratkotrajnu FT,

$$\begin{aligned} STFT_f(t, \omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t + \tau) w(\tau) \exp(-j\omega\tau) d\tau = \\ &\cong A \exp(j[a(t + \tau_0)^2/2 - \omega\tau_0]) w(\tau_0) \sqrt{\frac{2\pi j}{[a(t + \tau)^2/2 - \omega\tau]^{(2)}}} = \\ &\cong w\left(\frac{\omega - at}{a}\right) \sqrt{\frac{2\pi j}{a}} \exp(-j\omega^2/(2a)) f(t), \end{aligned} \quad (\text{III.50})$$

gdje je: $\tau_0 = (\omega - at)/a$. U slučaju spektrograma,

$$SPEC_f(t, \omega) \cong \frac{2\pi A^2}{a} w^2\left(\frac{\omega - at}{a}\right). \quad (\text{III.51})$$

Diskretizacijom prethodne jednačine¹¹ dobijamo diskretnu formu spektrograma u slučaju linearog FM signala,

$$SPEC_f(n, k) \cong \left(\frac{1}{\Delta t}\right)^2 \frac{2\pi A^2}{a} w^2\left(\frac{k\Delta\omega - an\Delta t}{a}\right), \quad (\text{III.52})$$

gdje je $\Delta\omega = 2\pi/(N\Delta t) = 2\pi/T$ interval odabiranja u frekvencijskom domenu, dok su: $\Delta t = T/N$ - interval odabiranja u vremenskom domenu, T - širina prozora $w(\tau)$ i N - broj odbiraka. Preciznije,

$$Y(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} A(t) e^{j\phi(t)} dt \cong e^{j\phi(t_0)} A(t_0) \sqrt{\frac{2\pi j}{\phi^{(2)}(t_0)}},$$

gdje je: $\phi(t) = \varphi(t) - \omega t$, $\phi^{(1)}(t_0) = 0$ i $\phi^{(2)}(t_0) \neq 0$. Iz metoda stacionarne faze direktno slijedi da, ako imamo proizvod $A(t)$ i $w(t)$, pri čemu je $w(t)$ sporopromjenljiva funkcija, $|A(t)w(t)|^{(1)} / |A(t)w(t)| \ll |\phi^{(1)}(t)|$, i ako se trenutna frekvencija može smatrati linearom funkcijom, $\phi^{(1)}(t_0) = at_0 - \omega = 0$, dobijamo:

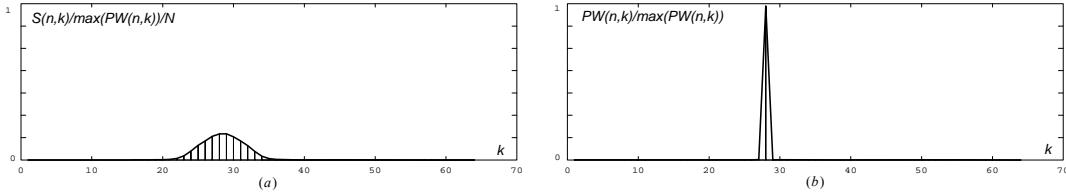
$$Y_w(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} A(t) w(t) e^{j\phi(t)} dt \cong Y(\omega) w(\omega/a),$$

gdje je: $w(\omega/a) = w(t)|_{t=\omega/a}$.

¹¹Diskretna forma FT može biti predstavljena sa, [105], [108]:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n\Delta t) e^{-j\omega n\Delta t} \cong \frac{1}{\Delta t} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt,$$

gdje je Δt - interval odabiranja, $\Delta t = T/N$.

Slika III.3: Normalizovane distribucije u datom trenutku n , (a) spektrogram, (b) pseudo WD

$$SPEC_f(n, k) \approx \frac{2\pi A^2 N^2}{aT^2} w^2 \left(\frac{2\pi k/T - anT/N}{a} \right). \quad (\text{III.53})$$

Pretpostavljajući da funkcija prozora $w(\tau)$ zadovoljava opšte osobine (fusnotu 8), jednostavno dobijamo maksimalnu vrijednost diskretnog oblika spektrograma, potrebnu za izračunavanje odnosa S/N_{\max} ,

$$\max \{SPEC_f(n, k)\} \approx \frac{2\pi A^2 N^2}{aT^2} w^2(0) = \frac{2\pi A^2 N^2}{aT^2}. \quad (\text{III.54})$$

Na sličan način, pseudo WD signala $f(t)$ je:

$$\begin{aligned} PWD_f(t, \omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} w^2(\tau/2) f(t + \frac{\tau}{2}) f^*(t - \frac{\tau}{2}) e^{-j\omega\tau} d\tau = \\ &= A^2 \int_{-\infty}^{\infty} w^2(\tau/2) e^{jat\tau} e^{-j\omega\tau} d\tau = A^2 W(\omega - at), \end{aligned} \quad (\text{III.55})$$

gdje je: $W(\omega) = FT\{w^2(\tau/2)\} = W_{w^2(\tau/2)}(\omega)$. Diskretizacijom posljednje jednačine dobijamo diskretnu pseudo WD,

$$PWD_f(n, k) = \frac{1}{\Delta t} A^2 W(k\Delta\omega - an\Delta t). \quad (\text{III.56})$$

Polazeći od opštih osobina funkcije prozora $w(\tau)$, maksimalnu vrijednost $PWD_f(n, k)$ možemo predstaviti sa:

$$\max \{PWD_f(n, k)\} = \frac{A^2}{\Delta t} W(0) = \frac{A^2 N}{T} 2E_w, \quad (\text{III.57})$$

gdje je: $W(0) = \int_{-\infty}^{\infty} w^2(\tau/2) d\tau = 2 \int_{-\infty}^{\infty} w^2(\tau) d\tau = 2E_w$ dvostruka energija funkcije prozora $w(\tau)$.

Pretpostavljajući pseudo WD konvolucionom sumom STFT i njene konjugovano-kompleksne vrijednosti,

$$PWD_f(n, k) = \frac{1}{N} \sum_{l=-N/2}^{N/2} \alpha(l) STFT_f(n, k+l) STFT_f^*(n, k-l) \quad (\text{III.58})$$

($\alpha(l) = 1$, za $\forall l$, osim za $l = \pm N/2$, kada je: $\alpha(\pm N/2) = 1/2$), te uključujući njenu maksimalnu vrijednost (III.57),

zaključujemo da je:

$$\max \{PWD_f(n, k)\} = \max \left\{ \frac{1}{N} \sum_{l=-N/2}^{N/2} \alpha(l) STFT_f(n, k+l) STFT_f^*(n, k-l) \right\} = \frac{2A^2 N}{T} E_w, \quad (\text{III.59})$$

odnosno,

$$\max \left\{ \sum_{l=-N/2}^{N/2} \alpha(l) STFT_f(n, k+l) STFT_f^*(n, k-l) \right\} = N \frac{2A^2 N}{T} E_w. \quad (\text{III.60})$$

Prilikom izračunavanja maksimalne vrijednosti S-metoda, potrebne za pronalaženje njegovog odnosa S/N_{\max} , pretpostaviti ćemo da je širina prozora $w((2\pi k/T-aT/N)/a)$, L_{dm} . Ovim je pretpostavljeno da širina kratkotrajne FT duž frekvencijske ose iznosi L_{dm} . Posmatrajući definiciju (III.1) S-metoda, sa prozorom $P_d(l)$ konstantne širine, maksimalnu vrijednost S-metoda dobijamo ispunjavajući sljedeće zahtjeve:

1. tražeći je na frekvenciji k , koja se nalazi na sredini intervala na kom STFT uzima nenule vrijednosti, odnosno koji je simetrično raspoređen oko frekvencije k ;
2. pretpostavljajući prozor širine $2L_{dm}+1$ kako bi se uključili svi odbirci STFT koji doprinose njenoj vrijednosti.

Uzimanjem prozora šireg od ovog nećemo povećati snagu signala, već samo snagu šuma. Drugim riječima, takvim izborom samo pogoršavamo odnos signal-šum. Polazeći od jednačina (III.1) i (III.60), dobijamo maksimalnu vrijednost diskretnog S-metoda u formi:

$$\max \{SM_f(n, k)\} = \max \left\{ \frac{1}{2L_{dm}+1} \sum_{l=-L_{dm}}^{L_{dm}} STFT_f(n, k+l) STFT_f^*(n, k-l) \right\} = \frac{2N}{2L_{dm}+1} \frac{A^2 N}{T} E_w. \quad (\text{III.61})$$

Pronađimo sada S/N_{\max} odnos i to najprije u dijelu TF ravni u kom postoji samo σ_{vv}^2 komponenta varijanse šuma.

Za spektrogram, u slučaju kompleksnog šuma sa nezavisnim realnim i imaginarnim djelovima, dobijamo:

$$S/N_{\max} = \frac{\max \{SPEC_f(n, k)\}^2}{\sigma_{vv}^2} = \frac{4\pi^2 N^2 A^4}{(aT^2)^2 \sigma_v^4}, \quad (\text{III.62})$$

dok je u slučaju S-metoda, za $L_d \geq L_{dm}$ (uključujući i pseudo WD sa $2L_d+1=N$):

$$S/N_{\max} = \frac{\max \{SM_f(n, k)\}^2}{\sigma_{vv}^2} = \frac{\left(\frac{2N}{2L_d+1} \frac{A^2 N}{T} E_w \right)^2}{\frac{N^2 \sigma_v^4}{2L_d+1}} = \frac{4N^2 A^4 E_w^2}{T^2 (2L_d+1) \sigma_v^4}. \quad (\text{III.63})$$

Odnos signal-šum (S/N) za S-metod i za spektrogram možemo predstaviti u formi:

$$R = \frac{S/N_{\max}|_{S\text{-metod}}}{S/N_{\max}|_{\text{Spektrogram}}} = \left(\frac{aT^2}{\pi} \right)^2 C_w^2 \frac{1}{2L_d+1} = r_s r_w r_p, \quad (\text{III.64})$$

gdje je $C_w = E_w/T$ konstanta zavisna od oblika primijenjenog prozora $w(\tau)$, ali ne i od njegove širine. Za različite oblike funkcije prozora lako se mogu pronaći vrijednosti ove konstante, Tabela III.1.

Primijetimo da se koeficient R sastoji iz tri dijela: r_s - zavisnog od oblika analiziranog signala, r_w - zavisnog od funkcije prozora $w(\tau)$ i r_p - zavisnog od prozora $P_d(l)$. Takođe vidimo da vrijednost R opada sa porastom L_d tako da uzimanjem minimalne širine prozora za koju je ova jednačina zadovoljena, $L_d = L_{dm}$, i iz činjenice da za $k = L_{dm}$ slijedi $w(k\Delta\omega/a) = 0$ (odnosno, $(2L_{dm} + 1)\Delta\omega/a = T$), dobijamo:

$$2L_{dm} + 1 = \frac{aT}{\Delta\omega} = \frac{aT^2}{2\pi}, \quad (\text{III.65})$$

$$R = \frac{2aT^2}{\pi} C_w^2. \quad (\text{III.66})$$

Jednačine (III.64) i (III.66) pokazuju na prvi pogled neočekivane rezultate. Naime, za razliku od primjera sinusoidalnog signala, ovdje se najbolji odnos signal-šum ne postiže u slučaju spektrograma, već u slučaju S-metoda sa pogodno odabranom širinom prozora $P_d(l)$. Takođe, kako se širina prozora $P_d(l)$ povećava (težeći maksimalnoj - slučaj pseudo WD), ovaj odnos se znatno pogoršava.

Pronađimo, zatim S/N_{\max} odnos u Π_{fv} dijelu TF ravni u kom postoje obje komponente varijanse šuma. U slučaju spektrograma ($L_d = 0$) jednačina (III.22) poprima oblik:

$$\sigma_{fv}^2 = 2N\sigma_v^2 \max\{SPEC_f(n, k)\} = \frac{4\pi A^2 N^3 \sigma_v^2}{aT^2}, \quad (\text{III.67})$$

tako da je S/N_{\max} odnos u ovom slučaju,

$$S/N_{\max}|_{Spec.} = \left(\frac{2\pi A^2 N^2}{aT^2} \right)^2 \Bigg/ \left(\frac{4\pi A^2 N^3 \sigma_v^2}{aT^2} + N^2 \sigma_v^4 \right). \quad (\text{III.68})$$

Napomenimo da je kod spektrograma Π_{fv} oblast ekvivalentna domenu TF ravni gdje je spektrogram signala $f(n)$

različit od nule. U slučaju S-metoda, za $L_d \geq L_{dm}$, i implementacije pravougaonog prozora $w(\tau)$, imamo:

$$S/N_{\max} = \left(\frac{2N}{2L_d + 1} \frac{A^2 N}{T} E_w \right)^2 \Bigg/ \left(\sigma_{fv}^2 + \frac{N^2 \sigma_v^4}{2L_d + 1} \right), \quad (\text{III.69})$$

gdje je:

$$\sigma_{fv}^2 = \frac{2N\sigma_v^2}{(2L_d + 1)^2} \sum_{l=-L_d}^{L_d} SPEC_f(n, k + l) \leq \frac{2N\sigma_v^2}{2L_d + 1} \max\{SPEC_f(n, k)\}. \quad (\text{III.70})$$

Posljedice ovoga i (III.61) su sljedeće nejednakosti:

$$\sigma_{fv}^2 \leq \frac{2N\sigma_v^2}{2L_d + 1} \frac{2\pi A^2 N^2}{aT^2} = \frac{4\pi A^2 N^3 \sigma_v^2}{aT^2 (2L_d + 1)}, \quad (\text{III.71})$$

$$S/N_{\max}|_{SM} \geq \left(\frac{2A^2 N^2}{2L_d + 1} C_w \right)^2 \left/ \left(\frac{4\pi A^2 N^3 \sigma_v^2}{aT^2 (2L_d + 1)} + \frac{N^2 \sigma_v^4}{2L_d + 1} \right) \right). \quad (\text{III.72})$$

Notirajmo da se poređenjem jednačina (III.68) i (III.72) mogu izvesti isti zaključci kao prilikom analize odnosa R u Π_{vv} dijelu ravni.

III.1.7. NUMERIČKA ANALIZA

U cilju numeričke potvrde rezultata dobijenih u prethodnom poglavljtu posmatrajmo linearni FM signal:

$$x(t) = f(t) + n(t) = A \exp(jat^2/2) + n(t), \quad (\text{III.73})$$

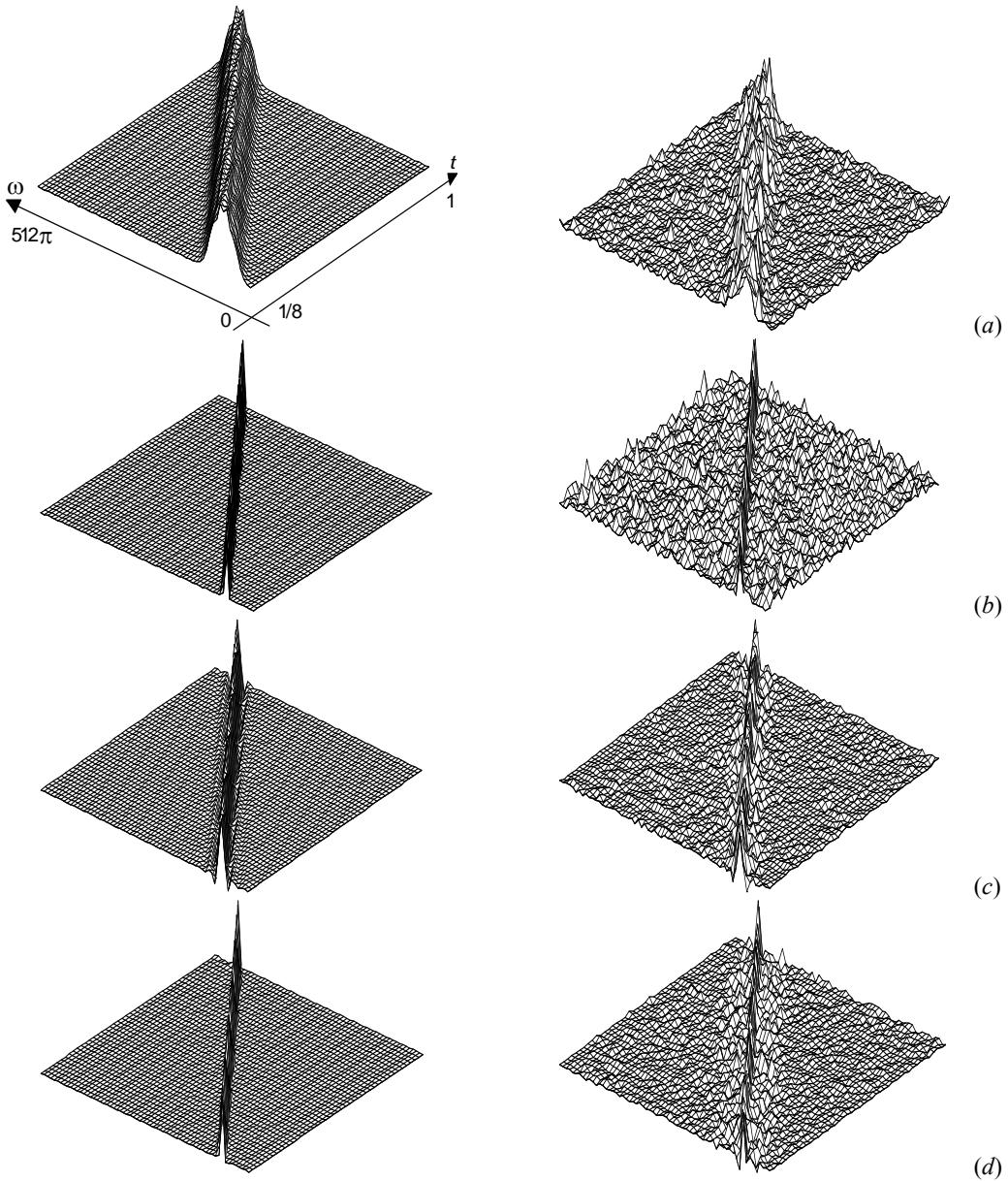
sa $a = 1400$, Hanningovim prozorom širine $T = 0.25$, brojem odbiraka $N = 128$, amplitude $A = 1$ i varijansom šuma $\sigma_v^2 = 1$. Za date parametre je $R = 7.85$, tj. odnos amplituda $\sqrt{R} = 2.82$. Drugim riječima, S-metod, u ovom slučaju, daje bolji odnos signal-šum u poređenju sa marginalnim mu slučajevima (spektrogramom i pseudo WD). Rezultati dobijeni numeričkom analizom linearne FM signala (sa i bez šuma) su prikazani na slikama III.4.(a)-(d), za slučaj spektrograma, WD i S-metoda (za $L_d = 2$ i $L_d = 6$), respektivno.

Sa slike III.4.(a) jednostavno primjećujemo da je šum kod spektrograma posebno izražen u domenu gdje je spektrogram signala različit od nule (Π_{fv} oblast). U slučaju WD, slika III.4.(b), Π_{fv} oblast je čitava TF ravan. Na slikama III.5.(c)-(d) su predstavljeni prelazni oblici među slučajevima na slikama III.5.(a) i III.5.(b). Povećavanjem L_d povećava se koncentracija signala na trenutnoj frekvenciji. S druge strane, povećanjem L_d širi se Π_{fv} dio TF ravnih, i samim tim, pogoršava odnos S/N_{\max} . Uticaj šuma na TF reprezentaciju signala S-metodom (u Π_{vv} dijelu ravni) je manje izražen nego u slučaju spektrograma. Iz ove analize je očigledno da je najpoželjnije ponašanje TF reprezentacije na slici III.5.(c), dobijeno S-metodom sa $L_d = 2$. Naime, za $L_d = 2$ se postiže zadovoljavajuća koncentracija signala na trenutnoj frekvenciji, dok se istovremeno značajno smanjuje Π_{fv} dio TF ravnih, a time i uticaj šuma. Preciznije, povećanjem L_d uključuju se (u sumiranje) i oni odbirci diskretnog STFT koji relativno malo, u odnosu na snagu šuma, doprinose snazi korisnog signala, čime se umanjuje odnos signal-šum.

Uz prethodni primjer, podržimo prethodnu analizu numeričkom analizom sljedećih multikomponentnih signala maskiranih aditivnim Gaussovim šumom:

$$x(t) = f(t) + n(t) = \exp(j[-50\pi t \sin(2\pi t) + 500t]) + \exp(j1400t) + n(t), \quad (\text{III.74})$$

$$x(t) = f(t) + n(t) = \exp(j1400t) + \exp(j680(t-0.1)^2) + 4 \exp(-[150(t-0.8)]^2) \exp(j187.5t^2) + n(t), \quad (\text{III.75})$$



Slika III.4.: TF reprezentacije linearnog FM signala bez (lijeva strana) i sa šumom (sa odnosom signal-šum 0[dB])

(desna strana slike): (a) SPEC, (b) WD, (c) S-metod sa $L_d = 2$, (d) S-metod sa $L_d = 6$

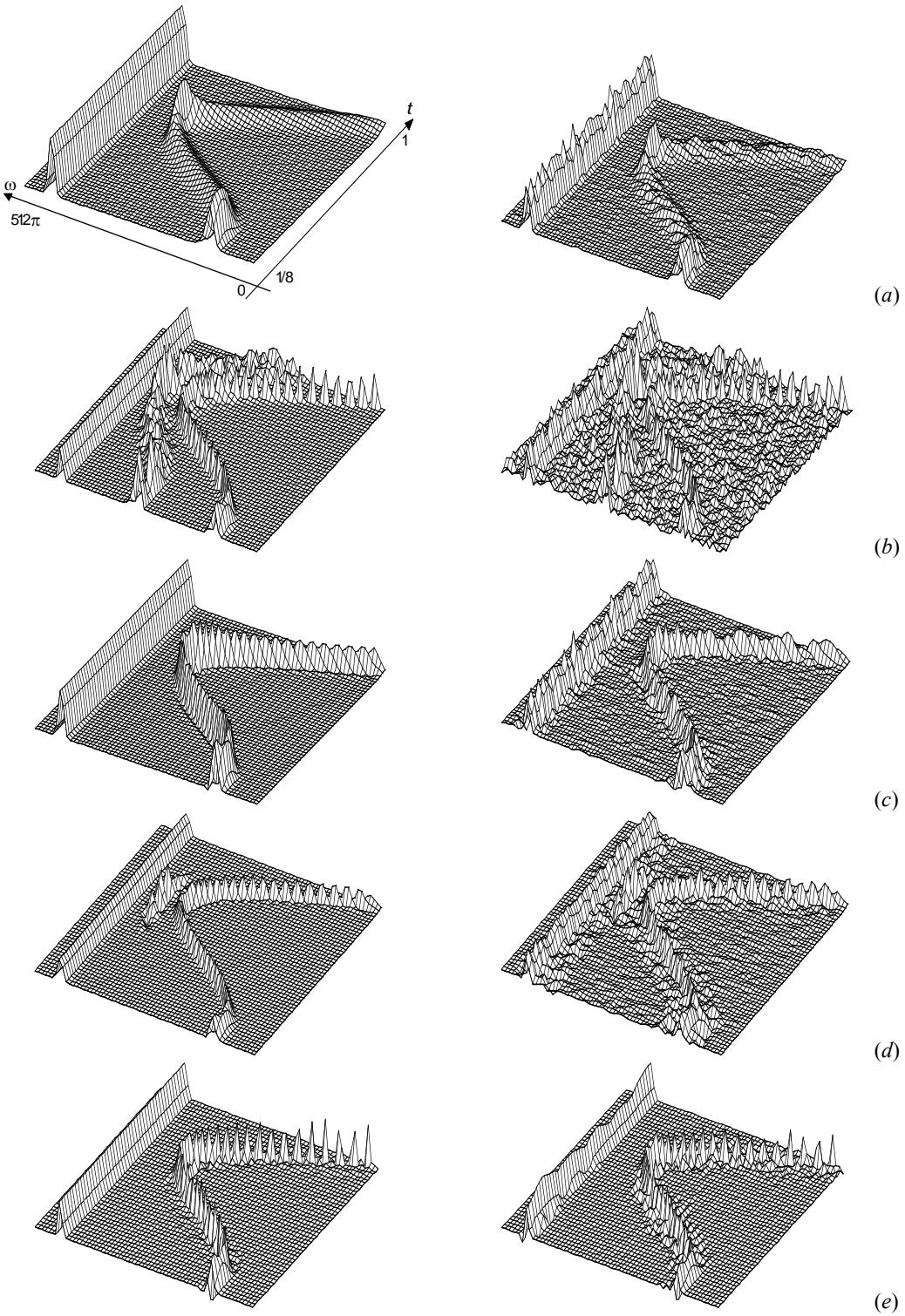
$$x(t) = f(t) + n(t) = \exp(j20\pi t^2) + \exp(-j[8 \sin(2\pi(t+1)) + 3\pi t(5+4t)]) + n(t). \quad (\text{III.76})$$

Zapazimo da je numeričkim proračunima, slike III.5. - III.7., datih primjera još jednom, u cjelini, potvrđena ranija, analitičkim putem sprovedena analiza. Uz to, pri analizi multikomponentnih signala uočljiva je pojava neželjenih efekata interferencije kod WD. Takođe, sa slika se jednostavno primjećuje da se sa ovog aspekta optimalno ponaša spektrogram. Sa druge strane, kod spektrograma je šum posebno izražen u oblasti u kojoj je spektrogram analiziranog

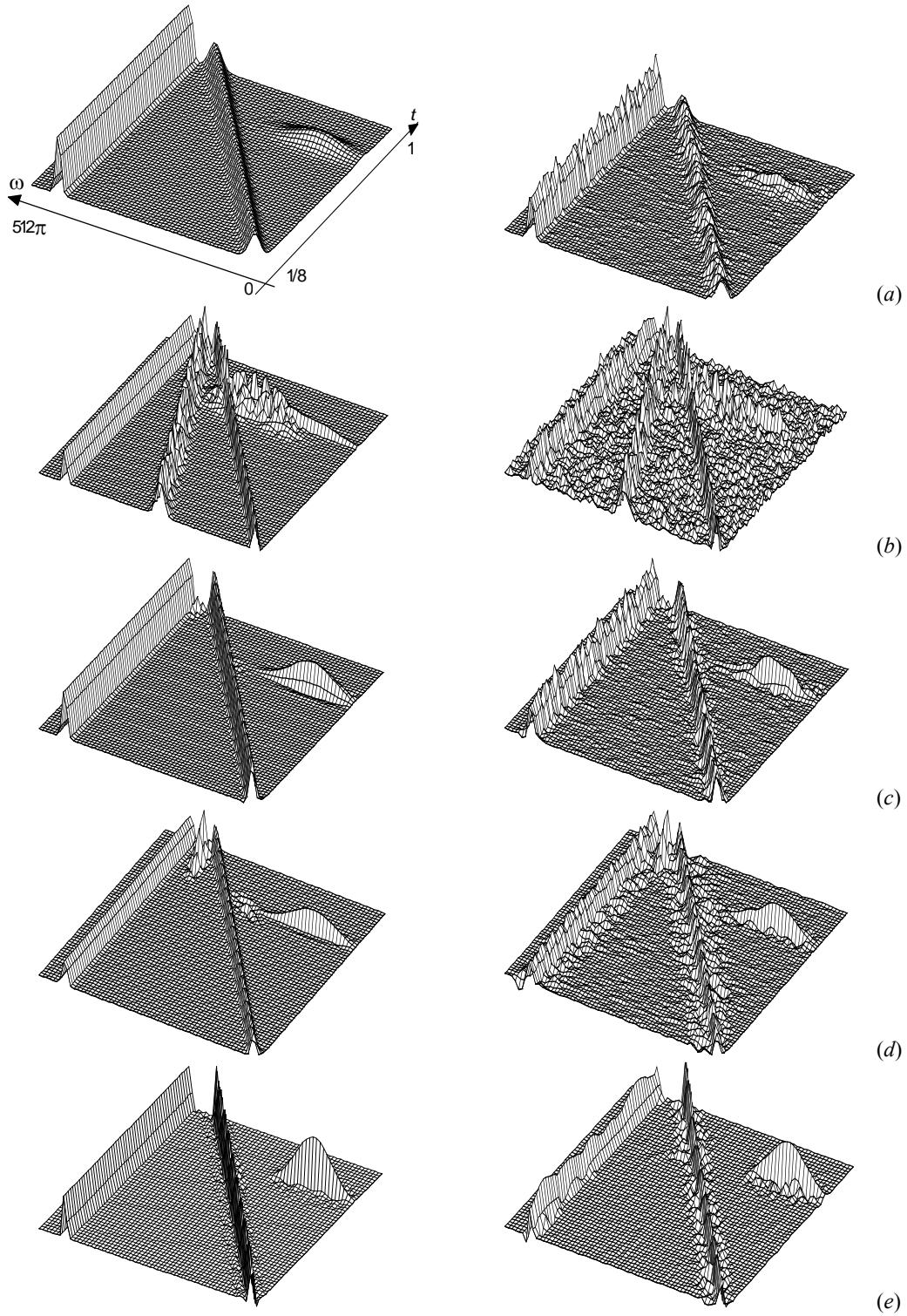
signala različit od nule. Upoređujući spektrogram i WD, slike (a) i (b), uočavamo da su se sve komponente signala raširile oko trenutne frekvencije (kod spektrograma), za razliku od njihove visoke koncentrisanosti kod WD, osim u slučaju čiste sinusoide. Takođe, primjećujemo da je šum kod WD prisutan u čitavoj TF ravni. Analizom multikomponentnog signala S-metodom, slike (c) i (d), postižemo zadovoljavajuću reprezentaciju komponenti signala (blisku onoj kod WD), ali i značajno redukovanje kros-komponenti. One postoje samo u uskoj oblasti TF ravni, kada su komponente signala međusobno na veoma bliskoj udaljenosti, s težnjom njihovog daljeg potiskivanja zajedno sa sužavanjem funkcije prozora $P_d(l)$. Zapazimo, uz to, da se S-metodom značajno potiskuje uticaj šuma na predstavljanje analiziranih signala i da se njegovo značajnije prisustvo zapaža samo u oblasti neposredno oko komponenti signala, koja je definisana širinom prozora $P_d(l)$. Potpuna eliminacija kros-komponenti, prilikom analize multikomponentnog signala čije se komponente ne preklapaju u TF ravni, kao i dalje redukovanje uticaja šuma, se postiže S-metodom sa prozorom $P_{(n,k)}(l)$ zavisnim od osobina analiziranog signala, slike (e). Istovremeno, analizom multikomponentnog signala S-metodom zavisnim od oblika analiziranog signala, pratimo širine STFT njegovih komponenti, čime zaustavljamo sumiranje (u definiciji S-metoda) u svim tačkama TF ravni gdje je bar jedan od činilaca, $STFT_f(n, k+l)$ ili $STFT_f^*(n, k-l)$, jednak nuli. Ovim je onemogućeno sumiranje van komponenti analiziranog signala. Time se, u stvari, osujetilo akumuliranje šuma u tačkama koje su neupotrebljive sa aspekta kvaliteta predstavljanja signala. Istovremeno se, [126], [141], značajno umanjuje broj numeričkih operacija potrebnih za realizaciju S-metoda u odnosu na slučaj iste transformacije sa konstantnom širinom prozora $P_d(l)$.

Sa ciljem potpunog uvida, analiziran je, na koncu, multikomponentni signal (III.76) čije se pojedine komponente međusobno sjeku u TF ravni. Analizirani signal predstavlja primjer multikomponentnog signala kod koga nije moguće ispuniti kriterijum potreban za eliminisanje kros-komponenti S-metodom. Prilikom numeričke analize ovog signala nije uključen S-metod sa prozorom zavisnim od oblika analiziranog signala. Naime, pokazuje se, [141], [171] i poglavljje I.5., da se ovim metodom značajno pogoršava predstavljanje signala u tački presjeka u odnosu na metode nezavise od analiziranog signala. Sa slika III.7.(a)-(d) se mogu izvesti zaključci adekvatni ranije izvedenima. Jasno je, naime, da se S-metodom postiže potiskivanje kros-komponenti u čitavoj TF ravni, izuzev u okolini tačke presjeka, kada one neminovno postoje. Međutim, evidentno je da smanjivanjem širine prozora $P_d(l)$, postižemo proporcionalno veće potiskivanje kros-komponenti, uz jednovremeno smanjivanje uticaja šuma pri analizi signala sa šumom.

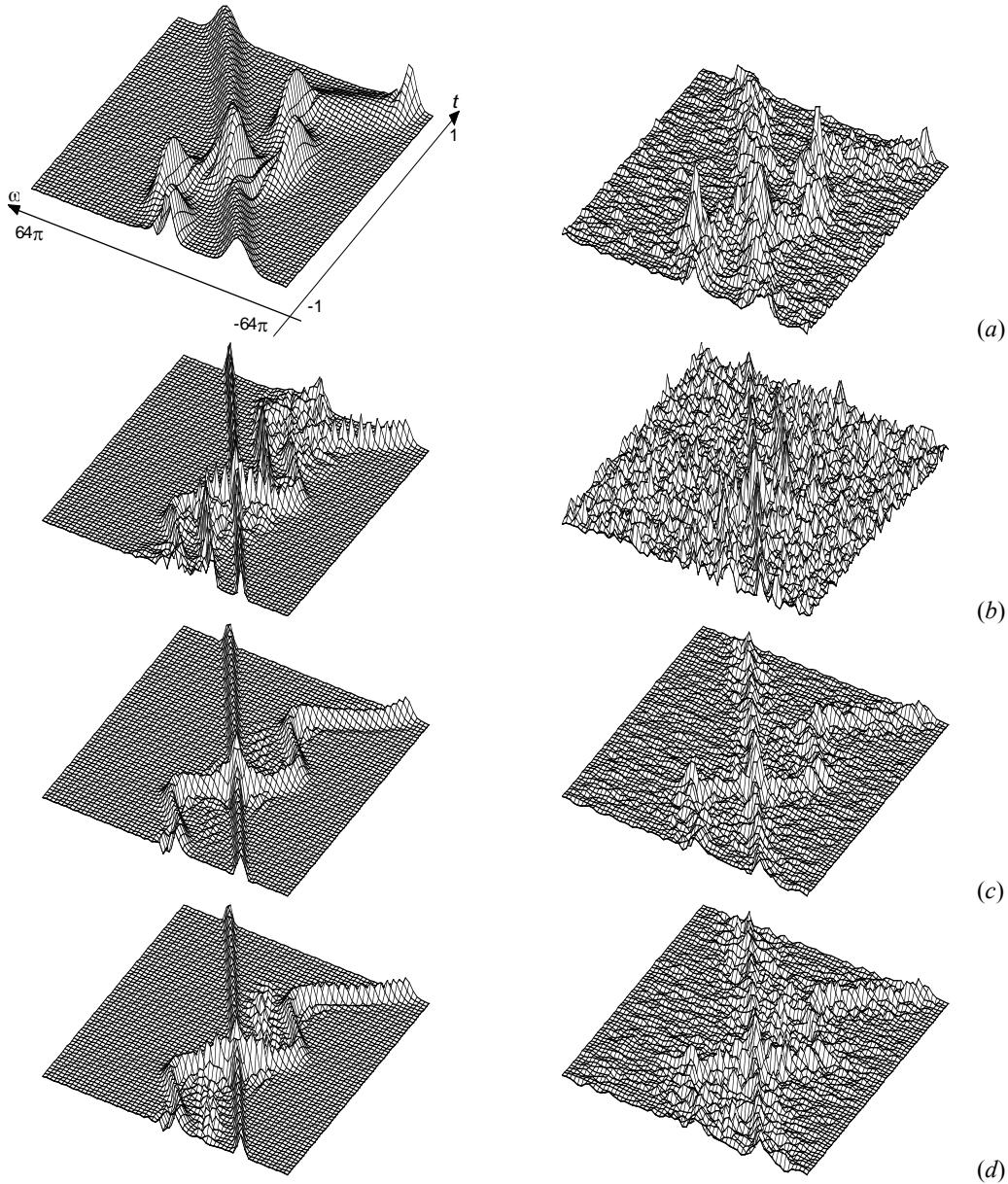
Podvucimo, na koncu, prednost S-metoda sa malom širinom prozora $P_d(l)$ i S-metoda sa prozorom $P_{(n,k)}(l)$, zavisnim od analiziranog signala, u TF analizi signala sa šumom, i to signala čija frekvencija nije konstantna. Naime,



Slika III.5.: TF analiza multikomponentnog signala (III.74) maskiranog Gaussovim šumom varijanse $\sigma_n^2 = 0.5$, kvadratom Hammingovog prozora širine $T = 0.25$ i brojem odbiraka $N = 128$: (a) spektrogram, (b) WD, (c) S-metod sa $L_d = 2$, (d) S-metod sa $L_d = 7$, (e) S-metod sa prozorom $P_{(n,k)}(l)$ zavisnim od analiziranog signala



Slika III.6.: TF analiza multikomponentnog signala (III.75) sa kvadratom Hanningovog prozora širine $T = 0.25$, brojem odbiraka $N = 128$, te varijansom šuma $\sigma_n^2 = 0.5$: (a) spektrogram, (b) WD, (c) S-metod sa $L_d = 2$, (d) S-metod sa $L_d = 6$, (e) S-metod sa prozorom $P_{(n,k)}(l)$ zavisnim od analiziranog signala



Slika III.7.: TF analiza multikomponentnog signala (III.76) sa kvadratom Hanningovog prozora širine $T = 1$, brojem odbiraka $N = 64$, te varijansom šuma $\sigma_n^2 = 0.5$: (a) spektrogram, (b) WD, (c) S-metod sa $L_d = 3$, (d) S-metod sa $L_d = 6$.

već pri izboru relativno male širine prozora $P_d(l)$, ovim metodom postižemo zadovoljavajuću koncentraciju signala na trenutnoj frekvenci, dok je istovremeno njegova varijansa istog reda veličine kao kod spektrograma. Time se postiže značajno poboljšanje kod S-metoda, u pogledu kriterijuma predstavljenog veličinom maksimalnog odnosa signal-šum, u odnosu na praktično najčešće upotrebljavana predstavljanja signala spektrogramom i pseudo WD.

III.2. ANALIZA UTICAJA ŠUMA NA DISTRIBUCIJE IZ COHENOVE KLASE

Ranije je pokazano, glava I, da se kvadratne distribucije generališu opštom Cohenovom klasom distribucija, [35], [37]. Takođe je pokazano da se generalizacija distribucija postiže takozvanom funkcijom jezgra. Za različite oblike funkcije jezgra, [29], [35]-[37], [75], [126], [131], [194], dobijaju se različiti oblici distribucija. Stoga, analiza uticaja šuma na ovu klasu distribucija ima težinu sprovođenja iste analize na svim distribucijama iz posmatrane klase.

U narednim razmatranjima je proširena analiza iz [157], [158] na proizvoljnu kvadratnu distribuciju uključujući sve praktično interesantne oblike slučajnih procesa. Izvedeni su izrazi za srednju vrijednost i varijansu estimatora. Varijansa je, kao frekvencijski zavisna funkcija, prikazana u slučajevima najznačajnijih TF metoda. Upoređujući distribucije koje zadovoljavaju marginalne osobine i osobinu ograničenosti po vremenu, Born-Jordanova distribucija pokazuje optimalne karakteristike s obzirom na veličinu varijanse šuma. Naime, varijansa estimatora Cohenove klase distribucija zavisi od energije funkcije jezgra koja se minimizira jezgrom Born-Jordanove distribucije, [8], [62], [68], [70], [71], [151]. Na kraju je izvedena varijansa posmatranog estimatora u proizvoljnoj tački TF ravni.

III.2.1. ANALIZA ŠUMA

Diskretni oblik Cohenove klase distribucija signala $x(n)$ može biti predstavljen sa, [35], [75]:

$$CD_x(n, \omega; \varphi) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \varphi(m, k) x(n+m+k) x^*(n+m-k) e^{-j2\omega k}. \quad (\text{III.77})$$

Jednostavnim transformacijama može biti određena srednja vrijednost estimatora (III.77),

$$E\{CD_x(n, \omega; \varphi)\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \varphi(m, k) R_{xx}(m+n+k, m+n-k) e^{-j2\omega k},$$

gdje je sa $R_{xx}(m)$ označena autokorelaciona funkcija analiziranog signala $x(n)$.

Takođe, nakon nekoliko uobičajenih transformacija, varijansa estimatora Cohenove klase distribucija, $\sigma^2(\omega) = \text{var}[CD_x(n, \omega; \varphi)]$, može biti predstavljena u sljedećem opštem obliku:

$$\begin{aligned} \sigma^2(\omega) &= \sum_{k_1=-\infty}^{\infty} \sum_{k_2=-\infty}^{\infty} \sum_{m_1=-\infty}^{\infty} \sum_{m_2=-\infty}^{\infty} \varphi(m_1, k_1) \varphi^*(m_2, k_2) \times \\ &\quad \times [R_{xx}(m_1 - m_2 + k_1 - k_2) R_{xx}^*(m_1 - m_2 - k_1 + k_2) + \\ &\quad + R_{xx}^*(m_1 - m_2 + k_1 + k_2) R_{xx}^*(m_1 - m_2 - k_1 - k_2)] e^{-j2\omega(k_1 - k_2)}, \end{aligned} \quad (\text{III.78})$$

U narednim izlaganjima ćemo, najprije, analizirati sve oblike aditivnog šuma, kompleksni, realni i analitički. Podvucimo, na početku, da je uticaj analitičkog šuma veoma interesantan zbog kvadratne prirode razmatranih distribucija. Pretpostavljajući da je sa $x(n)$ označen šum, srednju vrijednost estimatora (III.77), $E\{CD_x(n,\omega;\varphi)\}$, za specijalne oblike šuma, možemo predstaviti u sljedećim oblicima:

1. $E\{CD_x(n,\omega;\varphi)\} = \sigma_x^2 c(0,0)$, za bijeli stacionarni šum varijanse σ_x^2 , $R_{xx}(m,n) = \sigma_x^2 \delta(m-n)$;
2. $E\{CD_x(n,\omega;\varphi)\} = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \Psi(0,2(\omega-\alpha)) S_{xx}(\alpha) d\alpha$, za obojeni stacionarni šum, $R_{xx}(m,n) = R_{xx}(m-n)$;
3. $E\{CD_x(n,\omega;\varphi)\} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \varphi(m,0) I(n+m)$, za bijeli nestacionarni šum, $R_{xx}(m,n) = I(m) \delta(m-n)$, $I(m) \geq 0$. Sa $S_{xx}(\omega)$ je označena spektralna gustina snage stacionarnog šuma.

III.2.1.1. KOMPLEKNSKI ŠUM

Prepostavimo kompleksni Gaussov šum sa nezavisnim realnim i imaginarnim djelovima podjednakih varijansi $\sigma_x^2/2$. U ovom slučaju je, [108], $R_{x^*x}(k) = R_{xx^*}(k) = 0$, tako da je varijansa (III.78) estimatora Cohenove klase:

$$\begin{aligned} \sigma^2(\omega) &= \sum_{k_1=-\infty}^{\infty} \sum_{k_2=-\infty}^{\infty} \sum_{m_1=-\infty}^{\infty} \sum_{m_2=-\infty}^{\infty} \varphi(m_1, k_1) \varphi^*(m_2, k_2) \times \\ &\quad \times [R_{xx}(m_1 - m_2 + k_1 - k_2) R_{xx}^*(m_1 - m_2 - k_1 + k_2)] e^{-j2\omega(k_1 - k_2)}. \end{aligned} \quad (\text{III.79})$$

U slučaju **nestacionarnog bijelog šuma**, $R_{xx}(m,n) = I(m) \delta(m-n)$, $I(m) \geq 0$, dobijamo:

$$\sigma^2(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} |\varphi(m,k)|^2 I(n+m+k) I^*(n+m-k) = CD_I(n,0; |\varphi|^2). \quad (\text{III.80})$$

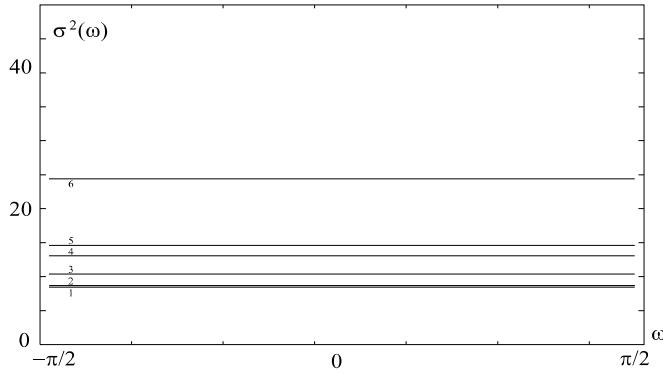
U slučaju **obojenog stacionarnog šuma**, $R_{xx}(m,n) = R_{xx}(m-n)$, dobijamo:

$$\sigma^2(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \varphi(m,k) \{\varphi(m,k) * *_{m,k} [R_{xx}^*(m+k) R_{xx}(m-k) e^{j2\omega k}]\}, \quad (\text{III.81})$$

gdje je sa $* *_{m,k}$ označena dvodimenzionala konvolucija po nezavisno promjenljivim m i k . Primjenjujući Parsevalovu teoremu i upotrebljavajući notaciju: $S_{xx}(\omega) = FT[R_{xx}(n)]$, posljednju jednačinu možemo predstaviti sa:

$$\sigma^2(\omega) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |\Psi(\theta, \xi)|^2 S_{xx}^*(\omega - \frac{\xi}{2} + \frac{\theta}{2}) S_{xx}(\omega - \frac{\xi}{2} - \frac{\theta}{2}) d\theta d\xi = CD_{S_{xx}}(0, \omega; |\Psi|^2). \quad (\text{III.82})$$

FT obojenog stacionarnog šuma je bijeli nestacionarni šum, sa autokorelacionom funkcijom $S_{xx}(\theta_1) \delta(\theta_1 - \theta_2)$ u frekvencijskom domenu, tako da posljednja jednačina predstavlja dualnu formu jednačini (III.80).



Slika III.8. Varijansa (III.83) dobijena u slučaju kompleksnog šuma sa nezavisnim realnim i imaginarnim dijelovima podjednakih varijansi, 1) Born-Jordanova distribucija, 2) Distribucija sa optimalnim auto-članom, 3) Choi-Williamsova distribucija, 4) Butterworthova distribucija, 5) Sinc distribucija i 6) pseudo WD

Slučaj **stacionarnog bijelog šuma** direktno slijedi iz slučaja nestacionarnog bijelog šuma, za $I(n) = \sigma_x^2$. U ovom slučaju se varijansa estimatora Cohenove klase može predstaviti u veoma jednostavnom obliku:

$$\sigma^2(\omega) = \sigma_x^4 \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} |\phi(m, k)|^2. \quad (\text{III.83})$$

Vrijednosti varijanse (III.83) za najčešće upotrebljavane distribucije iz Cohenove klase su predstavljene na slici III.8. Na ovoj slici, kao i u narednim numeričkim ilustracijama u ovom poglavlju, upotrebljavamo sljedeće distribucije:

Born-Jordanovu distribuciju, $c(\Theta, \tau) = \sin(\Theta\tau/2)/(\Theta\tau/2)$;

Choi-Williamsovnu distribuciju, $c(\Theta, \tau) = \exp(-\Theta^2\tau^2/\sigma^2)$;

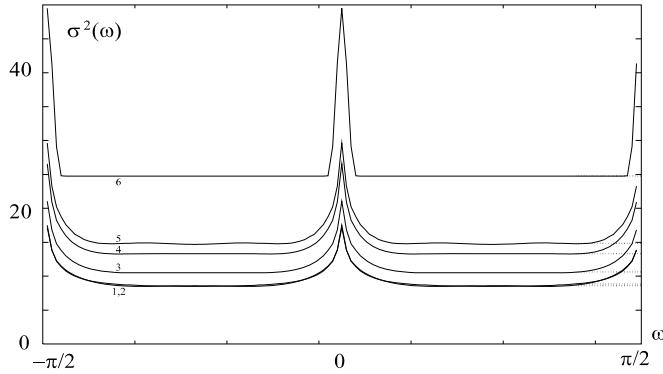
sinc distribuciju, $c(\Theta, \tau) = \text{rect}(\Theta\tau/\alpha)$;

Butterworthovu distribuciju, $c(\Theta, \tau) = 1/[1 + (\Theta\tau/(\Theta_1\tau_1))^4]$;

Distribuciju sa optimalnom širinom auto-člana, $c(\Theta, \tau) = \exp(-|\Theta\tau|/\sigma)$;

Pseudo WD sa Hanningovim lag-prozorom.

Jezgra su data u analognom AF domenu. Njihova diskretizacija je obavljena na opsegu $|\Theta| \leq \sqrt{\pi N}$ i $|\tau| \leq \sqrt{\pi N}$, uzimajući $N=32$ odbirka. Jezgro $\phi(m, k)$ je izračunato kao FT funkcije jezgra $c(\theta, k)$, $\phi(m, k) = TF_\theta[c(\theta, k)]$. Funkcijom $c(\theta, k)$ su predstavljeni odbirci funkcije jezgra $c(\Theta, \tau)$ po τ osi, dok je sa θ označena diskretna frekvencija, $\theta = \Theta(\pi/\sqrt{\pi N})$. U cilju međusobnog poređenja različitih distribucija, njihovi parametri ($\sigma, \alpha, \theta_1\tau_1$) su odabrani saglasno s slijedećim vrijednostima:



Slika III.9. Varijansa (III.84) dobijena u slučaju realnog šuma, 1) Born-Jordanova distribucija, 2) Distribucija sa optimalnim auto-članom, 3) Choi-Williamsova distribucija, 4) Butterworthova distribucija, 5) Sinc distribucija i 6) pseudo WD

sno rezultatima dobijenim u [131]. U [62] je pokazano da se minimalna vrijednost varijanse (III.83), uz zadovoljenje marginalnih osobina i osobine ograničenosti po vremenu postiže jezgrom pseudo Born-Jordanove distribucije. Drugim riječima, zaključeno je da se Born-Jordanova distribucija ponaša optimalno s aspekta varijanse estimadora i opisanih ograničenja funkcije jezgra. Potpunu saglasnost sa ovim zaključcima pokazuju rezultati predstavljeni na slici III.8. Sa slike se može, takođe zapaziti da se varijansa distribucije sa optimalnim auto-članom ponaša gotovo identično Born-Jordanovoj distribuciji.

III.2.1.2. REALNI ŠUM

Posmatrajmo realni šum $x(n)$ varijanse σ_x^2 . U ovom slučaju opšti oblik varijanse (III.78) sadrži sve sabirke. Nakon nekoliko uobičajenih transformacija, sličnim onima sprovedenim u slučaju S-metoda, kao i u [151], može se pokazati da se varijansa estimadora Cohenove klase u slučaju realnog, bijelog, Gaussovog šuma može napisati u formi:

$$\sigma^2(\omega) = \sigma_x^4 \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} [\varphi(m, k)|^2 + \varphi(m, k)\varphi^*(m, -k)e^{-j4\omega k}]. \quad (\text{III.84})$$

Prethodni izraz se sastoji iz dva sabirka. Prvi sabirak je frekvencijski nezavisni i odgovara varijansi kompleksnog šuma. Dakle, minimizirajući varijansu kompleksnog šuma (III.83), takođe minimiziramo frekvencijski nezavisni dio varijanse $\sigma^2(\omega)$. Drugi sabirak je suma, po m , Fourierove transformacije, po k , proizvoda $\varphi(m, k)\varphi^*(m, -k)$. U slučaju distribucija simetričnih po k , $\varphi(m, k) = \varphi(m, -k)$ (ovaj uslov je zadovoljen u slučaju svih poznatih RID

distribucija). FT se primjenjuje na pozitivnoj i parnoj funkciji $|\varphi(m,k)|^2$, tako da se njena maksimalna vrijednost postiže u tačkama $\omega = 0$ i $\omega = n\pi/2$, $n = \pm 1, \pm 2, \dots$,

$$\max \{\sigma^2(\omega)\} = 2\sigma_x^4 \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} |\varphi(m,k)|^2. \quad (\text{III.85})$$

Primijetimo da, minimizacijom (III.83), minimiziramo maksimalnu vrijednost drugog (frekvencijski zavisnog) dijela varijanse (III.84), takođe. Ovo znači da zaključci, izvedeni u [62] ostaju validni u slučaju realnog šuma. Varijanse estimatora u slučaju najčešće upotrebljavanih distribucija i realnog šuma su prikazane na slici III.9.

III.2.1.3. ANALITIČKI ŠUM

Često je, u numeričkim implementacijama kvadratnih distribucija, poželjno upotrebljavati analitički oblik signala nego sam signal. Ovdje ćemo analizirati uticaj šuma pretpostavljajući njegov analitički oblik, $x_a(n) = x(n) + jx_h(n)$. Zabilježimo da je sa $x_h(n)$ predstavljena Hilbertova transformacija signala $x(n)$. Autokorelaciona funkcija analitičkog šuma $x_a(n)$ je data sa, [108], [158]:

$$R_{x_a x_a}(k) = 2[R_{xx}(k) + jR_{xx}(k)*h(k)]. \quad (\text{III.86})$$

Sa $h(k)$ je označen impulsni odziv Hilbertovog transformatora. Takođe, spektralna gustina snage analitičkog šuma $x_a(n)$ u slučaju bijelog procesa $x(n)$ ima oblik:

$$S_{x_a x_a}(\omega) = FT_k[R_{x_a x_a}(k)] = 2\sigma_x^2 U(\omega), |\omega| < \pi, \quad (\text{III.87})$$

gdje je $U(\omega)$ jedinična step funkcija. Upotrebljavajući činjenicu da je $R_{x_a x_a}^*(k) = R_{x_a x_a}(k) = 0$, dobijamo:

$$\begin{aligned} \sigma^2(\omega) &= \sum_{k_1=-\infty}^{\infty} \sum_{k_2=-\infty}^{\infty} \sum_{m_1=-\infty}^{\infty} \sum_{m_2=-\infty}^{\infty} \varphi(m_1, k_1) \varphi^*(m_2, k_2) \times \\ &\times [R_{x_a x_a}(m_1 - m_2 + k_1 - k_2) R_{x_a x_a}^*(m_1 - m_2 - k_1 + k_2)] e^{-j2\omega(k_1 - k_2)}. \end{aligned} \quad (\text{III.88})$$

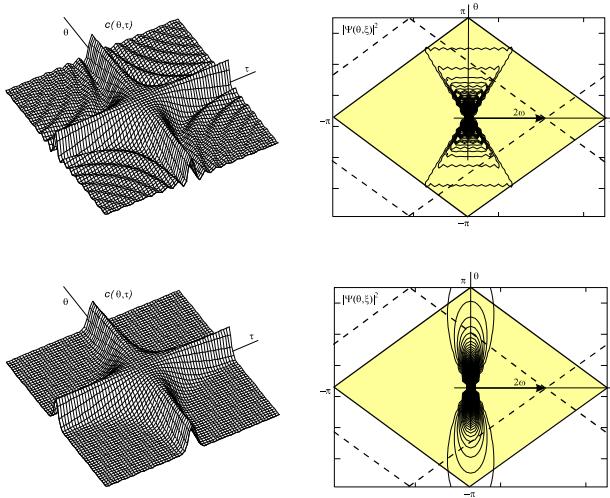
Smjenama $k_1 - k_2 = k$, $k_1 = k_1$ i $m_1 - m_2 = m$, $m_1 = m_1$, prethodna jednačina može biti napisana u obliku:

$$\sigma^2(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} [\varphi(m, k) * \varphi^*(-m, -k)] R_{x_a x_a}(m+k) R_{x_a x_a}^*(m-k) e^{-j2\omega k}. \quad (\text{III.89})$$

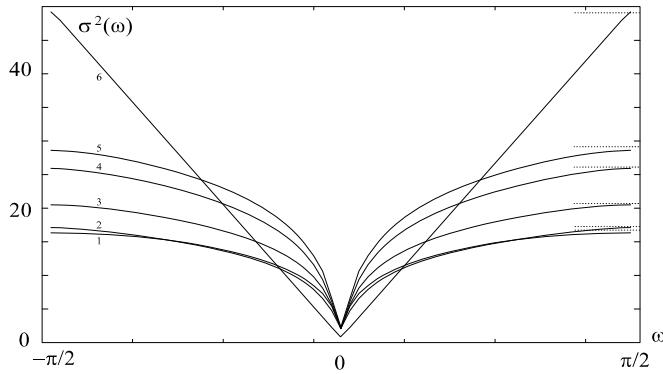
Posmatrajući posljednji izraz kao dvodimenzionu FT, po m i k , u $\theta = 0$ i $\varpi = 2\omega$, kao i koristeći notaciju:

$$\Psi(\theta, \omega) = FT_{m,k}[\varphi(m, k)],$$

$$\Psi^*(\theta, \omega) = FT_{m,k}[\varphi^*(-m, -k)], \quad (\text{III.90})$$



Slika III.10. Ilustracija proračuna varijanse u slučaju analitičkog šuma za Born-Jordanovu distribuciju (gornja slika) i Choi-Williamsovou distribuciju (donja slika). Konture $|\Psi(\theta, \xi)|^2$ na desnoj strani slike su nacrtane sa međusobnim odstojanjem od $0.002 \max \{|\Psi(\theta, \xi)|^2\}$.



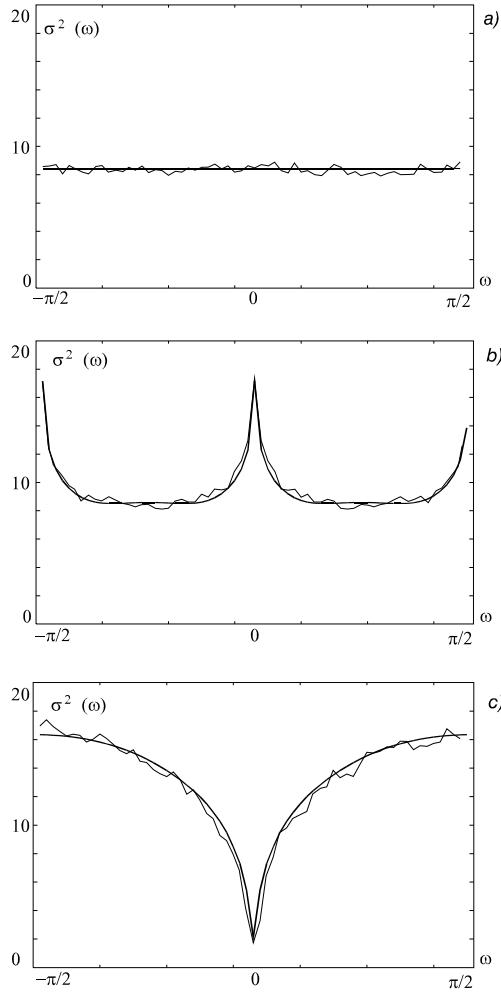
Slika III.11. Varijansa (III.94) dobijena u slučaju analitičkog šuma, 1) Born-Jordanova distribucija, 2) Distribucija sa optimalnim auto-članom, 3) Choi-Williamsova distribucija, 4) Butterworthova distribucija, 5) Sinc distribucija i 6) pseudo WD

$$\Omega(\theta, \omega) = FT_{m,k} [R_{x_a x_a}(m+k) R_{x_a x_a}^*(m-k)], \quad (\text{III.91})$$

dobijamo:

$$\sigma^2(\omega) = \left\{ |\Psi(\theta, \varpi)|^2 * \Omega(\theta, \varpi) \right\} \Big|_{\theta=0, \varpi=2\omega}. \quad (\text{III.92})$$

Polazeći od definicionog izraza (III.87) spektralne gustine snage analitičkog šuma, imamo:



Slika III.12. Varijansa kod Born-Jordanove distribucije dobijena analitičkim putem (puna linija) i statističkim putem (tanka linija) za slučaj: (a) kompleksnog šuma sa nezavisnim realnim i imaginarnim dijelom podjednakih varijansi, (b) realnog šuma, (c) analitičkog šuma

$$\Omega(\theta, \varpi) = 16\pi^2 \sigma_x^4 [U(\varpi)\delta(\varpi - \theta) * \Psi_{\varpi, \theta} U(\varpi)\delta(\varpi + \theta)]. \quad (\text{III.93})$$

Konvolucija (III.93) je prikazana na slici III.13. Primjetimo da je $\iint_D \delta(\varpi - \theta)\delta(\varpi + \theta)d\varpi d\theta = \frac{1}{2}$, ako ishodište $(\theta, \varpi) = (0, 0)$ pripada domenu integracije D , kao i da je $\iint_D \delta(\varpi - \theta)\delta(\varpi + \theta)d\varpi d\theta = 0$, u ostalim slučajevima.

Saglasno ovom rezultatu i slici III.13. varijansa (III.92) uzima sljedeću konačnu formu:

$$\sigma^2(\omega) = \frac{\sigma_x^4}{2\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi - |\omega - \xi|}^{\pi - |\omega - \xi|} |\Psi(\theta, \xi)|^2 d\xi d\theta, |\omega| \leq \frac{\pi}{2}. \quad (\text{III.94})$$

Granice integracije u izrazu (III.94) su oblika modula 2π , slika III.13. Jezgro $\Psi(\theta, \xi)$ je koncentrisano uglavnom oko (θ, ξ) ishodišta i oko ose $\xi = 0$, slika III.10. Imajući ovu činjenicu na umu, kao i da je $|\Psi(\theta, \xi)|^2$ uvijek pozitivna

funkcija, lako možemo zaključiti da se maksimalna vrijednost varijanse (III.94) dobija za $|\omega| = \pi/2$. Ova vrijednost je veoma bliska vrijednosti koja bi se dobila integracijom po čitavom opsegu $\theta, \xi \in (-\pi, \pi]$. Razlika je jednaka integralu van romba prikazanog na slici III.13. Na primjer, kod Born-Jordanove distribucije, sve vrijednosti $|\Psi(\theta, \xi)|^2$ van domena integracije koji se postiže za $|\omega| = \pi/2$ su manje od $0.002 \max \{|\Psi(\theta, \xi)|^2\}$. Stoga je razlika između integrala po odabranom opsegu i integrala po čitavoj (θ, ξ) ravni reda veličine 1%. Na slici III.11. je predstavljena varijansa (III.94) za razne distribucije, zajedno sa njenim vrijednostima dobijenim integracijom po čitavom opsegu (θ, ξ) ravni (isprekidale linije na desnoj strani slike). Saglasno prethodnoj analizi, maksimalna vrijednost varijanse u ovom slučaju je aproksimativno jednaka:

$$\max \{\sigma^2(\omega)\} \cong \frac{\sigma_x^4}{2\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |\Psi(\theta, \xi)|^2 d\xi d\theta = 2\sigma_x^4 \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} |\varphi(m, k)|^2 \text{ za } |\omega| = \pi/2. \quad (\text{III.95})$$

Posljednja jednakost je dobijena upotrebom Parsevalove teoreme, kao i činjenice da je $\Psi(\theta, \omega) = FT_{m,k}[\varphi(m, k)]$. Na osnovu prethodnih navoda jednostavno zaključujemo da se jezgrom kojim se minimizira varijansa (III.83), takođe minimizira maksimalna vrijednost varijanse (III.95). Grugim riječima, ovim je označeno da jezgro Born-Jordanove distribucije ostaje optimalno (pod uvedenim ograničenjima) u odnosu na maksimalnu vrijednost varijanse, date izrazom (III.95).

Born-Jordanova distribucija se pojavljuje kao ključna distribucija sa aspekta analize uticaja šuma, tako da je njena varijansa u slučaju kompleksnog, realnog i analitičkog šuma provjerena statistički i dobijeni rezultati su predstavljeni na slici III.12. Usrednjavanje je izvršeno na nizu vrijednosti distribucije proračunatih u 2000 trenutaka sa istim numeričkim podacima kao u poglavlju III.2.1.1. Slaganja sa teorijom su lako uočljiva.

Srednja vrijednost varijanse (III.88) poslije nekoliko jednostavnih transformacija i upotrebe Parsevalove teoreme, [108], može biti predstavljena u obliku:

$$\overline{\sigma^2(\omega)} = \frac{\sigma_x^4}{\pi^2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} |c(\theta, k)|^2 (\pi - |\theta|) d\theta. \quad (\text{III.96})$$

Pošto faktor $\int_{-\pi}^{\pi} |c(\theta, k)|^2 |\theta| d\theta$ može imati značajnu vrijednost u poređenju sa $\int_{-\pi}^{\pi} |c(\theta, k)|^2 d\theta$, ovaj izraz ne može biti sведен na prethodno proučavane oblike. Međutim, ovaj veoma jednostavan izraz može biti upotrijebljen prilikom provjere dobijenih rezultata. Na primjer, u slučaju pseudo WD, ovaj faktor ima vrijednost $\sigma_x^4 E_w$, gdje je E_w energija funkcije prozora $w(k)$. Za jediničnu varijansu šuma i Hanningov prozor širine $N = 64$, imamo $\overline{\sigma^2(\omega)} = 24$, čime se jednostavno provjerava tačnost rezultata prikazanih na slici III.11.

III.2.2. ANALIZA SIGNALA SA ŠUMOM

Analiza uticaja šuma u slučaju determinističkog signala maskiranog aditivnim šumom je delikatna i visoko zavisna od analiziranog signala. Ovo je razlog što ćemo, prilikom analize uticaja šuma, najprije dobiti rezultate uvedenjem nekih ograničenja na analiziranim signalima. U [8] je pokazano da se rezultati iz [62] mogu uopštiti na slučaj FM signala maskiranih kompleksnim šumom. U ovom poglavlju su generalisani rezultati i zaključci iz prethodnog poglavlja, posmatrajući realne i analitičke signale maskirane šumom. U tom cilju posmatrajmo deterministički signal $f(n)$ kome je dodat bijeli Gaussov šum varijanse σ_v^2 , $x(n) = f(n) + v(n)$. U ovom slučaju se jednostavno pokazuje, [108] i poglavlje III.1., da se varijansa estimatorsa Cohenove klase distribucija sastoji iz dvije komponente,

$$\sigma^2(\omega) = \sigma_{fv}^2(\omega) + \sigma_{vv}^2(\omega). \quad (\text{III.97})$$

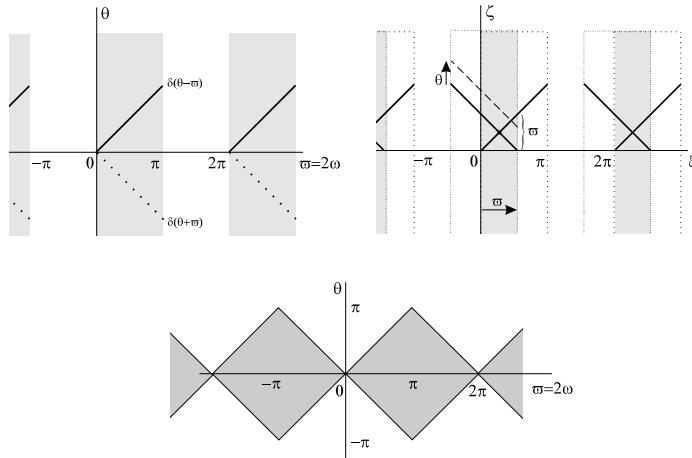
Prva komponenta, $\sigma_{fv}^2(\omega)$ zavisi od signala i aditivnog šuma, dok druga komponenta $\sigma_{vv}^2(\omega)$ zavisi samo od šuma. Druga komponenta je izvedena u prethodnom poglavlju i data jednačinama (III.83), (III.84) i (III.94) u slučajevima kompleksnog, realnog i analitičkog šuma, respektivno. U ovim jednačinama treba izvršiti zamijenu σ_x^2 sa σ_v^2 u cilju dobijanja varijanse $\sigma_{vv}^2(\omega)$. Stoga ćemo, u ovom poglavlju, zadržati pažnju samo na prvoj komponenti varijanse, $\sigma_{fv}^2(\omega)$,

$$\begin{aligned} \sigma_{fv}^2(\omega) &= \sum_{k_1=-\infty}^{\infty} \sum_{k_2=-\infty}^{\infty} \sum_{m_1=-\infty}^{\infty} \sum_{m_2=-\infty}^{\infty} \varphi(m_1, k_1) \varphi^*(m_2, k_2) [f(n+m_1+k_1) f^*(n+m_2+k_2) \times \\ &\times R_{vv}^*(m_1 - m_2 - k_1 + k_2) + f^*(n+m_1-k_1) f(n+m_2-k_2) R_{vv}(m_1 - m_2 + k_1 - k_2) + \\ &+ f(n+m_1+k_1) f(n+m_2-k_2) R_{vv}^*(m_1 - m_2 - k_1 - k_2) + \\ &+ f^*(n+m_1-k_1) f^*(n+m_2+k_2) R_{vv}^*(m_1 - m_2 + k_1 + k_2)] \exp[-j2\omega(k_1 - k_2)]. \end{aligned} \quad (\text{III.98})$$

Takođe ćemo (kao u [8]) minimizirati srednju vrijednost varijanse $\sigma^2(\omega)$,

$$\overline{\sigma^2(\omega)} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sigma^2(\omega) d\omega. \quad (\text{III.99})$$

Analizirana je srednja vrijednost varijanse, pošto je tačna vrijednost u potpunosti zavisna od signala. U kasnijim izlaganjima, glava III.3., pronaći ćemo i (*tačnu*) varijansu u proizvoljnoj tački TF ravni.



Slika III.13. Ilustracija domena integracije u slučaju analitičkog šuma

III.2.2.1. KOMPLEKSNI ŠUM

Prepostavimo, kao u poglavlju III.2.1.1., da se kompleksni šum sastoji iz realnog i imaginarnog dijela podjednakih varijansi $\sigma_v^2/2$. Srednja vrijednost varijanse $\overline{\sigma_{fv}^2(\omega)}$ u slučaju proizvoljnog FM signala $f(n) = A \exp(j\phi(n))$ može biti predstavljena sa, [8]:

$$\overline{\sigma_{fv}^2(\omega)} = 2A^2 \sigma_v^2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} |\phi(m, k)|^2 \quad (\text{III.100})$$

i, kao posljedica toga, srednja vrijednost varijanse estimatora Cohenove klase distribucija, sa:

$$\overline{\sigma^2(\omega)} = (2A^2 + \sigma_v^2) \sigma_v^2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} |\phi(m, k)|^2. \quad (\text{III.101})$$

Polazeći od prethodnog izraza, jednostavno zaključujemo da se minimiziranjem (III.83), minimizira varijansa (III.101). Odnosno, zaključci iz [62] ostaju važeći za srednju vrijednost varijanse prilikom analize FM signala maskiranih aditivnim kompleksnim šumom.

III.2.2.2. REALNI ŠUM

U ovom slučaju srednja vrijednost varijanse (III.98) poprima oblik:

$$\begin{aligned} \overline{\sigma_{fv}^2(\omega)} &= \overline{\sigma_{fv}^2(\omega)}_{\text{complex signal+sum}} + \sigma_v^2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{m_1=-\infty}^{\infty} \sum_{m_2=-\infty}^{\infty} \phi(m_1, k) \phi^*(m_2, k) \times \\ &\times [f(n+m_1+k)f(n+m_2-k)\delta(m_1-m_2-2k) + f(n+m_1-k)f(n+m_2+k)\delta(m_1-m_2+2k)]. \end{aligned} \quad (\text{III.102})$$

Pretpostavljajući da apsolutna vrijednost analiziranog signala nije veća od A , $|f(n)| \leq A$,

$$\overline{\sigma_{fv}^2(\omega)} = \overline{\sigma_{fv}^2(\omega)}_{\text{complex signal+sum}} + A^2 \sigma_v^2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} [|\varphi(m+2k, k)\varphi^*(m, k)| + |\varphi(m-2k, k)\varphi^*(m, k)|] \quad (\text{III.103})$$

Konačno¹², upotrebljavajući simetričnost jezgra $\varphi(m, k)$, $\varphi(m, k) = \varphi(m, -k)$, dobijamo:

$$\overline{\sigma_{fv}^2(\omega)} \leq 4A^2 \sigma_v^2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} |\varphi(m, k)|^2. \quad (\text{III.104})$$

Ipak, izvedimo precizniji izraz od prethodnog, pošto minimizacija ima više smisla ako se primjenjuje na izrazima koji su bliži tačnim. Naime, nejednakost u fuznoti 11 može biti veoma udaljena od slučaja jednakosti za jezgra mnogih distribucija. Primijetimo da se druga komponenta varijanse (III.103),

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} [|\varphi(m+2k, k)\varphi^*(m, k)| + |\varphi(m-2k, k)\varphi^*(m, k)|], \quad (\text{III.105})$$

za $\varphi(m, k) = \varphi(m, -k)$, pojednostavljuje do izraza $2 \cdot \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} |\varphi(m-2k, k)\varphi^*(m, k)|$. Znajući da je $\varphi(m, k)$

uglavnom koncentrisano oko ishodišta (m, k) ravni i oko k ose ($m=0$) (ova činjenica važi za sve RID distribucije i WD), možemo jednostavno zaključiti da je:

$$2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} |\varphi(m-2k, k)\varphi^*(m, k)| \cong 2 \sum_{m=-\infty}^{\infty} |\varphi(m, 0)|^2 = 2|\varphi(0, 0)|^2. \quad (\text{III.106})$$

Za sve distribucije koje zadovoljavaju marginalnu osobinu po frekvenciji, ovo je konstanta koja ne zavisi od posmatrane distribucije. Aproksimacija (III.106) je provjerena na svim posmatranim distribucijama i pokazalo se da je napravljena greška manja od 1.5% vrijednosti $2 \cdot \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} |\varphi(m, k)|^2$. Stoga,

$$\overline{\sigma_{fv}^2(\omega)} \leq 2A^2 \sigma_v^2 \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} |\varphi(m, k)|^2 + |\varphi(0, 0)|^2 \right). \quad (\text{III.107})$$

Znak jednakosti u posljednjoj jednačini (sa aproksimacijom (III.106)) važi za signal $f(n) = A$. Zaključak je jednostavan: *minimizacija maksimalne vrijednosti varijanse (III.107) se postiže minimizacijom $\sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} |\varphi(m, k)|^2$, što se, i u ovom slučaju, redukuje na poznati faktor i rezultate prezentirane u ranijim poglavljima, kao i u [62].*

¹²Upotrebljavajući Schwartzovu nejednakost, za bilo koji oblik funkcije jezgra $\varphi(m, k)$, imamo:

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} |\varphi(m+a, k)| |\varphi(m, k)| \leq \sum_{m=-\infty}^{\infty} |\varphi(m, k)|^2.$$

Jednakost u prethodnom izrazu je zadovoljena za $|\varphi(m+a, k)| = c|\varphi(m, k)|$. a i c su proizvoljne konstante.

III.2.2.3. ANALITIČKI ŠUM

Označimo analitički dio šuma sa v_a . Polazeći od opštег oblika varujanse (III.98) i činjenice da je u ovom slučaju:

$R_{v_a v_a^*}(m) = R_{v_a^* v_a}(m) = 0$, srednja vrijednost varijanse $\sigma_{fv}^2(\omega)$ je:

$$\overline{\sigma_{fv}^2(\omega)} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{\{\varphi(m, k) f(n+m+k) [\varphi(m, k) f(n+m+k)^* {}_m R_{v_a v_a}(m)]^* + \varphi(m, k) f^*(n+m-k) [\varphi(m, k) f^*(n+m-k)^* {}_m R_{v_a v_a}^*(m)]^*\}}{=}, \quad (\text{III.108})$$

gdje je sa $*_m$ označena konvolucija po nezavisnoj promjenljivoj m . U cilju srušenja oba sabirka iz (III.108) na jednostavnije oblike upotrijebimo Parsevalovu teoremu¹³. U svakom sabirku su označeni entiteti za upotrebu teoreme. Nakon nekoliko uobičajenih transformacija i upotrebljavajući činjenice da je:

$$\left| c(\theta, k) *_{\theta} (F(e^{j\theta}) e^{j\theta(n+k)}) \right|^2 = \left[[c^*(-\theta, -k)] *_{\theta} (F(e^{j\theta}) e^{j\theta(n+k)}) \right]^* \quad (\text{III.109})$$

i $S_{v_a v_a}^*(\theta) = S_{v_a v_a}(\theta)$, dobijamo srednju vrijednost varijanse $\sigma_{fv}^2(\omega)$ u sljedećoj formi:

$$\overline{\sigma_{fv}^2(\omega)} = \frac{1}{\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} \left| c(\theta, k) *_{\theta} (F(e^{j\theta}) e^{j\theta(n+k)}) \right|^2 S_{v_a v_a}(\theta) d\theta, \quad (\text{III.110})$$

gdje je $F(e^{j\omega}) = FT_k[f(k)]$ i $c(\theta, k) = FT_m[\varphi(m, k)]$ funkcija jezgra u AF domenu. Primjenjujući Schwartzovu nejednakost¹⁴ na konvoluciju, po θ , i upotrebljavajući jednostavne činjenice, $\int_{-\pi}^{\pi} |c(\theta, k)|^2 d\theta = 2\pi \sum_{m=-\infty}^{\infty} |\varphi(m, k)|^2$ i $\int_0^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| F(e^{j(\theta-\mu)}) \right|^2 d\theta d\mu / (2\pi) = \pi E_f$, kao i $S_{v_a v_a}(\theta) = 2\sigma_{v_a}^2 U(\theta)$, za $|\theta| < \pi$, dobijamo:

$$\overline{\sigma_{fv}^2(\omega)} \leq 2\sigma_v^2 E_f \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} |\phi(m, k)|^2. \quad (\text{III.111})$$

¹³Jednodimenziona Parsevalova teorema glasi:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)y^*(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})Y^*(e^{j\omega})d\omega,$$

gdje su: $X(e^{j\omega}) = FT_k[x(k)]$ i $Y(e^{j\omega}) = FT_k[y(k)]$.

¹⁴Schwartzova nejednakost u kontinualnom domenu glasi:

$$\left| \int_a^b z(t)w(t)dt \right|^2 \leq \int_a^b |z(t)|^2 dt \int_a^b |w(t)|^2 dt.$$

Ovo je opšti izraz, koji ne mora biti bliska aproksimacija u slučaju proizvoljnog oblika FM signala. Određeniji oblik varijanse može biti dobijen za specifične oblike signala. Takvi signali će biti razmatrani u narednom izlaganju.

Pošto je signal $f(n)$ analitički, $F(e^{j\theta}) = 0$ za $\theta < 0$. Pretpostavljajući da je $c(\theta, k) *_{\theta} (F(e^{j\theta})e^{j\theta(n+k)})$ u potpunosti koncentrisano u oblasti $\theta \geq 0$, za analitičke signale oblika $f(n) = A \exp(j\phi(n))$, dobijamo:

$$\overline{\sigma_{fv}^2(\omega)} = 4A^2 \sigma_v^2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} |\phi(m, k)|^2. \quad (\text{III.112})$$

Prethodna jednačina je dobijena upotrebom jednakosti:

$$\left| c(\theta, k) *_{\theta} (F(e^{j\theta})e^{j\theta(n+k)}) \right|^2 = \sum_{m_1=-\infty}^{\infty} \sum_{m_2=-\infty}^{\infty} \phi(m_1, k) \phi^*(m_2, k) f(n+m_1+k) f^*(n+m_2+k) e^{-j\theta(m_1-m_2)} \quad (\text{III.113})$$

i činjenice da je, u ovom slučaju, integracija po θ od 0 do π analogna integraciji od $-\pi$ do π . Napomenimo da je prethodna pretpostavka bliska realnoj situaciji prilikom implementacije RID distribucija koje uz zadovoljenje uslova da se FT analiziranog signala, $F(e^{j\theta})$, ne nalazi u blizini θ ose (u cilju prevazilaženja konvolucije za $\theta < 0$). Primjetimo, ipak, da je nemoguće u potpunosti zanemariti konvoluciju za $\theta < 0$, na koncu za $k=0$ kada je $c(\theta, 0) = 1$. Imajući ovo u vidu dobijamo srednju vrijednost varijanse kao (III.112) minus $A^2 \sigma_v^2$. Međutim, ovaj je faktor značajno manji od (III.112), tako da ne pravimo značajniju grešku uzimajući (III.112) kao tačan izraz. U cilju određivanja granica (uključujući slučajeve kada je značajan dio konvolucione energije u opsegu $\theta < 0$), posmatrajmo jednostavan oblik signala $f(n) = A \exp(j\omega_0 n)$. U ovom slučaju je $\left| c(\theta, k) *_{\theta} (F(e^{j\theta})e^{j\theta(n+k)}) \right|^2 = A^2 |c(\theta - \omega_0, k)|^2$.

Ako $\omega_0 \rightarrow +0$, integral u jednačini (III.110) teži $A^2 |c(\theta, k)|^2$, tako da, znajući da je $|c(\theta, k)|^2$ simetrična funkcija po θ , dobijamo da je $\overline{\sigma_{fv}^2(\omega)}$, u ovom slučaju, jednako polovini vrijednosti predstavljene sa (III.112). Isti rezultati se dobijaju za $\omega_0 \rightarrow \pi - 0$. Maksimalna vrijednost se dobija za $\omega_0 \rightarrow \pi/2$ kada je ona aproksimativno jednaka izrazu (III.112). Dakle, zavisno od oblika analitičkog signala, imamo:

$$2A^2 \sigma_v^2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} |\phi(m, k)|^2 \leq \overline{\sigma_{fv}^2(\omega)} \leq 4A^2 \sigma_v^2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} |\phi(m, k)|^2. \quad (\text{III.114})$$

Vidjeli smo da je gornje ograničenje (III.112) tačno za bilo koji analitički FM signal, dok je donje ograničenje zadovoljeno uz prepostavku da je dio energije izraza $c(\theta, k) *_{\theta} (F(e^{j\theta})e^{j\theta(n+k)})$ lociran u opsegu $\theta \in [-\pi, 0)$ manji ili jednak energiji istog izraza u opsegu $\theta \in [0, \pi)$. Ovo je razumna pretpostavka, pošto $F(e^{j\theta})$ postoji samo za $\theta \in [0, \pi)$ i pošto je funkcija jezgra $c(\theta, k)$ simetrična po θ osi.

Drugim riječima, minimizirajući (III.83), minimiziramo maksimalnu vrijednost srednje vrijednosti varijanse $\sigma_{fv}^2(\omega)$ u slučaju analitičkog signala maskiranog šumom, (III.111). Takođe, minimizirajući (III.83) minimiziramo ograničenja (III.114) unutar kojih srednja vrijednost varijanse ima svoje vrijednosti za razne oblike FM signala.

Interesantno je primijetiti da je, u slučaju WD, energija izraza $c(\theta, k)^* \theta (F(e^{j\theta}) e^{j\theta(n+k)})$ simetrično raspoređena po θ , pošto je $c(\theta, k) = 1$. Drugim riječima,

$$\overline{\sigma_{fv}^2(\omega)} = 2A^2 \sigma_v^2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} |\varphi(m, k)|^2, \quad (\text{III.115})$$

za sve signale oblika $f(n) = A \exp(j\phi(n))$. Uz to, iz (III.110) jednostavno možemo dobiti tačnu srednju vrijednost varijanse, $\overline{\sigma_{fv}^2(\omega)} = 2\sigma_v^2 E_f$, u slučaju WD i bilo kog oblika analitičkog signala. Sa E_f je predstavljena energija analiziranog signala. Primijetimo da su, za $f(n) = A \exp(j\phi(n))$, posljednja dva izraza ekvivalentna (naravno, uz implementaciju činjenice da funkcija jezgra u slučaju WD ima oblik $\varphi(m, k) = \delta(m)$ unutar ograničenog opsega (m, k) domena, [158]).

III.3. VARIJANSA ESTIMATORA COHENOVE KLASE U TAČKI TF RAVNI

U cilju dobijanja tačne vrijednosti varijanse $\sigma_{fv}^2(n, \omega)$ u bilo kojoj tački TF ravni upotrijebimo *inner-product* formu predstavljanja Cohenove klase distribucija, [42]:

$$CD_x(n, \omega; \varphi) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \tilde{\varphi}(m, k) [x(n+m)e^{-j\omega m}] [x(n+k)e^{-j\omega k}]^*, \quad (\text{III.116})$$

sa $\tilde{\varphi}(m, k) = \varphi((m+k)/2, (m-k)/2)$. Za razliku od prethodnog poglavlja ovdje predstavljamo dvostruku zavisnost varijanse, od vremena i frekvencije, pronalazeći varijansu estimatora Cohenove klase distribucija u proizvoljnoj tački TF ravni. U prethodnom poglavlju je pronađena srednja vrijednost varijanse po frekvenciji, pa je u označavanju srednje vrijednosti, varijansa zapisivana u funkciji frekvencije. Za slučaj kompleksnog Gaussovog šuma, i za realnu i simetričnu funkciju prozora $\varphi(m, k)$ dobijamo:

$$\begin{aligned} \sigma_{fv}^2(n, \omega) &= 2 \sum_{k_1=-\infty}^{\infty} \sum_{k_2=-\infty}^{\infty} \sum_{m_1=-\infty}^{\infty} \sum_{m_2=-\infty}^{\infty} \tilde{\varphi}(m_1, k_1) \tilde{\varphi}^*(m_2, k_2) f(n+m_1) f^*(n+m_2) R_{vv}(n+k_1, n+k_2) e^{j\omega(m_2-k_2-m_1+k_1)} \\ &= 2 \sum_{m_1=-\infty}^{\infty} \sum_{m_2=-\infty}^{\infty} \tilde{\Phi}(m_1, m_2) [f(n+m_1)e^{-j\omega m_1}]^* [f(n+m_2)e^{-j\omega m_2}] = 2CD_f(n, \omega, \tilde{\Phi}). \end{aligned} \quad (\text{III.117})$$

Opšti oblik novog jezgra $\tilde{\Phi}(m_1, m_2)$, za $R_{vv}(n+k_1, n+k_2) = I(n+k_1)R_{vv}(k_2 - k_1)$, je:

$$\tilde{\Phi}(m_1, m_2) = \sum_{k_1=-\infty}^{\infty} \sum_{k_2=-\infty}^{\infty} \tilde{\varphi}(m_1, k_1) \tilde{\varphi}^*(m_2, k_2) I(n+k_1) R_{vv}(k_2 - k_1) e^{-j\omega(k_2 - k_1)}. \quad (\text{III.118})$$

Primijetimo da je varijansa $\sigma_{fv}^2(n, \omega)$, predstavljena jednačinom (III.117), ustvari kvadratna distribucija analiziranog signala sa novim jezgrom $\tilde{\Phi}(m_1, m_2)$.

Specijalni slučaj 1: U slučaju **bijelog, stacionarnog šuma**, $R_{vv}(n+k_1, n+k_2) = \sigma_v^2 \delta(k_1 - k_2)$, imamo:

$$\tilde{\Phi}(m_1, m_2) = \sigma_v^2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} \tilde{\varphi}(m_1, k) \tilde{\varphi}^*(m_2, k). \quad (\text{III.119})$$

Za konačne granice sumiranja prethodni izraz ima oblik matričnog množenja, $\|\tilde{\Phi}\| = \sigma_v^2 \|\tilde{\varphi}\| \cdot \|\tilde{\varphi}\|^* = \sigma_v^2 \|\tilde{\varphi}\|^2$, pošto je $\tilde{\varphi}^*(m_2, k) = \tilde{\varphi}(k, m_2)$. Napomenimo da su $\tilde{\varphi}(m, k)$ elementi matrice $\|\tilde{\varphi}\|$. Drugim riječima, varijansa $\sigma_{fv}^2(n, \omega)$, u ovom slučaju, uzima oblik:

$$\sigma_{fv}^2(n, \omega) = 2\sigma_v^2 CD_f(n, \omega; \|\tilde{\varphi}\|^2). \quad (\text{III.120})$$

Primijetimo da bilo koje dvije distribucije, koje zadovoljavaju uslove: $\tilde{\varphi}_1(m, k) = \tilde{\varphi}_2(m, -k)$ i $\tilde{\varphi}_1(m, k) = \tilde{\varphi}_1(k, m)$, imaju iste varijanse. Ovo je posljedica činjenice da su zadovoljenjem prethodnih uslova ispunjene sljedeće jednakosti:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \tilde{\varphi}_1(m_1, k) \tilde{\varphi}_1^*(m_2, k) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \tilde{\varphi}_1(m_1, -k) \tilde{\varphi}_1^*(m_2, -k) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \tilde{\varphi}_2(m_1, k) \tilde{\varphi}_2^*(m_2, k).$$

Na primjer, distribucije sa funkcijama jezgra oblika $c(\theta, \tau) = c(\theta\tau)$ i oblika $c_d(\theta\tau) = FT_{2D}[c(\alpha\beta)]^{15}$ (distribucije sa dualnim funkcijama jezgra) imaju iste varijanse.

- Primjeri:
1. WD ($c(\theta\tau) = 1$, $\tilde{\varphi}(m, k) = \delta(m+k)$) i energija signala ($c(\theta\tau) = \delta(\theta, \tau)$, $\tilde{\varphi}(m, k) = \delta(m-k)$), oblika $\sum_{m=-\infty}^{\infty} |x(n+m)|^2$, imaju iste varijanse;
 2. Pseudo WD, $\tilde{\varphi}(m, k) = w(m)\delta(m+k)w(k)$ i srednja vrijednost spektrograma po frekvenciji (tzv. zaobljeni spektrogram), $\tilde{\varphi}(m, k) = w(m)\delta(m-k)w(k)$, imaju iste varijanse;
 3. Istu karakteristiku imaju zaobljeni spektrogram i S-metod, čije su funkcije jezgra: $\tilde{\varphi}(m, k) = w(m)p(m+k)w(k)$ i $\tilde{\varphi}(m, k) = w(m)p(m-k)w(k)$, respektivno. Njihova varijansa je $\sigma_{fv}^2(n, \omega) = 2\sigma_v^2 \sum_{i=-L}^L SPEC_f(n, \omega - i\Delta\omega)$ za

$$P(k) = FT[p(n)] = \begin{cases} 1, & i = -L, \dots, 0, \dots, L \\ 0, & \text{drugdje.} \end{cases}$$

¹⁵Sa $FT_{2D}[\cdot]$ je označen operator dvodimenzione FT.

U cilju izračunavanja varijanse (III.120) potrebno je pronaći vrijednosti distribucije sa funkcijom jezgra $\|\tilde{\phi}\|^2$, $CD_f(n, \omega; \|\tilde{\phi}\|^2)$. Pretpostavimo da su granice sumiranja i vrijednosti $\tilde{\phi}(m, k)$ konačne. Ovaj uslov je uvijek zadovoljen kada se funkcija jezgra u TL domenu $\phi(m, k)$ izračunava pronalazeći FT funkcije jezgra u AF domenu, $\phi(m, k) = FT_\theta[c(\theta, k)]$, upotrebom konačnog broja odbiraka. U tom slučaju se varijansa $\sigma_{fv}^2(n, \omega)$ može izračunati predstavljanjem matrice $\|\tilde{\phi}\|^2$ pomoću njenih sopstvenih vrijednosti, postupkom predloženim u [42]. Preciznije, distribucija (I.120) signala $f(n)$ je:

$$CD_f(n, \omega) = \sum_{i=-N/2}^{N/2-1} \lambda_i \left| \sum_{m=-N/2}^{N/2-1} f(n+m) q_i(m) e^{-j\omega m} \right|^2 = CD_f(n, \omega; \lambda, q), \quad (\text{III.121})$$

gdje su λ_i i $q_i(m)$ sopstvene vrijednosti i sopstveni vektori matrice $\|\tilde{\phi}\|$. Pošto je $\|\tilde{\Phi}\| = \sigma_v^2 \|\tilde{\phi}\|^2$, sopstvene vrijednosti i sopstveni vektori matrice $\|\tilde{\Phi}\|$ su $\sigma_v^2 |\lambda_i|^2$ i $q_i(m)$, respektivno. Dakle, varijansa estimatora proizvoljne kvadratne distribucije se može povezati sa samom TF reprezentacijom, i to sljedećim veoma jednostavnim izrazom:

$$\sigma_{fv}^2(n, \omega) = 2\sigma_v^2 \sum_{i=-N/2}^{N/2-1} |\lambda_i|^2 \left| \sum_{m=-N/2}^{N/2-1} f(n+m) q_i(m) e^{-j\omega m} \right|^2 = 2\sigma_v^2 CD_f(n, \omega; |\lambda|^2, q). \quad (\text{III.122})$$

Na koncu će biti interesantno zaključiti za koje je distribucije i oblike analiziranog signala varijansa (III.122) konstantna, odnosno za koje su distribucije i oblike signala rezultati dobijeni analizom uticaja šuma u prethodnim poglavljima, kao i analizom sprovedenom u [8], [70], [151], absolutno tačni.

Zapazimo, najprije, da varijansa (III.80) u slučaju bijelog stacionarnog šuma poprima oblik:

$$\sigma_{vv}^2(n, \omega) = \sigma_v^4 \sum_{i=-N/2}^{N/2} |\lambda_i|^2,$$

kao i da se srednja vrijednost varijanse (III.120) može predstaviti u sljedećoj formi:

$$\overline{\sigma_{fv}^2(n, \omega)} = 2\sigma_v^2 \sum_{m=-\infty}^{\infty} \tilde{\Phi}(m, m) |f(n+m)|^2.$$

Analizom FM signala $f(n)$, prethodni izraz uzima konstantnu vrijednost (III.100). Takođe se može zaključiti da se u sljedećim slučajevima varijansa može potpuno tačno predstaviti svojom srednjom vrijednošću:

1. Za WD i proizvoljni oblik signala. Isti zaključci važe za pseudo WD, $\tilde{\phi}(m, k) = w(m)\delta(m+k)w(k)$, kao i za zaobljeni spektrogram, $\tilde{\phi}(m, k) = w(m)\delta(m-k)w(k)$ prilikom analize FM signala. Uz to, ranije smo zaključili da ove distribucije imaju iste varijanse.

2. Kada sopstvene vrijednosti λ_i veoma brzo opadaju, i kada najveća sopstvena vrijednost $|\lambda_M| \gg \lambda_i, i \neq M$ odgovara veoma uskom prozoru $q_M(m) \approx \delta(m)$. Prilikom analize FM signala ova varijansa je konstantna. U ovom slučaju je $\sigma_{\tilde{f}V}^2(n, \omega) = 2\sigma_v^2 |f(n)|^2 E_\phi$, gdje je $E_\phi = \sum_{k,m=-N/2}^{N/2-1} |\phi(m,k)|^2$ energija funkcije jezgra u TL domenu.

Primijetimo da spektrogram ne pripada prethodnim slučajevima. Naime, u slučaju spektrograma je $\tilde{\phi}(m,k) = w(m)w(k)$, $\lambda_i = \delta(i)$, $q_0(m) = w(m)$, kao i $\sigma_{\tilde{f}V}^2(n, \omega) = 2\sigma_v^2 \text{SPEC}_f(n, \omega)$. Njegova varijansa je veoma zavisna od analiziranog signala i šuma. Svojom srednjom vrijednošću se korektno može predstaviti samo $\sigma_{vv}^2(n, \omega)$ komponenta varijanse. Naime, srednja vrijednost varijanse $\sigma_{\tilde{f}V}^2(n, \omega)$ procjenjuje veću vrijednost u domenu gdje ne postoji signal i značajno manju vrijednost u domenu postojanja analiziranog signala. Preciznije, srednja vrijednost varijanse korektno (i potpuno tačno) predstavlja samo $\sigma_{vv}^2(n, \omega)$ komponentu varijanse. Slični zaključci se mogu izvesti za sve distribucije koje ne pripadaju jednom od prethodna tri slučaja ili im nijesu bliske.

Specijalni slučaj 2: U slučaju **bijelog, nestacionarnog šuma**, $R_{vv}(n+k_1, n+k_2) = I(n+k_1)\delta(k_1 - k_2)$, imamo:

$$\tilde{\Phi}(m_1, m_2) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} I(n+k) \tilde{\phi}(m_1, k) \tilde{\phi}^*(m_2, k) = \|\tilde{\phi}\| \|I(n)\| \|\tilde{\phi}\|^*, \quad (\text{III.123})$$

gdje je $\|I(n)\| = \|I(n+k)\delta_{m,k}\|$ dijagonalna matrica sa elementima $I(n+k)$. Posmatrajmo matricu $\|\tilde{\phi}\| \sqrt{\|I(n)\|}$. Ako su njene singularne vrijednosti s_i i singularni vektori $u_i(m)$ i $v_i(m)$, za dati trenutak n , tada su sopstvene vrijednosti i sopstveni vektori matrice $\|\tilde{\Phi}\|$, predstavljeni sa $\mu_i = |s_i|^2$ i $q_i(m) = u_i(m)$, respektivno. U slučaju kvazistacionarnog šuma, $I(n+k_1)\delta(k_1 - k_2) \approx I(n)\delta(k_1 - k_2)$, imamo $\mu_i = I(n)|\lambda_i|^2$, sa svim ostalim parametrima kao u slučaju stacionarnog šuma, *Specijalni slučaj 1*.

Specijalni slučaj 3: Obojeni stacionarni šum. U ovom slučaju se dobijaju izrazi dualni prethodno izvedenim, za slučaj nestacionarnog bijelog šuma, poglavljje III.2.1.1.

III.3.1. VARIJANSE ESTIMATORA NAJZNAČAJNIJIH DISTRIBUCIJA

Sumirajmo prethodnu analizu tačnim lokalnim vrijednostima varijanse u slučaju najznačajnijih TF reprezentacija, $\tilde{\phi}(m, k) = \phi((m+k)/2, (m-k)/2)$, i bijelog nestacionarnog kompleksnog šuma, $R_{vv}(m, n) = I(m)\delta(m-n), I(n) \geq 0$:

$$\sigma_{CD}^2(n, \omega) = CD_I(n, 0; |\phi|^2) + 2CD_f(n, \omega; \|\tilde{\phi}\| \|I(n)\| \|\tilde{\phi}\|^*), \quad (\text{III.124})$$

gdje je $\|\tilde{\phi}\|$ matrica sa elementima $\tilde{\phi}(m, k)$. Predstavimo specijalne oblike prethodne jednačine za WD i spektrogram.

1. *Pseudo Wignerova distribucija*, $\tilde{\phi}(m, k) = w(m)\delta(m+k)w(k)$, ima varijansu:

$$\sigma_{WD}^2(n, \omega) = WD_I(n, 0; w^2) + 2WD_{I, |f|^2}(n, 0; w^2), \quad (\text{III.125})$$

gdje je sa $WD_{x,y}(n, \omega)$ označena kros-Wignerova distribucija.

2. *Spektrogram*, $\tilde{\phi}(m, k) = w(m)w(k)$, ima varijansu:

$$\sigma_{SPEC}^2(n, \omega) = SPEC_I(n, 0; w^2) + 2STFT_I(n, 0; w^2)SPEC_f(n, \omega; w). \quad (\text{III.126})$$

Izrazi za slučaj stacionarnog bijelog šuma se dobijaju kao specijalan slučaj prethodnih izraza, za $I(n) = \sigma_v^2$.

Istovremeno su izrazi za slučaj obojenog stacionarnog šuma dualni prethodno izvedenim izrazima.

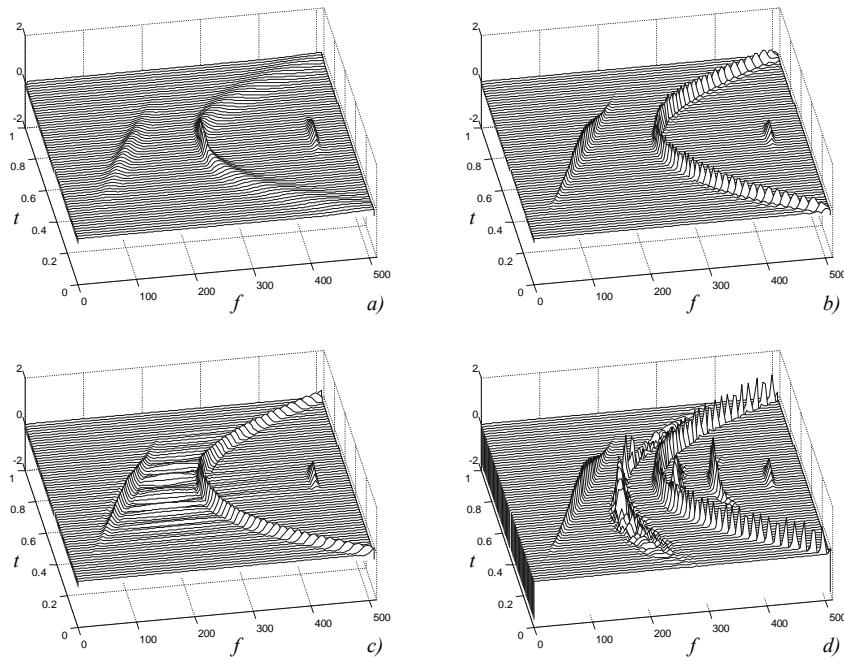
III.3.2. NUMERIČKA REALIZACIJA

Posmatrajmo signal:

$$f(t) = \exp(j512\pi t + j512\pi \frac{4}{3}(t - 0.5)^3) + e^{-16(t-0.5)^2} \exp(j512\pi t^2/2) + e^{-256(t-0.5)^2} \exp(j896\pi t). \quad (\text{III.127})$$

Signal (III.127) je posmatran na intervalu $[0,1]$ i odabran je sa korakom $\Delta t = 1/1024$. Upotrebljavan je Hanningov prozor širine $T_w = 1/4$. Signal je maskiran visokim stacionarnim šumom varijanse $\sigma_v^2 = 2$. Na slici III.14.(a)-(d) su prikazane WD, spektrogram, S-metod i Choi-Williamsova distribucija analiziranog signala, respektivno. Jezgro Choi-Williamsove distribucije, $c(\theta, \tau) = \exp(-(\theta\tau/2\pi)^2)$, je normalizovano na intervalu $-\sqrt{\pi N/2} \leq |\theta|, |\tau| \leq \sqrt{\pi N/2}$ sa $N = 128$ odbiraka unutar posmatranog intervala. Elementi matrice $\|\tilde{\phi}\|$ su izračunati na osnovu vrijednosti funkcije jezgra $c(\theta, \tau)$, $\tilde{\phi}(m, n) = \sum_{p=-N/2}^{N/2-1} c(p\Delta\theta, (m-n)\Delta\tau) \exp(-j2\pi(m+n)p/(2N))\Delta\theta$. Normalizovane sopstvene vrijednosti jezgra $\tilde{\phi}(m, n)$ su $\lambda_i = \{1, -0.87, 0.69, -0.58, 0.41, -0.30, 0.21, -0.13, 0.09, \dots\}$, kao i $\mu_i = |\lambda_i|^2 = \{1, 0.76, 0.47, 0.33, 0.17, 0.09, 0.04, 0.02, 0.01, \dots\}$.

Primijetimo da je, u slučaju spektrograma, varijansa $\sigma_{fv}^2(n, \omega)$ u potpunosti locirana u okolini komponenti signala i da je njena veličina proporcionalna spektrogramu analiziranog signala, jednačina (III.126). Varijansa S-metoda je proporcionalna sumi spektrograma, pomjereni po frekvencijskoj osi, jednačina (III.22). Prilikom implementacije Choi-Williamsove distribucije varijansa $\sigma_{fv}^2(n, \omega)$ je jednaka sumi spektrograma sa pozitivnim težinskim koeficijentima.



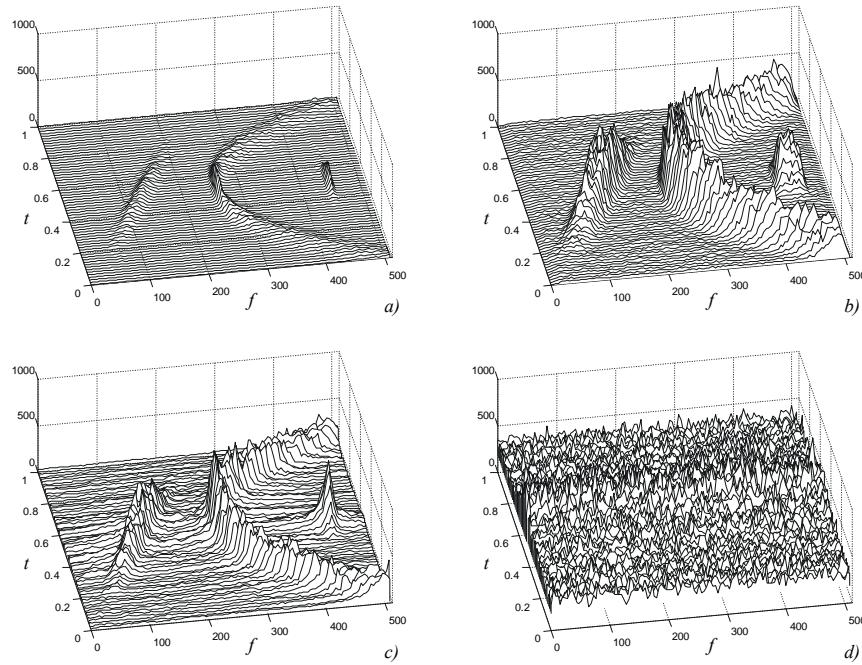
Slika III.14. TF reprezentacija signala (III.127), (a) spektrogram, (b) S-metod, (c) Choi-Williamsova distribucija, (d) pseudo WD

ma μ_i . Nasuprot tome, kod WD ova komponenta varijanse je rasprostranjena u čitavoj TF ravni. Zaključimo da varijanse dobijene primjenom spektrograma i pseudo WD predstavljaju ekstremne slučajeve ponašanja varijanse, kao i da se varijanse dobijene implementiranjem Choi-Williamsove distribucije i S-metoda nalaze između ovih ekstremnih slučajeva, slike III.15. Grafici na slici III.15. su dobijeni statističkim putem, usrednjavanjem 1024 realizacije. Podvukimo, na koncu, da je postignut veliki stepen slaganja teorijskih rezultata sa statistički postignutim vrijednostima.

III.4. EFEKTI OGRANIČENE DUŽINE REGISTARA PRILIKOM IMPLEMENTACIJE

VREMENSKO-FREKVencijskih distribucija

Realizacija distribucija podrazumijeva hardversku i softversku implementaciju. Prilikom implementacije u realnom vremenu često je neophodno hardverski realizovati TF reprezentaciju. U tom slučaju se pojavljuju značajni problemi u smislu postizanja zadovoljavajuće tačnosti dobijenih rezultata. Jedan od najznačajnijih problema predstavlja određivanje odgovarajuće dužine registara upotrijebljenih tom prilikom. Registri manje dužine riječi zahtijevaju manje hardvera, ali, istovremenu umanjuju rezoluciju i opseg predstavljanja podataka. Takođe, registri konačne dužine unose u sistem grešku kvantizacije, [105], koja se može u značajnoj mjeri odraziti na dobijene rezultate. Zaokruživanje rezu-



Slika III.15. Varijansa dobijena analizom signala (III.127) u sljedećim slučajevima: (a) spektrogram, (b) S-metod, (c) Choi-Williamsova distribucija, (d) pseudo WD

ltata aritmetičkih operacija takođe unosi grešku u sistem. Njen uticaj na krajnje rezultate zavisi od odabranog predstavljanja brojnih podataka (aritmetika sa fiksnom i aritmetika sa pomičnom tačkom). Aritmetika sa fiksnom tačkom (tzv. *fixed-point aritmetika*) se karakteriše uskim opsegom predstavljanja brojnih vrijednosti i većom osjetljivošću na efekte prekoračenja dinamičkog opsega upotrijebljenih registara, nastalih implementacijom operacije sabiranja, [105]. U cilju prevazilaženja ovog problema, implementira se aritmetika sa pomičnom tačkom (tzv. *floating-point aritmetika*). Njom se značajno proširuje dinamički opseg registara, ali se, za datu dužinu registara, ovaj efekat postiže na račun postignute preciznosti. Stoga je neophodno usmjeriti posebnu pažnju na adekvatan izbor dužine upotrijebljenih registara, pravljenjem kompromisa između veličine mantise i eksponenta.

Efekti konačne dužine registara su dosad razmatrani kod WD, [158]. Ovdje će biti analizirani isti efekti u slučaju proizvoljne kvadratne distribucije iz Cohenove klase. Posmatrani su slučajevi aritmetike sa pomičnom i aritmetike sa fiksnom tačkom. Odnos signal-šum kvantizacije (SNR_q) je izведен i upotrijebljen kao kriterijum kvantitativnog poređenja distribucija. Analizirani su deterministički i kvazistacionarni slučajni signali. Povezan je dinamički opseg upotrijebljenih registara sa željenim kvalitetom predstavljanja, definisanim odnosom SNR_q . Dobijeni rezultati mogu biti upotrijebljeni za određivanje dužine registara prilikom hardverske realizacije distribucija, kao i u prilikom projektovanja dužine mantise i eksponenta, prilikom implementacije aritmetike sa pomičnom tačkom.

III.4.1. ANALIZA EFEKATA KVANTIZACIJE

Definišimo Cohenovu klasu distribucija analiziranog signala $f(n)$ u diskretnom obliku sa:

$$\begin{aligned} CD_f(n, k; \varphi) &= \sum_{i=-L}^{L-1} r_f(n, i) \exp(-j \frac{4\pi}{N} ki), \\ r_f(n, i) &= \sum_{m=-L}^{L-1} \varphi(m, i) f(n+m+i) f^*(n+m-i), \end{aligned} \quad (\text{III.128})$$

gdje su granice sumiranja određene širinom $N = 2L$ funkcije jezgra $\varphi(m, i)$ po t - i τ -osi. Sa $r_f(n, i)$ je predstavljena generalisana diskretna autokorelaciona funkcija. U cilju sprovođenja analize uticaja konačne dužine registara na tačnost rezultata postignutih posmatrаниh distribucijama, neophodno je pronaći varijansu Cohenovog estimatora prilikom analize signala $x(n) = f(n) + v(n)$, poglavljje III.3. Analizu uticaja konačne dužine riječi ćemo svestri u slučajevima determinističkog i slučajnog signala $f(n)$.

Deterministički signal. Pretpostavimo deterministički signal $f(n)$. U prethodnom poglavlju je određena varijansa Cohenovog estimatora u ovom slučaju, dokazana njena frekvencijska zavisnost i pokazano da se može predstaviti u formi: $\sigma_{xx}^2(k) = \sigma_{fv}^2(k) + \sigma_{vv}^2(k)$. Njena srednja vrijednost, u slučaju determinističkog FM signala $f(n) = A \cdot \exp(j\phi(n))$ i bijelog Gaussovog šuma poprima oblik:

$$\overline{\sigma_{xx}^2(k)} = (2A^2 + \sigma_v^2)\sigma_v^2 \sum_{i=-L}^{L-1} \sum_{m=-L}^{L-1} |\varphi(m, i)|^2. \quad (\text{III.129})$$

U izlaganjima se zadržavamo samo na slučaju kompleksnog šuma, pošto osnovni zaključci, koji mogu biti izvedeni za slučaj realnog i analitičkog signala i šuma, ostaju nepromijenjeni, [8], [151] i glava III.2. Značajno je, međutim, podvući da se druga komponenta varijanse u prethodnom izrazu, $\sigma_v^4 \sum_{i=-L}^{L-1} \sum_{m=-L}^{L-1} |\varphi(m, i)|^2$, u slučaju bijelog, uniformno distribuiranog šuma $v(n)$, neznatno razlikuje od iste, dobijene u slučaju bijelog Gaussovog šuma, tako da se konačni izrazi mogu aproksimativno opisati jednačinom (III.129)¹⁶.

¹⁶U slučaju stacionarnog, bijelog, uniformno distribuiranog, kompleksnog šuma $v(n)$, druga komponenta varijanse u (III.129) poprima oblik:

$$\sigma_{vv}^2 = \sigma_v^4 \left(\sum_{i=-L}^{L-1} \sum_{m=-L}^{L-1} |\varphi(m, i)|^2 - \frac{6}{5} \left| \sum_{m=-L}^{L-1} \varphi(m, 0) \right|^2 \right) \cong \sigma_v^4 \sum_{i=-L}^{L-1} \sum_{m=-L}^{L-1} |\varphi(m, i)|^2.$$

Slučajni signal. Prepostavimo kompleksni, kvazistacionarni, slučajni proces $f(n)$ varijanse σ_f^2 i kompleksni šum $v(n)$ varijanse σ_v^2 , oba sa nezavisnim realnim i imaginarnim djelovima podjednakih varijansi, $E\{f(n_1)f(n_2)\} = E\{v(n_1)v(n_2)\} = 0$ i $E\{f^*(n_1)f^*(n_2)\} = E\{v^*(n_1)v^*(n_2)\} = 0$, kao i $E\{f(n+i_1)f^*(n+i_2)\} \equiv \sigma_f^2(n)\delta(i_1-i_2)$, [108] (gdje je $\sigma_f^2(n)$ sporopromjenljiva funkcija). Ovaj oblik analiziranog signala nije posebno interesantan u praktičnim realizacijama, pošto TF analiza nalazi puni smisao tek u slučaju analize visoko nestacionarnih procesa. Ipak, u ovom slučaju se izvode veoma jednostavni izrazi, upotrebljivi u analizi uticaja ograničene dužine riječi pomoću veoma komplikovanog modela, [105], [158]. Primjenjujući analizu iz prethodnog poglavlja i [151], u slučaju kvazistacionarnih, bijelih, Gaussovih, slučajnih procesa, uz pretpostavku nekoreliranosti analiziranog signala i šuma, izvodi se varijansa $CD_x(n, k; \varphi)$ estimatora. Naime, u tom slučaju se pokazuje da se varijansa estimatora dobija iz (III.83), jednostavnom zamjenom varijanse šuma sumom varijanse signala i varijanse šuma, $\sigma_f^2(n) + \sigma_v^2$,

$$\sigma_{xx}^2(n, k) = (\sigma_f^2(n) + \sigma_v^2)^2 \sum_{i=-L}^{L-1} \sum_{m=-L}^{L-1} |\varphi(m, i)|^2. \quad (\text{III.130})$$

III.4.2. EFEKTI KVANTIZACIJE NASTALI IMPLEMENTACIJOM

ARITMETIKE SA POMIČNOM TAČKOM

U primjenama zasnovanim na aritmetici sa pomičnom tačkom, efekti kvantizacije utiču samo na mantisu, [105]. Dakle, u ovom slučaju je napravljena greška - relativna, odnosno multiplikativna. Drugim riječima, ukoliko sa $Q[x]$ označimo kvantiziranu veličinu, a sa x njenu vrijednost prije kvantizacije, možemo napisato: $Q[x] = x(1 + \varsigma(n))$, gdje je $\varsigma(n)$ relativna greška nastala kvantizacijom, [105]. U cilju sprovođenja odgovarajuće analize, uvedimo sljedeće pretpostavke, [105]:

- 1) Dužina mantise je $(b+1)$ bit, sa sljedećom organizacijom: b bita se upotrebljava za predstavljanje apsolutne vrijednosti mantise, dok se jedan bit upotrebljava za predstavljanje njenog znaka;

Uvođenje znaka približne jednakosti u prethodnom izrazu će biti opravdano u daljim izlaganjima, kada će biti pokazano da se, u slučaju najčešće upotrebljavanih RID distribucija (koje zadovoljavaju marginalni uslov po frekvenciji), kao i u slučaju WD, drugi sabirak u prethodnoj jednačini može zanemariti.

- 2) Slučajne promjenljive posmatranog procesa (relativne greške kvantizacije $\varsigma(n)$) su nekorelirane, tako da se $\varsigma(n)$ može posmatrati kao bijeli slučajni proces uniformno distribuiran na intervalu -2^{-b} do 2^{-b} ;
- 3) Napravljene greške su međusobno nekorelirane;
- 4) Sve greške su nekorelirane sa ulaznim signalom, a time i sa svim signalima u sistemu.

Zaključimo da srednja vrijednost i varijansa ovako pretpostavljene relativne greške $\varsigma(n)$ iznose: $m_\varsigma = 0$ i $\sigma_\varsigma^2 = 2^{-2b}/3 = \sigma_B^2$, gdje je σ_B^2 osnovna varijansa.

Saglasno uvedenim pretpostavkama, u analizi uticaja konačne dužine registara na tačnost rezultata, dobijenih vremensko-frekvencijskim distribucijama iz Cohenove klase, upotrebljavamo sljedeći model:

$$\begin{aligned} C(n, k; \varphi) &= \sum_{i=-L}^{L-1} \{r(n, i)e^{-j4\pi ki/N}[1 + \mu(n, i, k)] \prod_{p=1}^{L_p} [1 + g(n, i, k, p)]\}, \\ r(n, i) &= \sum_{m=-L}^{L-1} \{\varphi(m, i)x(n+m+i)x^*(n+m-i)[1 + e(n+m, i)][1 + \rho(n+m, m, i)] \prod_{q=1}^{L_q} [1 + d(n+m, m, i, q)]\}, \end{aligned} \quad (\text{III.131})$$

gdje je $x(n) = f(n) + \varepsilon(n)$. U prethodnim jednačinama su uvedeni sljedeći izvori šuma:

$\varepsilon(n)$ - šum nastao kvantizacijom ulaznog kompleksnog signala $f(n)$,

$e(n+m, i)$ - šum nastao kvantizacijom proizvoda $x(n+m+i)x^*(n+m-i)$,

$\rho(n+m, m, i)$ - šum nastao kvantizacijom proizvoda funkcije jezgra $\varphi(m, i)$ sa $x(n+m+i)x^*(n+m-i)$,

$\mu(n, i, k)$ šum nastao kvantizacijom proizvoda auto-korelace funkcije $r(n, i)$ sa osnovnim eksponencijalnim funkcijama $\exp(-j4\pi ki/N)$.

Polazeći od definicije, kao i uvedenih pretpostavki, zaključujemo da su im odgovarajuće varijanse

$$2\sigma_\varepsilon^2 = \sigma_e^2 = \sigma_\rho^2 = \sigma_\mu^2 = 4\sigma_B^2.$$

Primijetimo da su modelom (III.131) uključeni izvori šuma $g(n, i, k, p)$ i $d(n+m, m, i, q)$, prouzrokovani sumiranjima. Naime, sumiranje, kod aritmetike sa pomičnom tačkom, unosi u sistem grešku kvantizacije, predstavljenu multiplikativnim šumom, [105]. Prepostavimo da se sumiranja u našem modelu (III.131) obavljaju na sljedeći način: sumiramo susjedne elemente u prvom koraku, zatim susjedne sume u sljedećem koraku, i tako redom. Ova šema sumiranja odgovara sumiranju kod FFT algoritma, [105], tako da rezultira sa: $L_p = L_q = \log_2 N$, [158]. Primijetimo da nijesu analizirane greške napravljene kvantizacijom osnovnih funkcija $\exp(-j4\pi ki/N)$ iako mogu biti modelirane

bijelim šumom, [105]. Naime, ove greške pokazuju neke determinističke osobine. Isti razlozi su primjenjeni prilikom izostavljanja iz analize greške nastale kvantizacijom funkcije jezgra $\varphi(m, i)$.

Pošto su, u realnim sistemima, greške napravljene kvantizacijom veoma male, svi članovi višeg reda mogu biti zanemareni, $\prod_{p=1}^{L_p} [1 + g(n, i, k, p)] \approx 1 + \sum_{p=1}^{L_p} g(n, i, k, p)$, $\prod_{q=1}^{L_q} [1 + d(n+m, m, i, q)] \approx 1 + \sum_{q=1}^{L_q} d(n+m, m, i, q)$, tako da se predloženi model (III.131) redukuje na sljedeći oblik:

$$\begin{aligned} C(n, k; \varphi) &\equiv \sum_{i=-L}^{L-1} \{r(n, i)e^{-j4\pi ki/N} [1 + \eta(n, i, k, p)]\}, \\ r(n, i) &\equiv \sum_{m=-L}^{L-1} \{\varphi(m, i)x(n+m+i)x^*(n+m-i)[1 + \varepsilon_{eq}(n+m, m, i, q)]\}. \end{aligned} \quad (\text{III.132})$$

Sa $\eta(n, i, k, p)$ i $\varepsilon_{eq}(n+m, m, i, q)$ su predstavljeni ekvivalentni izvori šuma,

$$\begin{aligned} \eta(n, i, k, p) &= \mu(n, i, k) + \sum_{p=1}^{L_p} g(n, i, k, p), \\ \varepsilon_{eq}(n+m, m, i, q) &= e(n+m, i) + \rho(n+m, m, i) + \sum_{q=1}^{L_q} d(n+m, m, i, q), \end{aligned} \quad (\text{III.133})$$

sa njima odgovarajućim varijansama $\sigma_\eta^2 = \sigma_\mu^2 + L_p \sigma_g^2$ i $\sigma_{eq}^2 = \sigma_e^2 + \sigma_\rho^2 + L_q \sigma_d^2$. Polazeći od centralne granične teoreme, kao i od činjenice da su ekvivalentni šumovi (III.133) predstavljeni sumom statistički nezavisnih, malih slučajnih procesa, izvori šuma $\eta(n, i, k, p)$ i $\varepsilon_{eq}(n+m, m, i, q)$ se ponašaju kao Gaussovi slučajni procesi.

Poslije nekoliko uobičajenih transformacija dobijamo varijansu modela (III.132) u sljedećem obliku:

$$\sigma^2(n, k) \equiv \sigma_{xx}^2(n, k) + \sigma_{eq}^2 \sum_{i=-L}^{L-1} \sum_{m=-L}^{L-1} |\varphi(m, i)|^2 E\{|x(n+m+i)|^2 |x(n+m-i)|^2\} + \sigma_\eta^2 \sum_{i=-L}^{L-1} E\{|r_x(n, i)|^2\}. \quad (\text{III.134})$$

Sa $\sigma_{xx}^2(n, k)$ je predstavljena varijansa proizvoljne kvadratne distribucije (iz Cohenove klase) signala $x(n) = f(n) + \varepsilon(n)$ uz pretpostavku idealne aritmetike, odnosno, uz pretpostavku postojanja samo šuma nastalog kvantizacijom ulaznog signala, $\varepsilon(n)$. Njena vrijednost, dobijena analizom slučajnog signala $f(n)$, je predstavljena jednačinom (III.130), dok je njena srednja vrijednost, za slučaj determinističkog signala $f(n)$ data jednačinom (III.129) (za $v(n) = \varepsilon(n)$).

A. Slučajni signal $f(n)$

Prepostavimo da je analizirani signal $f(n)$ kompleksni, kvazistacionarni, bijeli, Gaussov, slučajni proces varijanse $\sigma_f^2(n)$. Takođe, prepostavimo da su realni i imaginarni dio analiziranog signala međusobno nezavisni i da su podjednakih varijansi. U ovom slučaju, varijansa modela poprima oblik:

$$\sigma^2(n, k) \cong (\sigma_f^4(n) + 2\sigma_f^2(n)\sigma_\varepsilon^2)E_\varphi + \sigma_f^4(n)\sigma_{eq}^2[E_\varphi + \sum_{m=-L}^{L-1}|\varphi(m, 0)|^2] + \sigma_f^4(n)\sigma_\eta^2[E_\varphi + \left(\sum_{m=-L}^{L-1}\varphi(m, 0)\right)^2], \quad (\text{III.135})$$

gdje je $E_\varphi = \sum_{i=-L}^{L-1} \sum_{m=-L}^{L-1} |\varphi(m, i)|^2$ energija funkcije jezgra $\varphi(m, i)$. Posljednja jednačina može biti pojednostavljena u slučaju proizvoljne RID distribucije koja zadovoljava marginalni uslov po frekvenciji, kao i u slučaju WD. U tim slučajevima, jezgro $\varphi(m, i)$ je najvećim svojim dijelom koncentrisano oko ishodišta TL ravni i oko i ($m = 0$) ose, slika I.4., tako da se jednostavno može izvesti da je:

$$\sum_{m=-L}^{L-1} |\varphi(m, 0)|^2 = \left| \sum_{m=-L}^{L-1} \varphi(m, 0) \right|^2 = |\varphi(0, 0)|^2, \quad (\text{III.136})$$

gdje je $\varphi(0, 0)$ konstanta, $\varphi(0, 0) = 1$. Uz to, upotrebljavajući definicije (III.133) ekvivalentnih izvora šuma $\eta(n, i, k, p)$ i $\varepsilon_{eq}(n+m, m, i, q)$ i $2\sigma_\varepsilon^2 = \sigma_e^2 = \sigma_\rho^2 = \sigma_\mu^2 = \sigma_d^2 = \sigma_g^2 = 4\sigma_B^2 = \sigma_c^2$, dobijamo varijansu modela $\sigma^2(n, k)$,

$$\sigma^2(n, k) \cong (\sigma_f^4(n) + \sigma_f^2(n)\sigma_c^2)E_\varphi + \sigma_f^4(n)(3 + L_p + L_q)\sigma_c^2[E_\varphi + |\varphi(0, 0)|^2]. \quad (\text{III.137})$$

Primijetimo da, zavisno od faktora E_φ , varijansa $\sigma^2(n, k)$ uzima različite vrijednosti za razne distribucije iz Cohenove klase. U poglavlju III.2. smo pokazali da se ovaj faktor minimizira (zadovoljavajući, istovremeno, marginalne osobine i osobinu ograničenosti po vremenu) jezgrom Born-Jordanove distribucije. Stoga se minimalna vrijednost varijanse $\sigma^2(n, k)$, pod istim uslovima, dobija Born-Jordanovom distribucijom, [62], [70], [71].

Kao kriterijum za poređenje pojedinih distribucija, definišimo odnos šum kvantizacije-signal (NSR) sa:

$$NSR = \frac{\sigma^2(n, k) - \sigma_{\text{bezsuma}}^2}{\sigma_{\text{bezsuma}}^2}, \quad (\text{III.138})$$

gdje je $\sigma_{\text{bezsuma}}^2$ varijansa modela (III.131) uz pretpostavku idealne aritmetike, dok je $\sigma^2(n, k)$ varijansa predstavljena izrazom (III.137). Preciznije,

$$NSR \cong \frac{\sigma_c^2}{\sigma_f^2(n)} + (3 + L_p + L_q)[1 + |\varphi(0, 0)|^2]/E_\varphi \sigma_c^2. \quad (\text{III.139})$$

Pošto je $|\varphi(0, 0)|^2 \ll E_\varphi$, posljednju jednačinu možemo aproksimirati izrazom:

$$NSR \cong \sigma_c^2/\sigma_f^2 + (3 + L_p + L_q)\sigma_c^2, \quad (\text{III.140})$$

gdje $\sigma_f^2 = \min_n\{\sigma_f^2(n)\}$ odgovara najgorem slučaju, posmatrano sa aspekta projektovanja dužine riječi. U ovom slučaju sve posmatrane distribucije pokazuju aproksimativno podjednake karakteristike s aspekta veličine NSR odnosa. Stepen predložene aproksimacije, odnosno greška unesena aproksimacijom (III.140) je različita za razne distribucije i

zavisi od faktora E_φ . Ovaj faktor je detaljno analiziran u poglavlju III.2., kao i u Tabeli III.2. U Tabeli III.2. su jezgra posmatranih distribucija data u analognom AF domenu. Diskretizacija je obavljena na opsegu $|\Theta| \leq \sqrt{\pi L}$ i $|\tau| \leq \sqrt{\pi L}$, sa $L = 256$. Funkcija jezgra $\varphi(m, i)$ se izračunava kao: $\varphi(m, i) = FT_0[c(\theta, i)]$, gdje su $c(\theta, i)$ odbirci funkcije jezgra $c(\Theta, \tau)$ po τ -osi, dok je $\theta = \Theta(\pi/\sqrt{\pi L})$ diskretna učestanost. U cilju poređenja pojedinih distribucija, njihovi parametri su odabrani kao u poglavlju III.2.1. i u [131]. Veličine odnosa signal-šum kvantizacije, izračunate pronalaženjem osnosa $SNR = 1/NSR$, su predstavljene u Tabeli III.2. za slučaj najčešće upotrebljivih distribucija iz Cohenove klase i za $b = 16$ bita (b je broj bita upotrijebljen za predstavljanje apsolutne vrijednosti mantise). Greška napravljena aproksimacijom (III.140) je proračunata i zaključeno je da se ona kreće u opsegu od $|\varphi(0,0)|^2/E_\varphi = 0.0798$ (slučaj Born-Jordanove distribucije) do 0 (slučaj Zao-Atlas-Marksove distribucije). Naime, jezgro Zao-Atlas-Marksove distribucije, $c(\Theta, \tau) = |\tau| \sin(\Theta\tau/2)/(\Theta\tau/2)$ ne zadovoljava marginalni uslov po frekvenciji, $c(\theta, 0) = 0$, tako da je: $\varphi(m, 0) = 0$, za svako m .

Druga interesantna distribucija (posebno sa aspekta svoje jednostavne realizacije), detaljno analizirana u disertaciji je S-metod. Njeno jezgro u TL domeu se definiše sa, [70], [141]:

$$\varphi_{SM}(m, i) = w(m+i)w(m-i) \frac{\sin[2\pi m(2L_d + 1)/N]}{(2L_d + 1)K \sin(2\pi m/N)}. \quad (\text{III.141})$$

Primjetimo da funkcija jezgra $\varphi_{SM}(m, i)$ nije, u opštem slučaju, separabilna funkcija. Faktor K , $K = \sum_{l=-L_d}^{L_d} W_{w^2}(2l)/(2L_d + 1)$ sa $W_{w^2}(l) = FT[w^2(m)]$ je uveden u cilju očuvanja uslova nepromjenljivosti energije za svalo L_d . U slučaju Hanningovog prozora i $L_d = 4$ imamo $E_\varphi = 9.1104$ i $SNR[dB] = 81.6509$. S druge strane, u slučaju spektrograma ($L_d = 0$), $SNR[dB] = 81.6559$.

Zamjenjujući $L_p = L_q = \log_2 N$ i σ_c^2 u (III.140), te znajući da je širina funkcije jezgra oblika stepena broja 2,

$N = 2^V$, NSR odnos može biti predstavljen u obliku:

$$NSR \cong \frac{4}{3}(3 + 2V + 1/\sigma_f^2) \cdot 2^{-2b}. \quad (\text{III.142})$$

Zapazimo da se NSR odnos sastoji iz dva dijela, $NSR \cong \frac{4}{3}(3 + 1/\sigma_f^2) \cdot 2^{-2b} + \frac{8}{3}V \cdot 2^{-2b} = NSR_1 + NSR_2$. Prva komponenta zavisi od broja bita neophodnih za predstavljanje mantise, dok druga komponenta zavisi od širine funkcije jezgra (predstavljene sa $N = 2^V$) i od broja bita b . Odnos NSR_1 , predstavljen u logaritamskoj razmjeri, ima oblik:

Tabela III.2. Faktori E_φ , $|\varphi(0,0)|^2/E_\varphi$, C i SNR odnos u slučaju pojedinih distribucija iz Cohenove klase: Born-Jordanova distribucija (BJD), Distribucija sa optimalnim auto-članom (OAT), Choi-Williamsova distribucija (CWD), Butterworthova distribucija (BD), Sinc distribucija (SINCD), pseudo WD sa Hanningovim prozorom $w^2(\tau)$ (PWD)

Faktori	BJD	OATD	CWD	BD	SINCD	PWD
Funkcija jezgra $c(\Theta, \tau)$	$\frac{\sin(\Theta\tau/2)}{\Theta\tau/2}$	$\exp(-\frac{ \Theta\tau }{\sigma})$	$\exp(-\frac{\Theta^2\tau^2}{\sigma^2})$	$\frac{1}{1+(\Theta\tau/(\Theta_1\tau_1))^4}$	$\text{rect}(\Theta\tau/\alpha)$	$w^2(\tau)$
$E_\varphi = \sum_{i=-L}^{L-1} \sum_{m=-L}^{L-1} \varphi(m,i) ^2$	12.5358	12.9121	15.4919	19.8952	22.3258	192
$ \varphi(0,0) ^2/E_\varphi$	0.0798	0.0774	0.0645	0.0503	0.0448	0.0052
$C = \sqrt{\sum_{i=-L}^{L-1} \sum_{m=-L}^{L-1} \varphi(m,i) }$	4.9277	4.7620	4.5476	5.0046	4.8527	16
SNR[dB]	81.3373	81.3462	81.3963	81.4525	81.4742	81.6344

$$NSR_1[dB] = 10 \log(NSR_1) = 10 \log\left(4 + \frac{4}{3\sigma_f^2}\right) - 6.02b. \quad (\text{III.143})$$

Očigledno je $NSR_1[dB]$ opada aproksimativno za $6dB$ sa svakim bitom dodatim na dužinu upotrebljavanih registara.

Sa druge strane, druga komponenta je proporcionalna sa v , za razliku od slučaja aritmetike sa fiksnom tačkom, kada je ona proporcionalna sa kvadratom N (ovo će biti pokazano u sljedećem poglavlju). Istovremeno je NSR_2 odnos proporcionalan sa 2^{-2b} , tako da se, kvadriranjem v (odnosno, produžavanjem trajanja signala do četvrtog stepena N) postiže povećanje veličine NSR_2 , koje odgovara smanjenju dužine registara za jedan bit. Dakle, u cilju zadržavanja NSR_2 odnosa na istoj veličini, povećanje opsega analiziranog signala na četvrti stepen može biti kompenzovano povećanjem dužine riječi upotrebljavanih registara za jedan bit (prilikom projektovanja sistema za TF analizu).

Predstavimo, na koncu, izraz (III.142) fundamentalnom zavisnošću dinamičkog opsega registara od SNR odnosa:

$$b \cong 0.2075 + \{10 \log(3 + 2v + 1/\sigma_f^2) + SNR[dB]\}/6.02. \quad (\text{III.144})$$

Upotrebljavajući ovaj izraz, jednostavno je odrediti broj bita potrebnih za predstavljanje apsolutne vrijednosti mantise za željeni kvalitet predstavljanja signala. Na primjer, u cilju očuvanja SNR odnosa na vrijednosti $SNR[dB] \geq 80dB$, za $v = 10$ i $\sigma_f^2 = 1$, potrebno je upotrijebiti $b = 16$ bita za predstavljanje mantise.

Primijetimo da je jednačina (III.144) veoma upotrebljiva kod projektovanja hardvera za implementaciju TF algoritama. Ona može biti upotrijebljena za odgovarajuće dimenzionisanje registara u cilju postizanja zadovoljava-

jućeg kvaliteta prezentacije, određenog SNR odnosom. Takođe se izraz (III.144) može iskoristiti prilikom određivanja dužine mantise i eksponenta (izražene brojem bita neophodnim za njihovo predstavljanje), u cilju postizanja kompromisa između odgovarajućeg opsega predstavljanja brojnih vrijednosti i željene tačnosti dobijenih rezultata.

B. Deterministički signal $f(n)$

Pretpostavimo da je analizirani signal $f(n)$ deterministički. U cilju izvodenja varijanse modela (III.132) odlučili smo se za pronalaženje njene srednje vrijednosti, pošto ona zahtijeva niži stepen poznavanja analiziranog determinističkog signala, [8], [151]. Srednja vrijednost varijanse (III.134) može biti predstavljena u sljedećoj formi:

$$\overline{\sigma^2(k)} \cong \overline{\sigma_{xx}^2(k)} + \sigma_{eq}^2 \sum_{i=-L}^{L-1} \sum_{m=-L}^{L-1} |\varphi(m, i)|^2 E\{|x(n+m+i)|^2 |x(n+m-i)|^2\} + \sigma_\eta^2 \sum_{i=-L}^{L-1} E\{|r_x(n, i)|^2\}, \quad (\text{III.145})$$

gdje je $\overline{\sigma_{xx}^2(k)}$ srednja vrijednost varijanse modela u slučaju idealne aritmetike. Zanemarujući sve šumove višeg reda i primjenjujući, potom, nekoliko uobičajenih transformacija, [151]-[158], dobijamo:

$$\overline{\sigma^2(k)} \cong \overline{\sigma_{xx}^2(k)} + \sigma_{eq}^2 \sum_{i=-L}^{L-1} \sum_{m=-L}^{L-1} |\varphi(m, i)|^2 |f(n+m+i)|^2 |f(n+m-i)|^2 + \sigma_\eta^2 \sum_{i=-L}^{L-1} |r_f(n, i)|^2. \quad (\text{III.146})$$

Upotrebljavajući definicije ekvivalentnih izvora šuma (III.133), posljednja jednačina može biti napisana u obliku:

$$\begin{aligned} \overline{\sigma^2(k)} &\cong \overline{\sigma_{xx}^2(k)} + (\sigma_e^2 + \sigma_p^2 + L_q \sigma_d^2) \sum_{i=-L}^{L-1} \sum_{m=-L}^{L-1} |\varphi(m, i)|^2 |f(n+m+i)|^2 |f(n+m-i)|^2 + \\ &+ (\sigma_u^2 + L_p \sigma_g^2) \sum_{i=-L}^{L-1} \left| \sum_{m=-L}^{L-1} \varphi(m, i) f(n+m+i) f^*(n+m-i) \right|^2. \end{aligned} \quad (\text{III.147})$$

U slučaju determinističkog FM signala, $\overline{\sigma_{xx}^2(k)}$ je predstavljeno jednačinom (III.129). Primjenom Cauchy-jeve nejednakosti¹⁷, na posljednji sabirak iz (III.147), $\sum_{i=-L}^{L-1} \left| \sum_{m=-L}^{L-1} \varphi(m, i) f(n+m+i) f^*(n+m-i) \right|^2 \leq N A^4 E_\varphi$, dobijamo:

$$\overline{\sigma^2(k)} \leq [A^2 + A^4 (2 + L_q)] + N A^4 (1 + L_p) \sigma_c^2 E_\varphi. \quad (\text{III.148})$$

Razumnim izborom dužine analiziranog signala $f(n)$, $N \gg 1$, drugi sabirak u (III.148) može biti zanemaren, tako da je maksimalna vrijednost $\overline{\sigma^2(k)}$,

$$\max\{\overline{\sigma^2(k)}\} \cong [A^2 + N A^4 (1 + L_p)] \sigma_c^2 E_\varphi. \quad (\text{III.149})$$

¹⁷Cauchy-eva nejednakost glasi, [108]:

$$|\sum_n z(n) w(n)|^2 \leq \sum_n |z(n)|^2 \sum_n |w(n)|^2.$$

Potreban i dovoljan uslov za zadovoljenje znaka jednakosti u prethodnom izrazu je: $z(n) = k w^*(n)$.

Jednačina (III.149) predstavlja opšti maksimizirani izraz za srednju vrijednost varijanse u slučaju analiziranog FM signala. Međutim, ovaj izraz ne može biti upotrijebljen kao dobra aproksimacija za mnoge oblike signala, pošto se jednakost u Cauchy-evoj nejednakosti veoma rijetko zadovoljava. Stoga ćemo posmatrati posebne oblike signala, pošto se u specijalnim slučajevima može postići aproksimacija veoma bliska tačnoj vrijednosti. Time ćemo analizu srednje vrijednosti varijanse napraviti realnijom, a time i upotrebljivijom.

Primjer: Posmatrajmo poseban oblik FM signala $f(n) = A \exp(j\psi(n))$ sporopromjenljive frekvencije $\omega(n)$, $f(n+m \pm i)\varphi(m, i) \cong A\varphi(m, i) \exp[j(\psi(n) + \omega(n)(m \pm i))]$ unutar posmatranog lag-intervala. U ovom slučaju imamo: $|r_f(n, i)|^2 = A^4 |c(0, i)|^2$. Shodno tome, (III.147) se, u slučaju distribucija koje zadovoljavaju marginalnu uslov po vremenu, svodi na:

$$\overline{\sigma^2(k)} \cong (2A^2 \sigma_e^2 + A^4 \sigma_{eq}^2) E_\varphi + NA^4 \sigma_\eta^2. \quad (\text{III.150})$$

Primjetimo da je srednja vrijednost varijanse modela direktno proporcionalna faktoru E_φ , slično kao u slučaju maksimalne vrijednosti $\overline{\sigma^2(k)}$ prilikom analize proizvoljnog FM signala, jednačina (III.149).

Na kraju, u cilju izvođenja adekvatnih zaključaka, definišimo maksimalni odnos signal-šum kvantizacije (SNR_{\max}) za analizirane determinističke signale, poglavlje III.1.,

$$SNR_{\max} = \frac{\max \{|CD_f(n, k; \varphi)|^2\}}{\overline{\sigma^2(k)}}. \quad (\text{III.151})$$

Posmatrajmo signal $f(n)$ oblika čiste sinusoide. U slučaju distribucija koje zadovoljavaju marginalni uslov po vremenu, jednostavno se može pokazato da je: $CD_f(n, k; \varphi) = NA^2 \delta(k - k_0)$, kao i:

$$SNR_{\max} = \frac{N^2 A^4}{(2A^2 \sigma_e^2 + A^4 \sigma_{eq}^2) E_\varphi + NA^4 \sigma_\eta^2}. \quad (\text{III.152})$$

Opišimo prethodnu analizu fundamentalnom zavisnošću dinamičkog opsega upotrebljavanih registara (odnosno, broja bita upotrijebljenih za predstavljanje apsolutne vrijednosti mantise) od greške unesene kvantizacijom:

$$b \cong 0.2075 - \frac{v}{2} + \left\{ 10 \log[(2 + v + 1/A^2) \frac{E_\varphi}{N} + 1 + v] + SNR_{\max} [dB] \right\} / 6.02. \quad (\text{III.153})$$

Brojne veličine faktora E_φ kod posmatranih distribucija prikazane se u Tabeli III.2. Prethodna jednačina može biti implementirana prilikom projektovanja hardvera - u cilju određivanja veličine registara neophodne za postizanje

zadovoljavajućeg kvaliteta reprezentacije. Na primjer, za $A = 1$, $N = 512$ i $SNR_{\max}[dB] \geq 80dB$, dobijamo mantisu veličine $b = 11$ za sve posmatrane RID distribucije koje zadovoljavaju marginalne osobine.

III.4.3. EFEKTI KVANTIZACIJE NASTALI IMPLEMENTACIJOM

ARITMETIKE SA FIKSNOM TAČKOM

Prilikom reprezentacije brojnih veličina u aritmetici sa fiksnom tačkom, greška kvantizacije se pravi samo implementacijom operacije množenja. Međutim, istovremeno, primjenom operacije sabiranja možemo dovesti do prekoračenja dozvoljenog dinamičkog opsega registara (tzv. *overflow*). U cilju sprovođenja adekvatne analize uticaja konačne dužine registara na tačnost rezultata dobijenih u ovom slučaju, upotrijebimo sljedeći model:

$$\begin{aligned} C(n, k; \varphi) &= \sum_{i=-L}^{L-1} \{r(n, i)e^{-j4\pi ki/N} + \mu(n, i, k)\}, \\ r(n, i) &= \sum_{m=-L}^{L-1} \{\varphi(m, i)[x(n+m+i)x^*(n+m-i) + e(n+m, i)] + \rho(n+m, m, i)\}. \end{aligned} \quad (\text{III.154})$$

Greške kvantizacije uvedene (u sistem) modelom (III.154) su analogne onima uvedenim prilikom implementacije aritmetike sa pomičnom tačkom sa odgovarajućim varijansama, $2\sigma_e^2 = \sigma_e^2 = \sigma_\rho^2 = \sigma_\mu^2 = 4\sigma_B^2 = \sigma_c^2$ (gdje je $\sigma_B^2 = 2^{-2b}/12$ osnovna varijansa). Za razliku od slučaja floating-point aritmetike, ove greške su aditivne, [105].

1. Pretpostavimo najprije da je analizirani signal dovoljno mali tako da ne može doći do overflowa. Nakon nekoliko odgovarajućih transformacija, varijansa predloženog modela poprima sljedeći oblik:

$$\sigma^2(k) = \sigma_{xx}^2(k) + \sigma_e^2 E_\varphi + N^2 \sigma_\rho^2 + N \sigma_\mu^2. \quad (\text{III.155})$$

Prethodni rezultat je dobijen prepostavljajući izvršavanje aritmetičkih operacija konvencionalnom DFT aritmetikom. Suprotno tome, aritmetičke operacije se najčešće vrše razvijenim FFT algoritmima. Krajnji rezultati, međutim, ostaju nepromijenjeni. Upotrebljavajući, na primjer, algoritam razbijanja po vremenu (*decimation-in-time* algoritam), [105], samo posljednja komponenta prethodne jednačine uzima različitu vrijednost, $(N-1)\sigma_\mu^2 \geq N\sigma_\mu^2$.

Kada vrijednosti analiziranog signala $f(n)$ nijesu dovoljno male, potrebno je obezbijediti sistem od neželjenog prekoračenja dozvoljenog dinamičkog opsega registara. Pretpostavljajući da se odbirci analiziranog signala nalaze u opsegu $[0,1]$, možemo primijeniti jedan od sljedećih metoda (2. ili 3.) za proračun mogućeg overflowa.

2. U cilju prevazilaženja efekta prekoračenja dinamičkog opsega registara predlažemo dijeljenje analiziranog signala koeficijentom $C = \sqrt{\sum_{i=-L}^{L-1} \sum_{m=-L}^{L-1} |\varphi(m, i)|}$. U ovom slučaju varijansa modela (III.154) ima oblik:

Tabela III.3. Varijansa, NSR odnos i projektovana dužina registara kod Cohenove klase distribucija uz pretpostavku dovoljno malog analiziranog signala, tako da ne može doći do prekoračenja dinamičkog opsega registara

Slučajni signal	Deterministički signal
$\sigma^2(k) = [(\sigma_f^2 + \sigma_c^2/2)^2 + \sigma_c^2]E_\varphi + (N^2 + N)\sigma_c^2$	$\overline{\sigma^2(k)} = [(2A^2 + \sigma_c^2/2)\sigma_c^2/2 + \sigma_c^2]E_\varphi + (N^2 + N)\sigma_c^2$
$NSR \cong \frac{\sigma_c^2}{\sigma_f^2} + \frac{\sigma_c^2}{\sigma_f^4} + \frac{(N^2 + N)\sigma_c^2}{\sigma_f^4 E_\varphi} \cong \frac{N^2 \sigma_c^2}{\sigma_f^4 E_\varphi}$	$SNR_{\max} \cong \frac{N^2 A^4}{(A^2 + 1)\sigma_c^2 E_\varphi + (N^2 + N)\sigma_c^2} \cong \frac{A^4}{\sigma_c^2}$
$b \cong v - 0.8 + \frac{1}{6.02} \{SNR[dB] - 10 \log(E_\varphi) - 20 \log(\sigma_f^2)\}$	$b \cong \frac{1}{6.02} \{SNR_{\max}[dB] - 40 \log(A)\} - 0.8$

Tabela III.4. Varijansa, NSR odnos i projektovana dužina registara kod Cohenove klase distribucija

kada je analizirani signal skaliran odgovarajućim faktorom na ulazu

Slučajni signal	Deterministički signal
$\sigma^2(k) = [\frac{1}{C^4} (\sigma_f^2 + \sigma_c^2/2)^2 + \sigma_c^2]E_\varphi + (N^2 + N)\sigma_c^2$	$\overline{\sigma^2(k)} = [\frac{1}{C^4} (2A^2 + \sigma_c^2/2)\sigma_c^2/2 + \sigma_c^2]E_\varphi + (N^2 + N)\sigma_c^2$
$NSR \cong \frac{\sigma_c^2}{\sigma_f^2} + \frac{C^4 \sigma_c^2}{\sigma_f^4} + \frac{C^4 (N^2 + N)\sigma_c^2}{\sigma_f^4 E_\varphi} \cong \frac{C^4 N^2 \sigma_c^2}{\sigma_f^4 E_\varphi}$	$SNR_{\max} \cong \frac{N^2 A^4 / C^4}{(A^2 / C^4 + 1)\sigma_c^2 E_\varphi + (N^2 + N)\sigma_c^2} \cong \frac{A^4}{C^4 \sigma_c^2}$
$b \cong v - 0.8 + \frac{1}{6.02} \{SNR[dB] - 10 \log(\frac{E_\varphi}{C^4}) - 20 \log(\sigma_f^2)\}$	$b \cong \frac{1}{6.02} \{SNR_{\max}[dB] - 40 \log(A) + 40 \log(C)\} - 0.8$

Tabela III.5. Varijansa, NSR odnos i projektovana dužina registara kod Cohenove klase distribucija

uz upotrebu FFT algoritama sa faktorima skaliranja 1/2

Slučajni signal	Deterministički signal
$\sigma^2(k) = \frac{1}{N^2} [(\sigma_f^2 + \sigma_c^2/2)^2 + \sigma_c^2]E_\varphi + 5\sigma_c^2$	$\overline{\sigma^2(k)} = \frac{1}{N^2} [(2A^2 + \sigma_c^2/2)\sigma_c^2/2 + \sigma_c^2]E_\varphi + 5\sigma_c^2$
$NSR \cong \frac{\sigma_c^2}{\sigma_f^2} + \frac{\sigma_c^2}{\sigma_f^4} + \frac{5N^2 \sigma_c^2}{\sigma_f^4 E_\varphi} \cong \frac{5N^2 \sigma_c^2}{\sigma_f^4 E_\varphi}$	$SNR_{\max} \cong \frac{N^2 A^4}{(A^2 + 1)\sigma_c^2 E_\varphi + 5N^2 \sigma_c^2} \cong \frac{A^4}{5\sigma_c^2}$
$b \cong v + 0.3685 + \frac{1}{6.02} \{SNR[dB] - 10 \log(E_\varphi) - 20 \log(\sigma_f^2)\}$	$b \cong \frac{1}{6.02} \{SNR_{\max}[dB] - 40 \log(A)\} - 0.3685$

$$\sigma^2(k) = \sigma_{xx}^2(k) / C^4 + \sigma_e^2 E_\varphi + N^2 \sigma_\rho^2 + N \sigma_\mu^2. \quad (\text{III.156})$$

3. Upotrebljavajući faktore skaliranja 1/2 u svim stepenima FFT algoritma, [105], prevazilaze se efekti overflowa. Svi signali na ulazu FFT bloka, generalisana autokorelaciona funkcija $r_x(n,i)$, kao i izvori šuma $e(n)$ i $\rho(n)$, skaliraju se faktorom N na njegovom izlazu. Istovremeno je neophodno zaštititi se od efekata overflowa prilikom proračuna generalisane autokorelace funkcije, predstavljene jednačinom (III.154), drugi izraz. U tom cilju se analizirani signal skalira faktorom $C_1 = \sqrt{\max_i \sum_{m=-L}^{L-1} |\varphi(m,i)|}$. U slučaju posmatranih RID distribucija, koje zadovoljavaju frekvenčni marginalni uslov, jednostavno se pokazuje da je: $C_1 = \sqrt{\sum_{m=-L}^{L-1} |\varphi(m,0)|} = 1$. Drugim riječima, u ovom slučaju se varijansa modela (III.154) može predstaviti sljedećom jednačinom:

$$\sigma^2(k) = \frac{1}{N^2} (\sigma_{xx}^2(k) + \sigma_e^2 E_\varphi) + \sigma_\rho^2 + 4\sigma_\mu^2. \quad (\text{III.157})$$

Posmatrajmo, kao i ranije (slučaj aritmetike sa pomicnom tačkom), slučajni i deterministički oblik analiziranog signala $f(n)$.

A. Slučajni signal $f(n)$

Uz pretpostavku slučajnog, bijelog, uniformno distribuiranog signala $f(n)$, u Tabelama III.3., III.4., III.5. su predstavljeni varijansa modela (III.155)-(III.157), NSR odnos, kao i fundamentalna zavisnost dužine registra b od SNR odnosa i trajanja analiziranog signala $N = 2^v$. Greška učinjena aproksimacijom, kod proračuna NSR odnosa (za $\sigma_f^2 = 1$, $N = 512$ i $b = 16$) je, u slučaju posmatranih distribucija, reda veličine 0.1% i 0.001%, respektivno. Izrazi za određivanje dužine upotrijebljenih registara se mogu upotrijebiti u hardverskoj realizaciji pomenutih TF metoda. Na primjer, pretpostavljajući $N = 512$ ($v = 9$), $\sigma_f^2 = 1$ i $SNR[dB] \geq 80dB$, dobijamo odgovarajuće veličine registara određene brojem bita $b = 20$, $b = 25$ i $b = 21$, respektivno. Dobijeni rezultati su valjani za sve posmatrane RID distribucije koje zadovoljavaju marginalni uslov po frekvenciji. Napomenimo da je u ovom slučaju sa b predstavljen dinamički opseg registara, slično kao u slučaju aritmetike sa pomicnom tačkom. Međutim, u ovom slučaju je sa b označen broj bita neophodnih za predstavljanje apsolutne vrijednosti odbirka analiziranog signala.

B. Deterministički signal $f(n)$

U Tabelama III.3., III.4. i III.5. su predstavljene srednje vrijednosti izraza (III.155)-(III.157), u slučaju determinističkog FM signala $f(n) = A \exp(j\psi(n))$. Takođe su dati izrazi za SNR_{\max} (u slučaju sinusoidalnog signala i distribucija koje zadovoljavaju marginalni uslov po vremenu) i međusobna zavisnost dinamičkog opsega upotrijebljenih registara (opisanih sa b) i željenog kvaliteta reprezentacije, SNR_{\max} . Izrazi su predstavljeni u sljedećim slučajevima: implementacije konvencionalnih DFT (aproksimativno i FFT) algoritama i implementacije skaliranih FFT algoritama

(algoritmi koji upotrebljavaju faktore $1/2$ u svim svojim stepenima, [105]). Prilikom određivanja SNR_{\max} odnosa, u slučaju analizira-nih TF metoda i uz pretpostavku da je $A = 1/2$, $N = 512$ i $b = 16$, dobijamo grešku aproksimacije reda veličine 0.1% i 0.001% , respektivno. Iz izraza za SNR_{\max} , jednostavno možemo odrediti veličinu registara za željeni kvalitet predstavljanja. Na primjer, za $A = 1$, $N = 512$ i $SNR_{\max}[dB] \geq 80dB$, dobijamo $b = 13$, $b = 18$ i $b = 14$, respektivno (Tabela III.3., Tabela III.4. i Tabela III.5.), u slučaju svih posmatranih distribucija iz RID klase.

IV

ESTIMACIJA TRENUTNE FREKVENCije PRIMJENOM VREMENSKO-FREKVencijskih DISTRIBUCIJA

Estimacije trenutne frekvencije (IF) je veoma značajna oblast istraživanja u obradi signala, [16], [17], [35]-[37]. Postoji više načina za njeno određivanje. Jedan od njih je baziran na vremensko-frekvencijskim distribucijama, [16], [17], [35]-[37], [68], [80]-[85], [149], [153]-[156] i njemu će se u ovoj glavi posvetiti cijelokupna pažnja. Osnova za upotrebu distribucija u estimaciji trenutne frekvencije je njihova osobina prvog momenta, tabela I.1., [17], [117] i poglavlje I.2.. Prvi moment vremensko-frekvencijskih metoda (po frekvenciji) daje pouzdanu definiciju trenutne frekvencije u slučaju nestacionarnih signala. Vremensko-frekvencijske distribucije, upotrijebljene za pronalaženje trenutne frekvencije kao svog prvog momenta, daju procijenjenu vrijednost bez sistematske greške (*unbiased* estimacija). Prisustvo šuma, međutim, vodi kompromitaciji estimacije prvog momenta uslijed nedostatka bilo kakvog usrednjavanja u njenoj definiciji. Drugim riječima, prvi moment može imati visoku statističku varijansu čak i za veoma visok odnos signal-šum na ulazu sistema, [117]. Međutim, TF metodi koncentrišu energiju posmatranog signala na i oko njegove trenutne frekvencije, [17], [35], [117]. Stoga se određivanje maksimuma TF reprezentacije, kao estimacija trenutne frekvencije signala, koristi kao prirodna alternativa određivanju trenutne frekvencije pronalaženjem prvog momenta distribucije.

Estimacija trenutne frekvencije pronalaženjem maksimuma TF distribucije je analizirana u [69], [80]-[85], [149]-[153], [156]. Do sada su razmatrane samo najznačajnije i najčešće upotrebljavane distribucije iz Cohenove klase, Wignerova distribucija (WD) za slučaj linearog FM signala, i spektrogram kod signala čija se frekvencija može smatrati konstantnom. Pokazuje se da je, u slučaju signala maskiranih šumom, estimirana trenutna frekvencija veoma

zavisna od odnosa signal-šum, kao i od širine lag-prozora upotrebljavanog u definiciji TF metoda. Takođe je određena optimalna širina lag-prozora kompromisnim izborom među veličinama statističkih pokazatelja (bias i varijansa) estimatora trenutne frekvencije. Međutim, pokazuje se da analitičkim putem dobijena optimalna vrijednost zavisi od estimirane trenutne frekvencije i njenih viših izvoda, što je čini praktično neupotrebljivom. U tom cilju se razvija algoritam za određivanje promjenljive širine prozora isključivo na osnovu poznavanja varijanse estimatora, [153], [154].

U ovoj glavi ćemo predstaviti opštu analizu baziranu na proizvoljnoj kvadratnoj distribuciji, kao estimatoru trenutne frekvencije bilo kog FM signala. Izvest ćemo izraze za bias i varijansu estimatora trenutne frekvencije. Kada je trenutna frekvencija nelinearna funkcija vremena, tada se njena estimacija vrši sa određenom sistematskom greškom (tzv. *biased* estimacija) prilikom implementacije kvadratnih distribucija iz Cohenove klase, dok se ona ponaša kao unbiased procjena u slučaju signala sa linearnom trenutnom frekvencijom. Izvedeni su izrazi za varijansu estimatora trenutne frekvencije u slučajevima bijelog stacionarnog i bijelog nestacionarnog šuma. Kao specijalni slučajevi generalne analize izvedeni su odgovarajući izrazi u slučaju najčešće upotrebljavanih TF metoda. Predstavljeni su dobro poznati rezultati u slučaju WD i linearog FM signala, kao i u slučaju spektrograma signala čija se trenutne frekvencija može smatrati konstantnom. Uz to, izведен je izraz za varijansu estimatora kod spektrograma linearog FM signala. Dobijeni izraz je veoma jednostavan, ali, istovremeno, visoko zavisao od oblika analiziranog signala. Ovaj signal je posmatran i analiziran i u slučaju drugih često upotrebljavanih distribucija, kao što su Choi-Williamsova i Born-Jordanova distribucija. Pokazat ćemo da distribucije iz RID klase pokazuju bolje statističke karakteristike od WD, međutim samo u slučaju signala konstantne trenutne frekvencije ili signala sa malim promjenama trenutne frekvencije. Međutim, u slučaju veoma nestacionarnih signala, Wignerovom distribucijom se dobijaju značajno bolji rezultati. Napomenimo da, analogno ovoj analizi, može biti analiziran uticaj konačne dužine registara, zamjenom malog aditivnog šuma – greškom kvantizacije.

IV.1. TEORIJSKA POZADINA I DEFINICIJA PROBLEMA

Posmatrajmo diskretne opservacije,

$$x(nT) = f(nT) + \varepsilon(nT), f(t) = A(t) \exp(j\phi(t)) \quad (\text{IV.1})$$

analiziranog kontinualnog signala $f(t)$, sporopromjenljive amplitude $A(t)$. U (IV.1) su n cio broj, T period odabiranja i $\varepsilon(nT)$ bijeli šum. Po definiciji, [17], trenutna frekvencija je prvi izvod faze analiziranog signala,

$$\omega(t) = \phi^{(1)}(t) \equiv \frac{d\phi(t)}{dt}. \quad (\text{IV.2})$$

Pretpostavimo da je $\omega(t)$ proizvoljna glatka, diferencijabilna funkcija vremena, sa ograničenim izvodima,

$$|\omega^{(r)}(t)| = |\phi^{(r+1)}(t)| \leq M_r(t), r \geq 1.$$

Opšti oblik proizvoljne kvadratne distribucije, u diskretnom domenu, se definiše sljedećim izrazom:

$$CD_x(t, \omega; \varphi_h) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \varphi_h(mT, nT) x(t + mT + nT) x^*(t + mT - nT) e^{-j2\omega nT}, \quad (\text{IV.3})$$

gdje su $\varphi_h(mT, nT) = (T/h)^2 \varphi(mT/h, nT/h)$ i $\varphi(t, \tau)$ simetrična funkcija jezgra, definisana u TL domenu. Pretpostavimo da $\varphi(t, \tau)$ ima ograničeno trajanje duž t i τ pravaca, $\varphi(t, \tau) = 0$, za $|t| < 1/2$ i $|\tau| < 1/2$. Drugim riječima, pretpostavimo da $\varphi_h(mT, nT)$ ima konačnu dužinu duž oba pravca, označenu sa h , $h > 0$. h se upotrebljava u definiciji Cohenove klase distribucija u cilju lokalizovanja tražene procjene. Kao posljedica uvedene pretpostavke, posmatrane distribucije se mogu nazivati svojim pseudo oblicima.

Analizirajmo Cohenovu klasu distribucija signala $f(t)$. Upotrebljavajući činjenicu da je analizirani signal спропромјенијиве amplitude unutar jezgra $\varphi_h(mT, nT)$, $f(t + mT \pm nT) \varphi_h(mT, nT) \cong A(t) \exp[j\phi(t + mT \pm nT)] \varphi_h(mT, nT)$, te razvijajući $\phi(t + mT \pm nT)$ u Taylorov red u okolini t (do člana sa trećim stepenom u razvoju reda), dobijamo:

$$CD_f(t, \omega; \varphi_h) = |A(t)|^2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \varphi_h(mT, nT) \exp(-j[2(\omega - \phi^{(1)}(t))(nT) - 2\phi^{(2)}(t)(mT)(nT) - \Delta\phi(t, mT, nT)]) \quad (\text{IV.4})$$

gdje je $\Delta\phi(t, mT, nT)$ ostatak faze, koji se može predstaviti u jednom od sljedeća dva oblika:

$$\Delta\phi(t, mT, nT) = \sum_{s=3}^{\infty} \frac{\phi^{(s)}(t)}{s!} \sum_{k=0}^s \binom{s}{k} (mT)^{s-k} (nT)^k [1 - (-1)^k], \quad (\text{IV.5})$$

$$\Delta\phi(t, mT, nT) = \frac{(mT + nT)^3}{3!} \phi^{(3)}(t + \tau_1) - \frac{(mT - nT)^3}{3!} \phi^{(3)}(t + \tau_2), \quad (\text{IV.6})$$

sa $0 < \tau_1 \leq (mT + nT)$ i $0 < \tau_2 \leq (mT - nT)$. Primjetimo da kvadratne distribucije iz Cohenove klase imaju maksimum u tački $\omega = \phi^{(1)}(t)$, ukoliko viši izvodi faze analiziranog signala (počev od drugog) uzimaju nulte vrijednosti, $\phi^{(s)}(t) = 0$ za $s \geq 2$. Saglasno ovom zaključku, estimacija trenutne frekvencije može biti definisana kao rješenje sljedećeg problema:

$$\hat{\omega}_h(t) = \arg[\max_{\omega \in Q_\omega} \{CD_x(t, \omega; \varphi_h)\}], \quad (\text{IV.7})$$

gdje je $Q_\omega = \{\omega : 0 \leq \omega < \pi/(2T)\}$ osnovni frekvencijski interval. Greška učinjena procjenom (IV.7), u trenutku t , je:

$$\Delta\hat{\omega}_h(t) = \omega(t) - \hat{\omega}_h(t). \quad (\text{IV.8})$$

IV.2. ANALIZA GREŠKE ESTIMACIJE

Pošto se trenutna frekvencija analiziranog signala $\hat{\omega}_h(t)$ definiše u stacionarnoj tački distribucije $CD_x(t, \omega; \varphi_h)$, ona je određena nultom vrijednošću derivacije $\partial CD_x(t, \omega; \varphi_h) / \partial \omega$. Linearizacijom $\partial CD_x(t, \omega; \varphi_h) / \partial \omega = 0$ po:

1) Maloj grešci estimacije, $\Delta\hat{\omega}_h(t)$,

2) Ostatku faze signala, $\Delta\phi(t, mT, nT)$,

3) Šumu ε , i

4) Kvadratu šuma ε^2 , dobijamo:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial CD_x(t, \omega; \varphi_h)}{\partial \omega} \Big|_0 + \frac{\partial^2 CD_x(t, \omega; \varphi_h)}{\partial \omega^2} \Big|_0 \Delta\hat{\omega}_h(t) + \frac{\partial CD_x(t, \omega; \varphi_h)}{\partial \omega} \Big|_0 \Delta\delta_{\Delta\phi} + \\ & + \frac{\partial CD_x(t, \omega; \varphi_h)}{\partial \omega} \Big|_0 \delta_\varepsilon + \frac{\partial CD_x(t, \omega; \varphi_h)}{\partial \omega} \Big|_0 \delta_{\varepsilon^2} = 0, \end{aligned} \quad (\text{IV.9})$$

gdje je sa $|_0$ označena činjenica da se $\partial C_x(t, \omega; \varphi_h) / \partial \omega$ izračunava u tački $\omega = \phi^{(1)}(t)$, $\varepsilon = 0$ i $\Delta\phi(t, mT, nT) = 0$.

Posljednja tri sabirka u prethodnoj jednačini predstavljaju promjene $\partial CD_x(t, \omega; \varphi_h) / \partial \omega$ uzrokovane promjenama $\Delta\phi(t, mT, nT)$, ε i ε^2 , respektivno. Prilikom izračunavanja, na primjer, $\frac{\partial CD_x(t, \omega; \varphi_h)}{\partial \omega} \Big|_0 \Delta\delta_{\Delta\phi}$, prepostavljamo da

ostala tri poremećaja, uzrokovana šumom $\varepsilon(nT)$, kvadratom šuma $\varepsilon^2(nT)$ i promjenama frekvencije $\Delta\hat{\omega}$, mogu biti

zanemarena, te da postoje samo male promjene faze $\Delta\phi(t, mT, nT)$,

$$\begin{aligned} & \frac{\partial CD_x(t, \omega; \varphi_h)}{\partial \omega} \Big|_0 \delta_{\Delta\phi} \equiv \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \varphi_h(mT, nT) f(t + mT + nT) f^*(t + mT - nT) (-j2nT) e^{-j2\phi^{(1)}(t)(nT)} \\ & = -j2CD_f(t, \phi^{(1)}(t); \varphi_{h_1}), \end{aligned} \quad (\text{IV.10})$$

gdje je $\varphi_{h_1}(mT, nT) = \varphi_h(mT, nT)(nT)$. Na isti način se mogu dobiti ostali sabirci iz (IV.9),

$$\begin{aligned} & \frac{\partial CD_x(t, \omega; \varphi_h)}{\partial \omega} \Big|_0 = |A(t)|^2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \varphi_h(mT, nT) (-j2nT) e^{j2\phi^{(2)}(t)(mT)(nT)} = 0, \\ & \frac{\partial^2 CD_x(t, \omega; \varphi_h)}{\partial \omega^2} \Big|_0 = -4CD_f(t, \phi^{(1)}(t); \varphi_{h_2}), \\ & \frac{\partial CD_x(t, \omega; \varphi_h)}{\partial \omega} \Big|_0 \delta_{\Delta\phi} = -2jCD_f(t, \phi^{(1)}(t); \varphi_{h_1}), \\ & \frac{\partial CD_x(t, \omega; \varphi_h)}{\partial \omega} \Big|_0 \delta_{\varepsilon^2} = -2jCD_\varepsilon(t, \phi^{(1)}(t); \varphi_{h_1}), \end{aligned} \quad (\text{IV.11})$$

gdje je $\varphi_{h_2}(mT, nT) = \varphi_h(mT, nT)(nT)^2$.

Sabirak $\frac{\partial CD_x(t, \omega; \varphi_h)}{\partial \omega}|_0 \delta_\varepsilon$ ćemo predstaviti odvojeno. Jednakost $\frac{\partial CD_x(t, \omega; \varphi_h)}{\partial \omega}|_0 = 0$ je posljedica simetrije funkcije

jezgra $\varphi_h(mT, nT)$. Uvodeći odgovarajuću notaciju:

$$Q_h = \frac{\partial CD_x(t, \omega; \varphi_h)}{\partial \omega}|_0 \delta_\varepsilon + \frac{\partial CD_x(t, \omega; \varphi_h)}{\partial \omega}|_0 \delta_{\varepsilon^2},$$

grešku estimacije možemo predstaviti u sljedećem obliku:

$$\Delta \hat{\omega}_h(t) = \frac{Q_h - 2jCD_f(t, \phi^{(1)}(t); \varphi_{h_1})}{4CD_f(t, \phi^{(1)}(t); \varphi_{h_2})}. \quad (\text{IV.12})$$

U cilju pronalaženja egzaktne vrijednosti varijanse estimatora trenutne frekvencije, sabirak $\frac{\partial CD_x(t, \omega; \varphi_h)}{\partial \omega}|_0 \delta_\varepsilon$ će biti razvijan polazeći od iner-product oblika Cohenove klase distribucija, [42] i poglavlje III.3.:

$$CD_x(t, \omega; \varphi_h) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \tilde{\varphi}_h(mT, nT) [x(t+mT)e^{-j\omega mT}] [x(t+nT)e^{-j\omega nT}]^*, \quad (\text{IV.13})$$

gdje je $\tilde{\varphi}_h(mT, nT) = \varphi_h((mT+nT)/2, (mT-nT)/2)$ i:

$$\begin{aligned} \frac{\partial CD_x(t, \omega; \varphi_h)}{\partial \omega}|_0 \delta_\varepsilon &= j \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \tilde{\varphi}_h(mT, nT)(nT-mT) \times \\ &\times [f(t+mT)\varepsilon^*(t+nT) + f^*(t+nT)\varepsilon(t+mT)]e^{-j\phi^{(1)}(t)(m-n)T}. \end{aligned} \quad (\text{IV.14})$$

Jednostavno je zaključiti da je u slučaju bijelog šuma $\varepsilon(nT)$: $E\left\{\frac{\partial CD_x(t, \omega; \varphi_h)}{\partial \omega}|_0 \delta_\varepsilon\right\} = E\left\{\frac{\partial CD_x(t, \omega; \varphi_h)}{\partial \omega}|_0 \delta_{\varepsilon^2}\right\} = 0$, kao i $E\{Q_h\} = 0$. Prethodni zaključci su posljedica sljedeće činjenice: $E\{CD_\varepsilon(t, \phi^{(1)}(t); \varphi_{h_1})\} = 0$. Drugim riječima, bias i varijansa estimatora trenutne frekvencije mogu biti predstavljeni u sljedećim oblicima:

$$E\{\Delta \hat{\omega}_h(t)\} = \frac{-jCD_f(t, \phi^{(1)}(t); \varphi_{h_1})}{2CD_f(t, \phi^{(1)}(t); \varphi_{h_2})}, \quad (\text{IV.15})$$

$$\text{var}\{\Delta \hat{\omega}_h(t)\} = \frac{\text{var}\{Q_h\}}{16|CD_f(t, \phi^{(1)}(t); \varphi_{h_2})|^2}. \quad (\text{IV.16})$$

Primijetimo da u slučaju linearog FM signala, $f(t) = A(t)\exp(jat^2/2)$, estimator trenutne frekvencije ima *nužnu* sistematsku grešku (*unbiased* estimator), $E\{\Delta \hat{\omega}_h(t)\} = 0$. Naime, posljedica pretpostavljene simetričnosti funkcije jezgra $\varphi_h(mT, nT)$ je:

$$CD_f(t, \phi^{(1)}(t); \varphi_{h_1}) = |A(t)|^2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \varphi_h(mT, nT)(nT)e^{j2a(mT)(nT)} = 0. \quad (\text{IV.17})$$

Izvedimo, sada, izraze za varijansu i bias estimatora trenutne frekvencije, date opštim izrazima (IV.15)-(IV.16).

Varijansa estimatora trenutne frekvencije

Posmatrajmo nestacionarni, kompleksni, bijeli, Gaussov šum $\varepsilon(nT)$ sa autokorelacijom $R_{\varepsilon\varepsilon}(t + mT, t + nT) =$

$$I(t + mT)\delta(m - n), I(t) \geq 0. \text{ Stacionarni šum } \varepsilon(nT) \text{ se dobija kao specijalni slučaj nestacionarnog šuma, } I(t) = \sigma_\varepsilon^2.$$

Tvrđenje 1: Neka je $\hat{\omega}_h(t)$ rješenje jednačine (IV.7). U slučaju male greške estimacije i analize proizvoljnog FM signala $f(t) = A(t) \exp(j\phi(t))$, varijansa estimatora trenutne frekvencije može biti predstavljena u obliku:

$$\text{var}\{\Delta\hat{\omega}_h(t)\} = \frac{2CD_I(t, 0; |\varphi_{h_1}|^2) + CD_f(t, \phi^{(1)}(t); -\|\tilde{\Psi}_h\| \|I(t)\| \|\tilde{\Psi}_h\|^*)}{8|CD_f(t, \phi^{(1)}(t); \varphi_{h_2})|^2}, \quad (\text{IV.18})$$

gdje je $CD_f(t, \phi^{(1)}(t); -\|\tilde{\Psi}_h\| \|I(t)\| \|\tilde{\Psi}_h\|^*)$ kvadratna distribucija (sa novom funkcijom jezgra $-\|\tilde{\Psi}_h\| \|I(t)\| \|\tilde{\Psi}_h\|^*$) analiziranog signala $f(t)$, na frekvenciji $\omega = \phi^{(1)}(t)$, kao i $\|\tilde{\Psi}_h\| = \|A_{n-m}\| \cdot * \|\tilde{\varphi}_h\|$. U prethodnom izrazu je sa $\|\tilde{\varphi}_h\|$ označena matrica sa elementima $\tilde{\varphi}_h(mT, nT)$, dok je sa $\|A_{n-m}\|$ označena matrica sa elementima $A(m, n) = n - m$, $m, n = 1, 2, \dots, N$ (sa N su predstavljene pretpostavljene konačne granice promjenljivih m, n). Operator $\cdot *$ označava elemenat-po-elemenat matričnu multiplikativnu formu. Matrica $\|I(t)\| = \|I(t + nT)\delta_{m,n}\|$ je dijagonalna sa elementima $I(t + nT)$. Takođe, sa $CD_I(t, 0; |\varphi_{h_1}|^2)$ je predstavljena kvadratna distribucija signala $I(t)$ sa novom funkcijom jezgra $|\varphi_{h_1}(mT, nT)|^2$, $\varphi_{h_1}(mT, nT) = \varphi_h(mT, nT)(nT)$.

Specijalni slučaj: Linearni FM signal $f(t) = A(t) \exp(jat^2/2)$ maskiran stacionarnim, bijelim, Gaussovim šumom, proizvodi varijansu estimatora trenutne frekvencije

$$\text{var}\{\Delta\hat{\omega}_h(t)\} = \sigma_\varepsilon^2 \frac{2\sigma_\varepsilon^2 W_h + CD_f(0, 0; -\|\tilde{\Psi}_h\|^2)}{8|CD_f(0, 0; \varphi_{h_2})|^2}, \quad (\text{IV.19})$$

gdje je:

$$W_h = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} |\varphi_h(mT, nT)|^2 (nT)^2. \quad (\text{IV.20})$$

Dokaz:

Polazeći od osobina Gaussovog šuma $\varepsilon(nT)$, [108], jednostavno se može zaključiti da važi:

$$\text{var}\{Q_h\} = \text{var}\left\{\frac{\partial CD_x(t, \omega; \varphi_h)}{\partial \omega}|_0 \delta_\varepsilon\right\} + \text{var}\left\{\frac{\partial CD_x(t, \omega; \varphi_h)}{\partial \omega}|_0 \delta_{\varepsilon^2}\right\}. \quad (\text{IV.21})$$

Prvi član iz (IV.21) je dominantno zavisan od analiziranog signala i šuma. Drugi član je nezavisan od signala i vremensko-frekvencijski je nepromjenljiv u slučaju stacionarnog šuma, [149], [151]-[155], [157], [158]. U slučaju bijelog, kompleksnog, Gaussovog šuma $\varepsilon(nT)$, [108], drugi član iz (IV.21) može biti predstavljen u sljedećem opštem obliku:

$$\begin{aligned} \text{var}\left\{\frac{\partial CD_x(t, \omega; \phi_h)}{\partial \omega}\right|_0 \delta_{\varepsilon^2}\} &= 4 \sum_{n_1=-\infty}^{\infty} \sum_{n_2=-\infty}^{\infty} \sum_{m_1=-\infty}^{\infty} \sum_{m_2=-\infty}^{\infty} \phi_h(m_1 T, n_1 T) \phi_h^*(m_2 T, n_2 T) \times \\ &\quad \times [R_{\varepsilon\varepsilon}(t + m_1 T + n_1 T, t + m_1 T - n_1 T) R_{\varepsilon\varepsilon}^*(t + m_2 T + n_2 T, t + m_2 T - n_2 T) + \\ &\quad + R_{\varepsilon\varepsilon}(t + m_1 T + n_1 T, t + m_2 T + n_2 T) R_{\varepsilon\varepsilon}^*(t + m_1 T - n_1 T, t + m_2 T - n_2 T)](n_1 T)(n_2 T) e^{-j2\phi^{(1)}(t)(n_1 T - n_2 T)}, \end{aligned} \quad (\text{IV.22})$$

gdje je $R_{\varepsilon\varepsilon}(t + mT, t + nT) = E\{\varepsilon(t + mT)\varepsilon^*(t + nT)\}$ autokorelaciona funkcija aditivnog šuma $\varepsilon(nT)$.

Specijalni slučaj 1: Nestacionarni, bijeli, kompleksni šum, $R_{\varepsilon\varepsilon}(t + mT, t + nT) = I(t + mT)\delta(m - n)$, $I(t) \geq 0$. U ovom slučaju dobijamo:

$$\begin{aligned} \text{var}\left\{\frac{\partial CD_x(t, \omega; \phi_h)}{\partial \omega}\right|_0 \delta_{\varepsilon^2}\} &= 4 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} |\phi_h(mT, nT)|^2 (nT)^2 I(t + mT + nT) I^*(t + mT - nT), \\ &= 4CD_I(t, 0; |\phi_h|^2). \end{aligned} \quad (\text{IV.23})$$

Drugim riječima, varijansa $\text{var}\left\{\frac{\partial CD_x(t, \omega; \phi_h)}{\partial \omega}\right|_0 \delta_{\varepsilon^2}\}$ može biti predstavljena kvadratnom distribucijom signala $I(t)$,

sa novom funkcijom jezgra $|\phi_{h_l}(mT, nT)|^2$.

Specijalni slučaj 2: Stacionarni, kompleksni, bijeli šum, $I(t) = \sigma_{\varepsilon}^2$. U ovom slučaju imamo:

$$\text{var}\left\{\frac{\partial CD_x(t, \omega; \phi_h)}{\partial \omega}\right|_0 \delta_{\varepsilon^2}\} = 4\sigma_{\varepsilon}^2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} |\phi_h(mT, nT)|^2 (nT)^2 = 4\sigma_{\varepsilon}^2 W_h. \quad (\text{IV.24})$$

Primjetimo da se, za $h \rightarrow 0$, $T \rightarrow 0$ i $h/T \rightarrow \infty$, W_h redukuje na sljedeći oblik:

$$W_h \rightarrow T^2 W = T^2 \int_{-1/2}^{1/2} \int_{-1/2}^{1/2} |\phi(t, \tau)|^2 \tau^2 dt d\tau. \quad (\text{IV.25})$$

Primjetimo da W zavisi samo od obička funkcije jezgra $\phi(t, \tau)$.

Prva komponenta iz (IV.21), za realnu i simetričnu funkciju jezgra $\phi_h(mT, nT)$, može biti predstavljena sa:

$$\begin{aligned} \text{var}\left\{\frac{\partial CD_x(t, \omega; \phi_h)}{\partial \omega}\right|_0 \delta_{\varepsilon}\} &= \sum_{n_1=-\infty}^{\infty} \sum_{n_2=-\infty}^{\infty} \sum_{m_1=-\infty}^{\infty} \sum_{m_2=-\infty}^{\infty} \tilde{\phi}_h(m_1 T, n_1 T) \tilde{\phi}_h^*(m_2 T, n_2 T) \times \\ &\quad \times (n_1 T - m_1 T)(n_2 T - m_2 T) e^{-j\phi^{(1)}(t)(m_1 T - m_2 T)} e^{-j\phi^{(1)}(t)(n_2 T - n_1 T)} \times \\ &\quad \times [f(t + m_1 T)f^*(t + m_2 T) R_{\varepsilon\varepsilon}^*(t + n_1 T, t + n_2 T) + f^*(t + n_1 T)f(t + n_2 T) R_{\varepsilon\varepsilon}(t + m_1 T, t + m_2 T)]. \end{aligned} \quad (\text{IV.26})$$

Primjenjujući jednostavnu činjenicu da je: $\tilde{\varphi}_h(m_1T, nT) = \tilde{\varphi}_h(nT, m_1T)$, kao i $R_{\epsilon\epsilon}(t + mT, t + nT) = I(t + mT)R_{\epsilon\epsilon}(m - n)R_{\epsilon\epsilon}(m - n)$, $I(t) \geq 0$, (IV.26) uproščavamo do izraza:

$$\begin{aligned} \text{var}\left\{\frac{\partial CD_x(t, \omega; \varphi_h)}{\partial \omega}\right|_0 \delta_\epsilon\} &= 2 \sum_{m_1=-\infty}^{\infty} \sum_{m_2=-\infty}^{\infty} \tilde{\Phi}_h(m_1T, m_2T) [f(t + m_1T)e^{-j\phi^{(1)}(t)m_1T}] [f(t + m_2T)e^{-j\phi^{(1)}(t)m_2T}]^* \\ &= 2CD_f(t, \phi^{(1)}(t), \Phi_h), \end{aligned} \quad (\text{IV.27})$$

gdje je $CD_f(t, \phi^{(1)}(t), \Phi_h)$ kvadratna distribucija analiziranog signala $f(t)$, na trenutnoj frekvenciji, $\omega = \phi^{(1)}(t)$.

Kvadratna distribucija je sa novom funkcijom jezgra $\tilde{\Phi}_h(m_1T, m_2T) = \Phi_h((m_1 + m_2)T/2, (m_1 - m_2)T/2)$. Primijetimo da, u slučaju linearog FM signala $f(t) = A(t)\exp(jat^2/2)$, važi: $CD_f(t, \phi^{(1)}(t), \Phi_h) = CD_f(0, 0, \Phi_h)$. Opšti oblik nove funkcije jezgra $\tilde{\Phi}_h(m_1T, m_2T)$ je:

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi}_h(m_1T, m_2T) &= \sum_{n_1=-\infty}^{\infty} \sum_{n_2=-\infty}^{\infty} \tilde{\varphi}_h(m_1T, n_1T) \tilde{\varphi}_h^*(m_2T, n_2T) (n_1T - m_1T)(n_2T - m_2T) \times \\ &\quad \times I(t + n_2T) R_{\epsilon\epsilon}(n_2 - n_1) e^{-j\phi^{(1)}(t)(n_2T - n_1T)}. \end{aligned} \quad (\text{IV.28})$$

Specijalni slučaj 1: Stacionarni, bijeli, kompleksni, Gaussov šum. U ovom slučaju imamo:

$$\tilde{\Phi}_h(m_1T, m_2T) = \sigma_\epsilon^2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \tilde{\varphi}_h(m_1T, nT) \tilde{\varphi}_h^*(m_2T, nT) (n - m_1)(n - m_2) T^2. \quad (\text{IV.29})$$

Za konačne granice sumiranja, ovo je matrična multiplikativna forma,

$$\|\tilde{\Phi}_h\| = \sigma_\epsilon^2 \|A_{n-m}\| \cdot \|\tilde{\varphi}_h\| \times [\|A_{m-n}\| \cdot \|\tilde{\varphi}_h\|], \quad (\text{IV.30})$$

gdje je $\|A_{n-m}\|$ matrica sa elementima $A(m, n) = n - m$, za $m, n = 1, 2, \dots, N$. Elementi matrice $\|\tilde{\varphi}_h\|$ su $\tilde{\varphi}_h(mT, nT)$. U cilju pojednostavljenja prethodnih izraza uvedimo matricu $\|\tilde{\Psi}_h\|$, $\|\tilde{\Psi}_h\| = \|A_{n-m}\| \cdot \|\tilde{\varphi}_h\|$. Sada, polazeći od simetričnosti i realnosti funkcije jezgra $\tilde{\varphi}_h(mT, nT)$, kao i asimetričnosti matrice $\|A_{n-m}\|$, $\|A_{n-m}\| = -\|A_{m-n}\|$, dobijamo:

$$\|\tilde{\Phi}_h\| = -\sigma_\epsilon^2 \|\tilde{\Psi}_h\|^2. \quad (\text{IV.31})$$

Drugim riječima,

$$\text{var}\left\{\frac{\partial CD_x(t, \omega; \varphi_h)}{\partial \omega}\right|_0 \delta_\epsilon\} = 2\sigma_\epsilon^2 CD_f(t, \phi^{(1)}(t), -\|\tilde{\Psi}_h\|^2). \quad (\text{IV.32})$$

Specijalni slučaj 2: Nestacionarni, bijeli, kompleksni, Gaussov šum. U ovom slučaju imamo:

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi}_h(m_1T, m_2T) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \tilde{\varphi}_h(m_1T, nT) \tilde{\varphi}_h^*(m_2T, nT) (n - m_1)(n - m_2) T^2 I(t + nT) \\ &= -\|\tilde{\Psi}_h\| \|I(t)\| \|\tilde{\Psi}_h\|^*, \end{aligned} \quad (\text{IV.33})$$

gdje je matrica $\|I(t)\|$ opisana u postavci Tvrđenja 1. Zamjenjujući jednačine (IV.23) i (IV.33), kao i jednačine (IV.24) i (IV.32) u jednačinu (IV.16) jednostavno dokazujemo jednakosti (IV.18) i (IV.19) iz Tvrđenja 1. ■

Bias estimatora trenutne frekvencije

Tvrđenje 2: Neka je $\hat{\omega}_h(t)$ rješenje jednačine (IV.7). U slučaju male greške estimacije bias estimatora trenutne frekvencije može biti predstavljen u obliku:

$$\text{bias}(t, h) = \frac{-jCD_f(t, \phi^{(1)}(t); \varphi_{h_1})}{2CD_f(t, \phi^{(1)}(t); \varphi_{h_2})}, \quad (\text{IV.34})$$

gdje je $\varphi_{h_1}(mT, nT) = \varphi_h(mT, nT)(nT)$ i $\varphi_{h_2}(mT, nT) = \varphi_h(mT, nT)(nT)^2$. Za male vrijednosti viših izvoda faze signala $f(t)$, $\phi^{(s)}(t)$, $s \geq 2$, kada je $\exp[j(2\phi^{(2)}(t)(mT)(nT) + \Delta\phi(t, mT, nT))] \approx 1 + j(2\phi^{(2)}(t)(mT)(nT) + \Delta\phi(t, mT, nT))$, imamo:

$$E\{\Delta\hat{\omega}_h(t)\} \approx \frac{B_h(2,2) + \frac{1}{3}B_h(0,4)}{4B_h(0,2)} [\phi^{(3)}(t + \tau_1) + \phi^{(3)}(t + \tau_2)], \quad (\text{IV.35})$$

gdje je $0 \leq \tau_1 \leq (mT + nT)$, $0 \leq \tau_2 \leq (mT - nT)$ i

$$B_h(k, l) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \varphi_h(mT, nT)(mT)^k(nT)^l. \quad (\text{IV.36})$$

U slučaju FM signala sa kvadratnom promjenom trenutne frekvencije, $\phi(t) = bt^3/3 + at^2/2$, imamo da je $\tau_1 = \tau_2 = 0$, kao i:

$$\begin{aligned} E\{\Delta\hat{\omega}_h(t)\} &\approx \frac{B_h(2,2) + \frac{1}{3}B_h(0,4)}{2B_h(0,2)} \phi^{(3)}(t), \\ |E\{\Delta\hat{\omega}_h(t)\}| &\leq M_2 \left| \frac{B_h(2,2) + \frac{1}{3}B_h(0,4)}{2B_h(0,2)} \right|, \quad M_2 = \sup_t \{\phi^{(3)}(t)\}. \end{aligned} \quad (\text{IV.37})$$

Dokaz:

Pretpostavimo male vrijednosti viših izvoda faze analiziranog signala. Upotrebljavajući definicioni izraz (IV.6) ostatka faze $\Delta\phi(t, mT, nT)$, kao i simetriju funkcije jezgra $\varphi(t, \tau)$, distribucija $CD_f(t, \phi^{(1)}(t); \varphi_{h_1})$ može biti predstavljena u sljedećoj formi:

$$CD_f(t, \phi^{(1)}(t); \varphi_{h_1}) \approx j|A(t)|^2 \frac{B_h(2,2) + \frac{1}{3}B_h(0,4)}{2} [\phi^{(3)}(t + \tau_1) + \phi^{(3)}(t + \tau_2)]. \quad (\text{IV.38})$$

Za FM signal sa kvadratnom promjenom trenutne frekvencije $f(t) = A(t) \exp[j(bt^3/3 + at^2/2)]$, imamo $\tau_1 = \tau_2 = 0$ i:

$$CD_f(t, \phi^{(1)}(t); \varphi_{h_1}) \equiv j|A(t)|^2 (B_h(2,2) + \frac{1}{3} B_h(0,4)) \phi^{(3)}(t). \quad (\text{IV.39})$$

Upotrebljavajući iste pretpostavke, na sličan način se pokazuje da je:

$$CD_f(t, \phi^{(1)}(t); \varphi_{h_2}) = |A(t)|^2 B_h(0,2). \quad (\text{IV.40})$$

Sada, na jednostavan način dobijamo srednju vrijednost (IV.37) greške estimacije $\Delta\hat{\omega}_h(t)$. Primjetimo, na koncu, da

je, za $h \rightarrow 0, T \rightarrow 0, h/T \rightarrow \infty$,

$$B_h(k,l) \rightarrow h^{k+l} b_{k,l} = h^{k+l} \int_{-1/2}^{1/2} \int_{-1/2}^{1/2} \varphi(t, \tau) t^k \tau^l dt d\tau. \quad (\text{IV.41})$$

■

IV.3. SPECIJALNI SLUČAJEVI KVADRATNIH DISTRIBUCIJA

Izrazi za bias i varijansu estimatora trenutne frekvencije, kod proizvoljne distribucije iz Cohenove klase, mogu se dobiti kao specijalni slučajevi izraza (IV.34)-(IV.37) i (IV.18). U narednom izlaganju ćemo predstaviti ove izraze u slučaju najznačajnijih i najčešće upotrebljavanih kvadratnih distribucija.

1. Pseudo Wignerova distribucija. Funkcija jezgra $\tilde{\varphi}_h(mT, nT)$ u ovom slučaju poprima oblik, [42], [141]:

$\tilde{\varphi}_h(mT, nT) = w_h(mT)\delta(m+n)w_h(nT)$, gdje je $w_h(nT)$ realna i parna funkcija prozora. Kao posljedica ovoga, jednostavno se izvode varijansa i bias estimatora trenutne frekvencije:

$$\text{var}\{\Delta\hat{\omega}_h(t)\} = \frac{WD_I(t, 0; w_{h_4}) + 2WD_{I, |f|^2}(t, 0; w_{h_4})}{4WD_f^2(t, \phi^{(1)}(t); w_{h_1})}, \quad (\text{IV.42})$$

$$\text{bias}(t, h) = \frac{-jWD_f(t, \phi^{(1)}(t); w_{h_3})}{2WD_f(t, \phi^{(1)}(t); w_{h_1})}, \quad (\text{IV.43})$$

gdje su $w_{h_1}(nT) = w_h(nT)(nT)$, $w_{h_2}(nT) = w_h(nT)(nT)^2$, $w_{h_3}(nT) = w_h(nT)\sqrt{nT}$, $w_{h_4}(nT) = w_h^2(nT)(nT)$ i $WD_{x,y}$

kros-Wignerova distribucija.

U slučaju stacionarnog, bijelog, kompleksnog šuma i linearног FM signala $f(t) = A(t)\exp(jat^2/2)$,

$$\text{var}\{\Delta\hat{\omega}_h(t)\} = \frac{\sigma_\varepsilon^2}{2|A(t)|^2} \left(1 + \frac{\sigma_\varepsilon^2}{2|A(t)|^2}\right) \cdot W_w \frac{T}{h^3}, \quad (\text{IV.44})$$

Tabela IV.1. Koeficijenti W_w , S_w i C_w za različite oblike funkcije prozora $w(\tau)$

Prozor $w(\tau)$	Pravougaoni	Hanningov	Hammingov	Trougaoni
W_w	12	54.4631	41.6581	34.2857
S_w	12	28.1135	19.7324	19.2
C_w	2.182×10^{-3}	1.126×10^{-3}	1.926×10^{-3}	1.699×10^{-3}

gdje je $W_w = \int_{-1/2}^{1/2} w^4(\tau) \tau^2 d\tau / (\int_{-1/2}^{1/2} w^2(\tau) \tau^2 d\tau)^2$, konstanta, zavisna od primijenjene funkcije prozora $w(\tau)$. Njene vrijednosti za neke, često upotrebljavane oblike $w(\tau)$ su prikazane u Tabeli IV.1.

Za FM signal sa kvadratnom promjenom trenutne frekvencije, $f(t) = A(t) \exp[j(bt^3/3 + at^2/2)]$,

$$\text{bias}(t, h) \equiv \frac{1}{6} \cdot \frac{b_{0,4}}{b_{0,2}} h^2 \phi^{(3)}(t). \quad (\text{IV.45})$$

Primijetimo da se, u slučaju pravougaonog prozora $w_h(nT)$ i stacionarnog, bijelog, Gaussovog šuma, posljednje dvije jednačine svode na dobro poznate izraze iz [85],

$$\text{var}\{\Delta\hat{\omega}_h(t)\} = \frac{6\sigma_\varepsilon^2}{|A(t)|^2} \left(1 + \frac{\sigma_\varepsilon^2}{2|A(t)|^2}\right) \cdot W_w \frac{T}{h^3}, \quad (\text{IV.46})$$

$$\text{bias}(t, h) = \frac{1}{40} \omega^{(2)}(t) h^2. \quad (\text{IV.47})$$

Zaključimo da je $\text{var}\{\Delta\hat{\omega}_h(t)\}$, u slučaju linearog FM signala, nezavisna od faze $\phi(t)$ i njenih derivacija. Odnosno, $\text{var}\{\Delta\hat{\omega}_h(t)\}$ je, u ovom slučaju, konstantna za sve vrijednosti $\phi^{(2)}(t)$.

2. Spektrogram. U ovom slučaju imamo, [84], [152]: $\tilde{\phi}_h(mT, nT) = w_h(mT)w_h(nT)$. Dvije komponente varijanse imaju sljedeće forme:

$$\begin{aligned} CD_f(t, \phi^{(1)}(t); -\|\tilde{\Psi}_h\| \|I(t)\| \|\tilde{\Psi}_h\|^*) &= STFT_I(t, 0; w_{h_1}^2) SPEC_f(t, \phi^{(1)}(t); w_h) + STFT_I(t, 0; w_h^2) \times \\ &\times SPEC_f(t, \phi^{(1)}(t); w_{h_1}) - 2STFT_I(t, 0; w_{h_2}) \text{Re}[STFT_f(t, \phi^{(1)}(t); w_h) STFT_f^*(t, \phi^{(1)}(t); w_{h_1})], \end{aligned} \quad (\text{IV.48})$$

$$CD_I(t, 0; |\phi_{h_1}|^2) = \frac{1}{2} \text{Re}[STFT_I(t, 0; w_{h_1}^2) STFT_I^*(t, 0; w_h^2)] - \frac{1}{2} SPEC_I(t, 0; w_{h_2}). \quad (\text{IV.49})$$

Istovremeno je,

$$CD_f(t, \phi^{(1)}(t); \phi_{h_2}) = \frac{1}{2} \text{Re}[STFT_f(t, \phi^{(1)}(t); w_{h_2}) STFT_f^*(t, \phi^{(1)}(t); w_h)] - \frac{1}{2} SPEC_f(t, \phi^{(1)}(t); w_{h_1}). \quad (\text{IV.50})$$

Zamjenom prethodnih izraza u (IV.18) dobijamo varijansu estimatora trenutne frekvencije u slučaju spektrograma. Iz (IV.48) se može jednostavno zaključiti da je, u ovom slučaju, varijansa $\text{var}\{\hat{\Delta\omega}_h(t)\}$ veoma zavisna od analiziranog signala $f(t)$. Na sličan način jednostavno se može pokazati da je:

$$CD_f(t, \phi^{(1)}(t); \varphi_{h_1}) = j \text{Im}[STFT_f(t, \phi^{(1)}(t); w_{h_1}) STFT_f^*(t, \phi^{(1)}(t); w_h)], \quad (\text{IV.51})$$

kao i da je, konačno, bias estimatora trenutne frekvencije:

$$\text{bias}(t, h) = \frac{\text{Im}[STFT_f(t, \phi^{(1)}(t); w_{h_1}) STFT_f^*(t, \phi^{(1)}(t); w_h)]}{\text{Re}[STFT_f(t, \phi^{(1)}(t); w_{h_2}) STFT_f^*(t, \phi^{(1)}(t); w_h)] - \text{SPEC}_f(t, \phi^{(1)}(t); w_{h_1})}. \quad (\text{IV.52})$$

Posmatrajući signal sa kvadratnom promjenom trenutne frekvencije, $f(t) = A(t) \exp[j(bt^3/3 + at^2/2)]$, i upotrebljavajući aproksimaciju (IV.37), bias estimatora trenutne frekvencije može biti aproksimiran veoma jednostavnim izrazom:

$$\text{bias}(t, h) \cong \frac{1}{6} \cdot \frac{M_4^w}{M_2^w} h^2 \phi^{(3)}(t), \quad (\text{IV.53})$$

gdje je

$$M_r^w = \int_{-1/2}^{1/2} w(\tau) \tau^r d\tau. \quad (\text{IV.54})$$

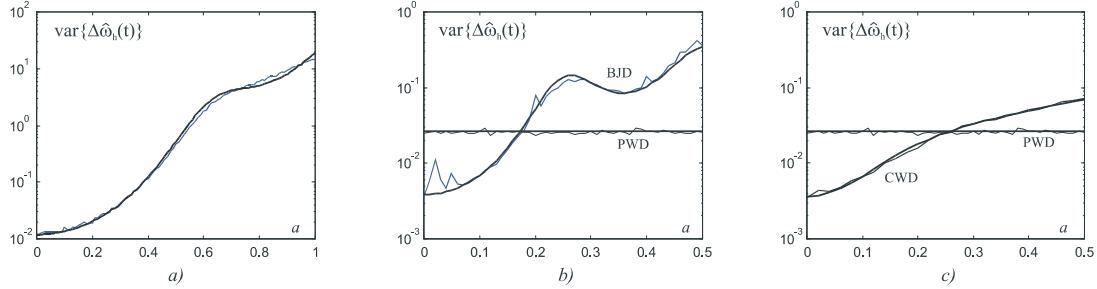
r -ti moment prozora $w(\tau)$. Greška učinjena aproksimacijom (IV.53) je $O(h^8(\phi^{(3)}(t))^3) + O(t^2 h^6(\phi^{(3)}(t))^3)$, gdje je sa $O()$ predstavljen Landau-ov simbol.

Specijalni slučaj: *Linearni FM signal, $f(t) = A(t) \exp(jat^2/2)$, maskiran stacionarnim (ili kvazistacionarnim, $I(t+nT) = I(t)$), kompleksnim, bijelim, Gaussovim šumom.* U ovom slučaju, pojedini članovi iz (IV.48)-(IV.49) uzimaju nulte vrijednosti, $\text{SPEC}_f(0,0; w_{h_1}) = 0$ i $STFT_I(t,0; w_{h_2}) = 0$. Dakle,

$$CD_f(t, \phi^{(1)}(t); -\|\tilde{\Psi}_h\|^2) = Th \cdot M_2^{(w^2)} \cdot \text{SPEC}_f(0,0; w_h), \quad (\text{IV.55})$$

gdje je $M_2^{(w^2)}$ drugi moment prozora $w^2(\tau)$, $M_2^{(w^2)} = \int_{-1/2}^{1/2} w^2(\tau) \tau^2 d\tau$. Sada se tačna vrijednost varijanse $\text{var}\{\hat{\Delta\omega}_h(t)\}$ može predstaviti u sljedećem obliku:

$$\text{var}\{\hat{\Delta\omega}_h(t)\} = \sigma_\varepsilon^2 \frac{Th \cdot M_2^{(w^2)} \cdot \text{SPEC}_f(0,0; w_h)}{\text{Re}^2[STFT_f(t, \phi^{(1)}(t); w_{h_2}) STFT_f^*(t, \phi^{(1)}(t); w_h)]}. \quad (\text{IV.56})$$



Slika IV.1. Varijansa trenutne frekvencije dobijena teorijskim (puna deblja linija) i statističkim putem (tanka linija) za različite normalizovane vrijednosti nagiba $\phi^{(2)}(t) = a$, (a) spektrogram, (b) Born-Jordanova i pseudo WD, (c) Choi-Williamsova i pseudo WD. Normalizacija je izvršena u odnosu na maksimalnu frekvenciju ω_m . $a = 0$ odgovara konstantnom FM signalu, dok veličina a na kraju intervala odgovara dijagonali u posmatranom TF domenu.

Pošto se parametar $\phi^{(2)}(t) = a$ pojavljuje u eksponentima svih članova jednačine (IV.56), ovaj izraz možemo aproksimirati izrazom oblika $\sigma_\epsilon^2 \exp(P(a))$, gdje je sa $P(a)$ označen polinom po a . Razvijajući $\ln(\text{var}\{\Delta\hat{\omega}_h(t)\})$ u Taylorov red, jednostavno dobijamo koeficiente polinoma $P(a)$. Ovaj polinom sadrži samo članove sa parnim stepenom a , tako da, za relativno male vrijednosti a (koje zadovoljavaju, eksperimentalno utvrđeni, uslov: $C_w a^2 h^4 < 5$), možemo uzeti samo prva dva člana reda,

$$\text{var}\{\Delta\hat{\omega}_h(t)\} \cong \frac{\sigma_\epsilon^2}{2|A(t)|^2} \cdot S_w \cdot \frac{T}{h^3} e^{a^2 C_w h^4}, \quad (\text{IV.57})$$

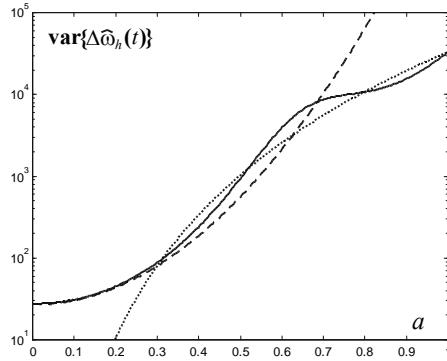
gdje su $S_w = \int_{-1/2}^{1/2} w^2(\tau) \tau^2 d\tau / (M_2^w)^2$ i

$$C_w = \frac{1}{4} \left(\left(\frac{M_2^w}{M_0^w} \right)^2 + \frac{M_6^w}{M_2^w} - 2 \frac{M_4^w}{M_0^w} \right) \quad (\text{IV.58})$$

konstante zavisne od oblika funkcije prozora $w(\tau)$, Tabela IV.1. Relativna greška napravljena aproksimacijom (IV.57) je $1 - \exp(O(a^4 h^8))$. Aproksimativni izraz za veliko a može biti dobiten primjenom metoda stacionarne faze, [108] i fusnota 9, na članove oblika SPEC i STFT u jednačini (IV.56). Drugim riječima, upotrebljavajući činjenicu da

je $STFT_f(t, \omega; w_h) \cong A \sqrt{\frac{2\pi j}{a}} w\left(\frac{\omega - at}{ah}\right) \exp(j(\omega t - \frac{\omega^2}{2a}))$, kao i $\frac{\partial^2 STFT_f(t, \omega; w_h)}{\partial \omega^2} = -STFT_f(t, \omega; w_{h_2})$, dobijamo:

$$\text{var}\{\Delta\hat{\omega}_h(t)\} \cong \frac{\sigma_\epsilon^2}{2|A(t)|^2} \cdot \frac{M_2^{(w^2)}}{2\pi(w^{(2)}(0))^2} h^7 a^5, \quad (\text{IV.59})$$



Slika IV.2. Varijansa trenutne frekvencije u slučaju spektrograma dobijena implementacijom (IV.56) (puna linija), aproksimacijom (IV.57) (ispredidana linija) i aproksimacijom (IV.59) (tačkasta linija).

gdje je $w^{(2)}(0)$ drugi izvod funkcije prozora $w(\tau)$ u tački $\tau = 0$.

Zapazimo da se, uslijed simetričnosti funkcije jezgra $\phi_h(mT, nT)$, dobijaju podjednake vrijednosti varijanse $\text{var}\{\Delta\hat{\omega}_h(t)\}$ za pozitivne i negativne vrijednosti a , sa $a \rightarrow |a|$. Zaključimo da, u ovom slučaju, $\text{var}\{\Delta\hat{\omega}_h(t)\}$ nije konstantna i da je visoko zavisna od analiziranog signala. Kako a raste, $\text{var}\{\Delta\hat{\omega}_h(t)\}$ raste od vrijednosti

$$\text{var}\{\Delta\hat{\omega}_h(t)\} \cong \frac{\sigma_e^2}{2|A(t)|^2} \cdot S_w \cdot \frac{T}{h^3}, \text{ za } a = 0 \quad (\text{IV.60})$$

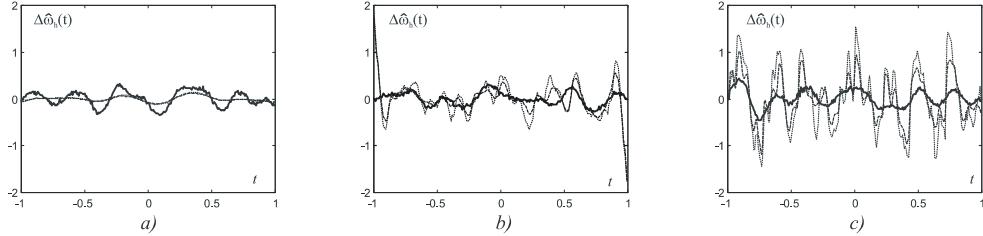
koja se u literaturi navodi kao varijansa spektrograma, [81], [84], [141]. Naravno, ovaj izraz je zadovoljen samo za $a = 0$, dok su za ostale vrijednosti a zadovoljeni opšti izrazi (IV.56)-(IV.59), izvedeni u prethodnom izlaganju.

3. Zaobljena pseudo Wignerova distribucija. U ovom slučaju je, [35]: $\phi_h(mT, nT) = \gamma \exp(-(mT)^2/\alpha - (nT)^2/\beta)$. Za $\alpha = \beta$, dobijamo jezgro oblika $\phi_h(mT, nT) = w_h(mT)w_h(nT)$, gdje je $w_h(mT) = \sqrt{\gamma} \exp(-(mT)^2/(2\alpha))$. Drugim riječima, izrazi za bias i varijansu se magu dobiti direktno iz adekvatnih izraza za spektrogram, implementacijom Gaussovog prozora $w_h(mT)$ u tom slučaju.

IV.4. NUMERIČKA IMPLEMENTACIJA

Dobijeni rezultati za varijansu estimatora trenutne frekvencije su provjereni statistički i prikazani na slici IV.1.(a)-(c).

Posmatrane su sljedeće kvadratne distribucije:



Slika IV.3. Greška estimacije trenutne frekvencije u slučaju pseudo WD (puna debela linija), Choi-Williamsove distribucije (isprekidana linija) i Born-Jordanove distribucije (tačkasta linija), dobijena za različite vrijednosti nagiba,

(a) $a = 0$, (b) $a = 0.25$, (c) $a = 0.5$.

Pseudo WD, sa Hanningovom funkcijom prozora $w(\tau)$;

Spektrogram;

$$\text{Born-Jordanova distribucija (BJD)}, \varphi(mT, nT) = \frac{1}{2|nT|+1} \operatorname{rect}\left|\frac{mT}{2nT}\right|;$$

$$\text{Choi-Williamsova distribucija (CWD)}, \varphi(mT, nT) = \frac{\sigma}{2\sqrt{\pi}} \cdot \frac{1}{|nT|+1} \exp\left(-\left(\frac{\sigma \cdot mT}{2nT}\right)^2\right), \sigma = 2\pi.$$

Opšti izraz (IV.18) je upotrijebljen prilikom numeričkog proračuna varijanse. Analiziran je linearni FM signal $f(t) = \exp(-j16\pi at^2)$ maskiran stacionarnim šumom varijanse $\sigma_e = 0.25$. Posmatrane su normalizovane vrijednosti nagiba $\phi^{(2)}(t) = a$ iz intervala $a \in [0,1]$ u slučaju spektrograma, kao i $a \in [0,0.5]$ u slučaju ostalih distribucija (u ovim slučajevima je neophodno preodabiranje analiziranog signala). Analizirani signal je posmatran unutar vremenskog intervala $t \in [-2,2]$ sa periodom odabiranja $T = 1/64$. Upotrebljavane su simetrične funkcije jezgara, $-h/2 \leq (mT), (nT) \leq h/2$, sa širinom $h = 1$ (odnosno, širina posmatranih jezgara je 64 odbirka). Napomenimo da su rezultati dobijeni za Choi-Williamssovu distribuciju visoko zavisni od upotrijebljene vrijednosti parametra σ , tako da je svako poređenje relativne prirode. Ovom prilikom smo odabrali parametre posmatranih distribucija saglasno rezultata dobijenim u [131].

Sa slike IV.1. se lako primijećuje visoka usaglašenost teorijski dobijenih rezultata (deblja puna linija) i statističkih podataka (tanka linija), kao i njihovo slaganje sa aproksimativnim izrazima (IV.57)-(IV.59) u slučaju spektrograma (isprekidana i tačkasta linija na slici IV.2.). Teorijske vrijednosti su dobijene implementiranjem izraza (IV.18)-(IV.19), dok su statistički podaci dobijeni kroz 256 simulacija. Na slici IV.3 su predstavljene reprezentativne funkcije greške za jednu realizaciju. Primijetimo da se, u slučaju Born-Jordanove i Choi-Williamssove distribucije (kao i u slučaju spektrograma), $\operatorname{var}\{\Delta\hat{\omega}_h(t)\}$ povećava sa povećanjem nagiba a . Za male vrijednosti a , $a \rightarrow 0$, pomenute

distribucije imaju manju varijansu nego pseudo WD, dok se sa povećanjem a one znatno lošije ponašaju. Ovaj zaključak je očekivan kada se zna da distribucije iz RID klase značajno redukuju energiju šuma lociranu na izvjesnoj udaljenosti od osa $\Theta - \tau$ - ravni. U slučaju signala čija se ambiguity funkcija nalazi duž Θ - i τ -ose (kao, na primjer, u slučaju linearog FM signala sa $a \rightarrow 0$), distribucije iz RID klase ne degradiraju reprezentaciju analiziranog signala. Sa druge strane, analizom linearnih FM signala sa velikim vrijednostima a , distribucije iz RID klase značajno degradiraju njegovu reprezentaciju. Kao posljedica toga, u ovom slučaju se može dogoditi da distribucije iz RID klase imaju gore performanse od pseudo WD. Opadanje varijanse kod Born-Jordanove distribucije, za vrijednosti a između 0.3 i 0.4, je posljedica njene pseudo forme. Naime, implementirajući ograničeno jezgro Born-Jordanove distribucije, njegove značajne vrijednosti mogu biti zanemarene uslijed njegovog oscilatornog karaktera u $\Theta - \tau$ domenu. Stoga se upotreboom pseudo forme ove distribucije se mogu izazvati oscijacije u vrijednostima varijanse.

IV.5. ADAPTIVNI ALGORITAM ZA ESTIMACIJU TRENUTNE FREKVENCIJE SIGNALA

UPOTREBOM VREMENSKO-FREKVENCIJSKIH METODA

Posmatrajući rezultate prethodne analize, jednostavno se zaključuje da bias i varijansa estimatora trenutne frekvencije, baziranog na vremensko-frekveničkoj reprezentaciji signala, pored zavisnosti od parametara analiziranog signala i šuma, zavise i od širine upotrebljavanog lag-prozora¹⁸. Funkcionalne zavisnosti biasa i varijanse estimatora trenutne frekvencije su upravo i obrnuto proporcionalne širini lag-prozora h , respektivno. Drugim riječima, u slučaju male greške estimacije $\Delta\hat{\omega}_h(t)$ i širokog spektra često upotrebljavanih distribucija (spektrogram, WD, kao i oblici Wignerove distribucije višeg reda i polinomijalne distribucije, [80], [81], [137]), kao i u slučaju mnogih problema nevezanih za TF analizu signala, bias i varijansa posmatranog estimatora mogu biti predstavljeni sljedećim opštim oblicima:

$$\begin{aligned}\sigma^2(h) & \stackrel{\Delta}{=} \text{var}\{\Delta\hat{\omega}_h(t)\} = \frac{V}{h^m}, \\ \text{bias}(t, h) & \stackrel{\Delta}{=} \text{bias}\{\Delta\hat{\omega}_h(t)\} = \sqrt{B(t)h^n},\end{aligned}\quad (\text{IV.61})$$

gdje je h širina prepostavljenog simetričnog lag-prozora, $w(\tau) = 0$, za $|\tau| > 1/2$. Parametar $B(t)$ zavisi od prvog i viših izvoda estimirane trenutne frekvencije. Širina lag-prozora h je određena brojem odbiraka N , $N = h/T$, gdje je T period odabiranja.

¹⁸Lag-prozorom nazivamo funkciju prozora upotrijebljenu po τ -pravcu (lag-pravcu).

Algoritam ćemo predstaviti na primjeru WD, kada je $m = 3$, $n = 4$ i $V \cong 6\sigma_\varepsilon^2 T/A^2$, jednačine (IV.46)-(IV.47).

WD nije slučajno odabrana za predstavljanje algoritma. Ona, pored toga što predstavlja osnovnu TF reprezentaciju, ima veoma značajnu osobinu za estimaciju trenutne frekvencije: *prilikom estimacije trenutne frekvencije nestacionarnih FM signala, varijansa estimatora (IV.46) ostaje konstantna (odnosno, nezavisna od parametara analiziranog signala), jedino u slučaju WD.* Istaknimo, na početku, značaj navedene osobine iz sljedećeg razloga: *varijansa je jedina upotrebljavana veličina prilikom implementacije algoritma.*

Optimalna širina lag-prozora h_{opt} se pronalazi minimiziranjem srednje kvadratne greške estimatora trenutne frekvencije,

$$E\{(\Delta\hat{\omega}_h(t))^2\} = \sigma^2(h) + \text{bias}^2(t, h). \quad (\text{IV.62})$$

Očigledno je da srednja kvadratna greška (IV.62) ima svoj minimum, pošto su varijansa i bias (IV.61) predstavljene monotono opadajućom i monotono rastućom funkcijom po h , respektivno. Optimalna vrijednost h_{opt} se jednostavno pronalazi izjednačavanjem prvog izvoda srednje kvadratne greške (IV.62) sa nulom,

$$h_{opt} = \left(\frac{mV}{nB(t)} \right)^{\frac{1}{m+n}}. \quad (\text{IV.63})$$

Prethodni izraz, međutim, nije praktično upotrebljiv, pošto podrazumijeva poznavanje $B(t)$, čije ponašanje dominantly zavisi od prvog i viših izvoda trenutne frekvencije. Kako trenutna frekvencija, zajedno sa svojim derivacijama, predstavlja estimiranu veličinu, nerealno je očekivati poznavanje $B(t)$.

U cilju prevazilaženja ovog problema razvija se, [153], [154], algoritam za određivanje optimalne širine lag-prozora h_{opt} (odnosno, uslijed diskretne prirode h , adaptivne širine lag-prozora, čija je veličina veoma bliska h_{opt}) ne upotrebljavajući $B(t)$ (pri i više izvode estimirane veličine). Ideja algoritma potiče iz analize tačnosti sprovedene u prethodnim poglavljima. Naime, u asimptotskom slučaju malog šuma i biasa estimacije, greška estimacije može biti predstavljena sumom svoje determinističke komponente (biasa) i slučajne komponente (varijanse). Preciznije, uslijed prisustva aditivnog šuma $\varepsilon(nT)$, estimator trenutne frekvencije $\hat{\omega}_h(t)$ je slučajna promjenljiva distribuirana oko trenutne frekvencije $\omega(t)$ sa biasom $\text{bias}(t, h)$ i varijansom $\sigma^2(h)$,

$$|\omega(t) - (\hat{\omega}_h(t) - \text{bias}(t, h))| \leq \kappa\sigma(h), \quad (\text{IV.64})$$

gdje je prethodna nejednakost zadovoljena sa vjerovatnoćom $P(\kappa)$, zavisnom od κ . Napomenimo, za sada, da se κ bira tako da važi $P(\kappa) \rightarrow 1$.

Minimiziranjem srednje kvadratne greške po h dobijamo da je $mV/h_{opt}^{m+1} = nB(t)h_{opt}^{n-1}$, odnosno:

$$bias(t, h_{opt}) = \sqrt{\frac{m}{n}}\sigma(h_{opt}). \quad (\text{IV.65})$$

U cilju pronalaženja širine lag-prozora što bliže optimalnoj vrijednosti h_{opt} , uvedimo niz diskretnih vrijednosti širina lag-prozora,

$$H = \{h_s : h_s = ah_{s-1}, s = 1, 2, \dots, J, a > 1\}. \quad (\text{IV.66})$$

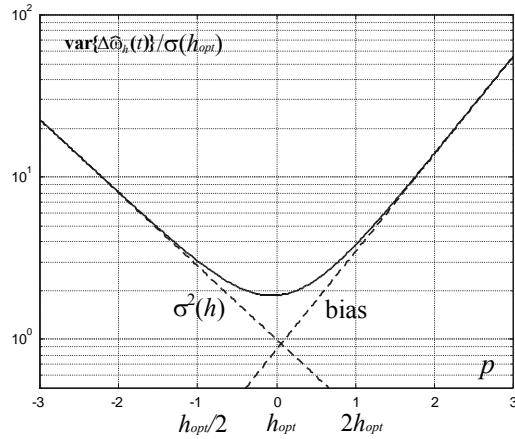
Definisanje skupa H diskretnom šemom (IV.66) se opravdava sa nekoliko veoma značajnih argumenata:

1. Najprije, sa efikasnom numeričkom realizacijom. Realizacija TF metoda se, gotovo po pravilu, bazira na primjeni razvijenih FFT algoritama, najčešće onih sa osnovom 2 ($a = 2$) ili sa osnovom 3 ($a = 3$) (algoritmi čiji je broj elemenata obrađivanog niza oblika cjelobrojnog izložitelja broja 2 ili broja 3). Ovim algoritmom se dobija diskretna šema izbora dvostrukе prethodne širine, $h_s = h_0 \cdot 2^s$, ili trostrukе prethodne širine lag-prozora, $h_s = h_0 \cdot 3^s$, respektivno. Najmanja širina prozora h_0 odgovara najmanjem broju odbiraka N_0 analiziranog signala unutar prozora, $N_s = 2N_{s-1}$ ili $N_s = 3N_{s-1}$, $s = 1, 2, \dots, J$.

2. Takođe, pronalaženje optimalne širine prozora iz skupa H značajno pojednostavljuje i ubrzava postupak, pošto se izbor vrši na relativno malom broju elemenata. Sa druge strane, skup diskretnih vrijednosti H neminovno vodi suboptimalnoj širini lag-prozora. Odabranu vrijednost h nazivamo suboptimalnom zbog uticaja efekata diskretizacije, i njihove posljedice da, u opštem slučaju, h_{opt} ne pripada skupu H . Primijetimo, takođe, da isti efekti igraju dominantnu ulogu, čak i u slučaju poznavanja svih parametara signala potrebnih za izračunavanje optimalne širine prozora. Na primjer, prilikom implementacije FFT algoritma sa osnovom 2 bira se širina prozora oblika $h_0 \cdot 2^s$, najbliža optimalnoj vrijednosti h_{opt} .

Drugim riječima, diskretna širina lag-prozora h je neizbjegna u oba slučaja. Ona uvijek rezultira u subminimalnoj vrijednosti srednje kvadratne greške. Međutim, diskretizacijom širine prozora se istovremeno povećava efikasnost predloženog algoritma. Uz to, gubitak na tačnosti odabrane širine prozora nije značajan u najvećem broju slučajeva, pošto se minimum srednje kvadratne greške estimatora nalazi u njenoj stacionarnoj tački $h = h_{opt}$. Tada srednja kvadratna greška veoma sporo varira sa promjenom širine prozora h , slika IV.4.

Algoritam za određivanje optimalne širine prozora, uz isključivu upotrebu varijanse estimatora trenutne frekvencije (bez prethodnog poznavanja prvog i viših izvoda estimirane trenutne frekvencije), će biti predstavljen kroz sljedeći stav i njegov dokaz.



Slika IV.4. Normalizovana srednja kvadratna greška zavisna od širine prozora $h(p)$

Stav:

Neka je H skup mogućih širina lag-prozora, pri čemu je svaki element skupa jednak dvostrukoj vrijednosti prethodnog elementa, $a=2$ u (IV.66). Definišimo donje i gornje granice intervala sigurnosti $D_s = [L_s, U_s]$ oko estimirane trenutne frekvencije, sa:

$$\begin{aligned} L_s &= \hat{\omega}_{h_s}(t) - (k + \Delta k)\sigma(h_s), \\ U_s &= \hat{\omega}_{h_s}(t) + (k + \Delta k)\sigma(h_s), \end{aligned} \quad (\text{IV.67})$$

gdje su $\hat{\omega}_{h_s}$ estimirana trenutna frekvencija sa prozorom širine $h = h_s$ i $\sigma(h_s)$ - njena varijansa.

Neka h_{s+} odgovara širini prozora (iz skupa H) sa maksimalnom vrijednošću s , $s = 1, 2, \dots, J$ za koju se susjedni intervali sigurnosti još uvijek presijecaju,

$$\begin{aligned} D_s \cap D_{s+1} &\neq \emptyset, \\ D_{s+1} \cap D_{s+2} &= \emptyset. \end{aligned} \quad (\text{IV.68})$$

Tada postoje takve vrijednosti parametara $\kappa, \Delta\kappa$, kao i parametra q da je, sa odgovarajućom vjerovatnoćom $P(\kappa) \rightarrow 1$:

$$h_{s+} = h_{opt} \cdot 2^q, \quad (\text{IV.69})$$

gdje je parametar q veoma blisk nuli, $q \approx 0$.

Dokaz:

Pretpostavimo, najprije, da je $h_{opt} \in H$ i $a = 2$. Tada se elementi skupa H mogu predstaviti sa:

$$h(p) = h_{opt} \cdot 2^p, \quad p = \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots \quad (\text{IV.70})$$

gdje $p = 0$ odgovara optimalnoj širini prozora h_{opt} . Upozorimo na dvostruko indeksiranje prilikom izvodenja dokaza, najprije po s (u oznaci h_s) kojim se označava indeksiranje koje za referentnu širinu prozora ima h_0 ; i zatim, po p (upotrijebljeno u obliku argumenta $h(p)$) kada je indeksiranje vezano za ishodište $p = 0$, koje odgovara optimalnoj širini lag-prozora. Saglasno jednačinama (IV.61), jednostavno se može pokazati da je:

$$\sigma(h(p)) = 2^{-pm/2} \sigma(h_{opt}), \quad (\text{IV.71})$$

$$\text{bias}(t, h(p)) = 2^{pn/2} \text{bias}(t, h_{opt}). \quad (\text{IV.72})$$

Primjenjujući (IV.65) na drugi izraz prethodne jednačine,

$$\text{bias}(t, h(p)) = 2^{pn/2} \sqrt{\frac{m}{n}} \sigma(h_{opt}). \quad (\text{IV.73})$$

Odlučili smo se za predstavljanje biasa i varijanse estimatora trenutne frekvencije, dobijenih za proizvoljnu širinu prozora $h(p)$, zavisno od vrijednosti varijanse $\sigma(h_{opt})$. Analogno ovom postupku, iste veličine možemo povezati sa biasom dobijenim za $h = h_{opt}$, $\text{bias}(t, h_{opt})$, kao u [155]. Notirajmo da, bez obzira na odabrani postupak, konačni zaključci ostaju nepromijenjeni.

Zapazimo da je, za $p \ll 0$, $\text{bias}(t, h(p))$ mnogostruko manji od vrijednosti varijanse $\sigma(h(p))$, pošto je $2^{-pm/2} \gg 2^{pn/2}$. Drugim riječima, u ovom slučaju je estimacija trenutne frekvencije $\hat{\omega}_h(t)$ raspoređena u okolini trenutne frekvencije $\omega(t)$ sa malim biasom ($\text{bias}(t, h(p)) \rightarrow 0$ kada $h(p) \rightarrow 0$) i velikom varijansom ($\sigma(h(p)) \rightarrow \infty$ kada $h(p) \rightarrow 0$). Definišimo intervale sigurnosti za estimaciju $\hat{\omega}_{h(p)}(t)$ trenutne frekvencije $\omega(t)$ sa:

$$\tilde{D}(p) = [\hat{\omega}_{h(p)}(t) - \kappa \sigma(h(p)), \hat{\omega}_{h(p)}(t) + \kappa \sigma(h(p))]. \quad (\text{IV.74})$$

Primijetimo da, za $\text{bias}(t, h(p)) = 0$, uvijek postoji κ takvo da je $\omega(t) \in \tilde{D}(p)$, sa vjerovatnoćom $P(\kappa) = 1$.

U cilju razmatranja ostalih vrijednosti $h(p)$ širine lag-prozora, kada se estimacija trenutne frekvencije vrši sa određenim (nezanemarivim) biasom, proširimo intervale sigurnosti (IV.74) na sljedeći način:

$$D(p) = [\hat{\omega}_{h(p)}(t) - (\kappa + \Delta\kappa) \sigma(h(p)), \hat{\omega}_{h(p)}(t) + (\kappa + \Delta\kappa) \sigma(h(p))]. \quad (\text{IV.75})$$

Veličinom $\Delta\kappa \sigma(h(p))$ je aproksimiran bias posmatrane estimacije, $\text{bias}(t, h(p))$. Očigledno je da važi $\omega(t) \in D(p)$ za $p \ll 0$. Naime, pokazali smo da je, u ovom slučaju, $\omega(t) \in \tilde{D}(p)$ dok je istovremeno za $\Delta\kappa > 0$, $\tilde{D}(p) \subseteq D(p)$. Drugim riječima, $D(p) \cap D(p+1) \neq \emptyset$ za svako $p \ll 0$, sa vjerovatnoćom $P(\kappa)$. Preciznije, intervali sigurnosti

$D(p)$, sa takvim vrijednostima p za koje je bias estimacije veoma mali, zadovoljavaju: $[\omega(t) - \Delta\kappa\sigma(h(p)), \omega(t) + \Delta\kappa\sigma(h(p))] \subseteq D(p) \cap D(p+1)$.

Za $p \gg 0$ imamo obrnutu situaciju. Varijansa estimatora trenutne frekvencije je mala, dok je njen bias veliki, pošto je u ovom slučaju $2^{-pm/2} \ll 2^{pn/2}$. Jednostavno je zaključiti da u slučaju velikog biasa uvijek postoji tako veliko p da je $D(p) \cap D(p+1) = \emptyset$, za dato $\Delta\kappa$.

Ideja koja proizilazi iz algoritma (IV.67)-(IV.68) počiva na određivanju parametra $\Delta\kappa$, koji će obezbijediti da najveće p , za koje susjedni intervali sigurnosti $D(p)$ i $D(p+1)$ imaju makar jednu zajedničku tačku, bude $p=0$. Očigledno je da takva vrijednost $\Delta\kappa$ postoji, pošto su bias i varijansa monotono rastuća i opadajuća funkcija po širini prozora h , respektivno. Izračunavajući (ili prepostavljući) $\Delta\kappa$ omogućavamo da presijecanje susjednih intervala sigurnosti $D(p)$ i $D(p+1)$ služi kao indikator pronalaženja suboptimalne širine prozora $h_{s^+} \sim h_{opt}$ za $s=s^+$.

Algoritmom (IV.67)-(IV.68) se, u stvari, testira presijecanje susjednih intervala sigurnosti

$$\left| \hat{\omega}_{h_s}(t) - \hat{\omega}_{h_{s+1}}(t) \right| \leq (\kappa + \Delta\kappa)(\sigma(h_s) + \sigma(h_{s+1})), \quad (\text{IV.76})$$

u cilju određivanja posljednjeg para susjednih intervala sigurnosti koji zadovoljavaju (IV.76).

Navedeno je ranije da, uslijed diskretnе prirode elemenata skupa H , $h_{s^+} \in H$ predstavlja širinu prozora veoma blisku (u opštem slučaju, ne i jednaku) optimalnoj, $h_{s^+} \sim h_{opt}$. Preciznije, $h_{s^+} = h_{opt} \cdot 2^q$, gdje je q parametar algoritma veoma blisk 0, čiju ćemo veličinu u narednom izlaganju odrediti..

Parametri adaptivnog algoritma

U cilju praktične primjene algoritma neophodno je odrediti njegove parametre $\kappa, \Delta\kappa, q$. Postoji nekoliko mogućih prilaza za njihovo određivanje. Ovdje će biti predstavljena dva, jedan za slučaj nepouzdanog poznavanja biasa i varijanse estimatora, i drugi za slučaj njihovog pouzdanog poznavanja.

1) Prvi prilaz je, u stvari, aproksimativni. Tada se najčešće prepostavlja vrijednost $\kappa \approx 2.5$, kada je $P(\kappa) \approx 0.99$ u slučaju Gaussove raspodjele gustine vjerovatnoće slučajne promjenljive $\Delta\hat{\omega}_h(t)$ oko veličine biasa $bias(t, h)$. Pošto se parametrom $\Delta\kappa$ u algoritmu zamjenjuje veličina biasa za slučaj optimalne širine prozora $bias(t, h_{opt})$, razumno je prepostaviti da su veličine biasa i varijanse, dobijene u slučaju optimalne širine prozora, približne (istog reda veličine), $\Delta\kappa \approx 1$. Na koncu, algoritam se izvodi u cilju pronalaženja širine lag-prozora bliske optimalnoj, tako da je realno prepostaviti da je $q \approx 0$. Ovo jednostavno logičko rasudivanje je veoma upotrebljivo u mnogim vremensko-frekvencijskim, i ne samo vremensko-frekvencijskim, aplikacijama, [59].

2) Parametri algoritma mogu biti izračunati kada su jednačinama (IV.61) precizno odslikani ponašanje biasa i varijanse estimatora trenutne frekvencije,. Saglasno prethodnoj analizi, samo tri vrijednosti argumenta p , $p = 0, 1, 2$, sa odgovarajućim intervalima sigurnosti $D(0)$, $D(1)$, $D(2)$, mogu biti analizirani u cilju određivanja posljednjeg para intervala sigurnosti sa makar jednom zajedničkom tačkom. Prilikom indeksiranja elemenata skupa H argumentom p , optimalna širina lag-prozora je predstavljena referentnom (dobija se za $p = 0$). U cilju zadovoljenja ovog uslova, susjedni intervali sigurnosti $D(0)$ i $D(1)$ imaju makar jednu zajedničku tačku, i predstavljaju posljednji par posmatranih intervala sa zajedničkom tačkom. Istovremeno, potrebno je zadovoljiti da intervali sigurnosti $D(1)$ i $D(2)$ nemaju zajedničkih tačaka.

Pošto je $\Delta\hat{\omega}_{h(p)}(t)$ slučajna veličina, granice intervala sigurnosti su, takođe, slučajne veličine. U cilju prona- laženja parametra algoritma, zadovoljimo najnepovoljnije moguće slučajeve, prilikom ispunjavanja uslova (IV.68). Za pozitivne vrijednosti biasa, $\text{bias}(t, h_{opt}) > 0$, najnepovoljniji mogući slučaj može biti predstavljen sljedećim nejedna- kostima:

$$\begin{aligned} \min\{U(0)\} &\geq \max\{L(1)\}, \\ \max\{U(1)\} &< \min\{L(2)\}. \end{aligned} \quad (\text{IV.77})$$

U cilju opisivanja postupka određivanja minimalnih i maksimalnih vrijednosti iz (IV.68), posmatrajmo, na primjer, interval sigurnosti $D(1)$. Estimacija trenutne frekvencije $\hat{\omega}_{h(1)}(t)$, saglasno jednačini (IV.64), može uzeti vrijednosti iz intervala:

$$\hat{\omega}_{h(1)}(t) \in [\omega(t) + \text{bias}(h(1)) - \kappa\sigma(h(1)), \omega(t) + \text{bias}(h(1)) + \kappa\sigma(h(1))]. \quad (\text{IV.78})$$

Saglasno jednačini (IV.67), gornja i donja granica intervala sigurnosti (IV.78) poprimaju sljedeće vrijednosti:

$$\begin{aligned} U(1) &\in [\omega(t) + \text{bias}(h(1)) + \Delta\kappa\sigma(h(1)), \omega(t) + \text{bias}(h(1)) + (2\kappa + \Delta\kappa)\sigma(h(1))], \\ L(1) &\in [\omega(t) + \text{bias}(h(1)) - (2\kappa + \Delta\kappa)\sigma(h(1)), \omega(t) + \text{bias}(h(1)) - \Delta\kappa\sigma(h(1))], \end{aligned} \quad (\text{IV.79})$$

respektivno. Sada je jednostavno zaključiti da $\max\{L(1)\}$ i $\max\{U(1)\}$ imaju oblike:

$$\begin{aligned} \max\{L(1)\} &= \omega(t) + \text{bias}(h(1)) - \Delta\kappa\sigma(h(1)), \\ \max\{U(1)\} &= \omega(t) + \text{bias}(h(1)) + (2\kappa + \Delta\kappa)\sigma(h(1)). \end{aligned} \quad (\text{IV.80})$$

Na isti način se dobijaju ostala ograničenja, zahtijevana jednačinom (IV.77). Stoga, nakon nekoliko jednostavnih transformacija, dobijamo:

Tabela IV.2. Parametri adaptivnog algoritma za date vrijednosti m, n, κ : Estimator trenutne frekvencije upotrebom Spektrograma, WD i L-Wignerove distribucije, $m = 3, n = 4$; upotrebom polinomialne WD i lokalne polinomialne distribucije četvrtog reda, $m = 3, n = 8$; WD kao estimator spektra, $m = 1, n = 4$

m	1	1	3	3	3	3	3	3
n	4	4	4	4	4	8	8	8
κ	2	3	2	3	5	2	3	5
$\Delta\kappa$	0.86	1.29	0.39	0.58	0.97	0.09	0.14	0.23
q	0.15	0.38	-0.67	-0.49	-0.28	-1.13	-1.03	-0.89
q_1	0.34	0.58	-0.41	-0.24	-0.03	-0.81	-0.70	-0.57

$$\text{bias}(h(0)) + \Delta\kappa\sigma(h(0)) \geq \text{bias}(h(1)) - \Delta\kappa\sigma(h(1)),$$

$$\text{bias}(h(1)) + (2\kappa + \Delta\kappa)\sigma(h(1)) < \text{bias}(h(2)) - (2\kappa + \Delta\kappa)\sigma(h(2)). \quad (\text{IV.81})$$

Primjenjujući jednačine (IV.71)- (IV.73), posljedne nejednakosti se značajno pojednostavljaju,

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{m}{n}} + \Delta\kappa &\geq \sqrt{\frac{m}{n}} \cdot 2^{n/2} - \Delta\kappa \cdot 2^{-m/2}, \\ \sqrt{\frac{m}{n}} \cdot 2^{n/2} + (2\kappa + \Delta\kappa)2^{-m/2} &< \sqrt{\frac{m}{n}} \cdot 2^n - (2\kappa + \Delta\kappa)2^{-m}. \end{aligned} \quad (\text{IV.82})$$

Zadovoljavajući prvu nejednakost, dobijamo skup vrijednosti parametra $\Delta\kappa$. Njegova minimalna vrijednost, za $\Delta\kappa > 0$, je:

$$\Delta\kappa = \sqrt{\frac{m}{n}} \cdot 2^{m/2} \cdot \frac{2^{n/2} - 1}{2^{m/2} + 1}. \quad (\text{IV.83})$$

Za izračunati parametar $\Delta\kappa$, iz druge nejednakosti (IV.82) jednostavno dobijamo skup vrijednosti parametra κ ,

$$\kappa < \frac{\Delta\kappa}{2} (2^{(m+n)/2} - 1). \quad (\text{IV.84})$$

Na koncu, u cilju određivanja parametra q polazimo od činjenice da h_{opt} , po pravilu, ne pripada skupu H . Drugim riječima, h_{s^+} predstavlja suboptimalnu širinu lag-prozora, $h_{s^+} = h_{opt} \cdot 2^q$,

$$\begin{aligned} \text{bias}(h(0)) = \text{bias}(h_{s^+}) &= \sqrt{\frac{m}{n}} \sigma(h_{opt}) \cdot 2^{qn/2}, \\ \sigma(h(0)) = \sigma(h_{s^+}) &= \sigma(h_{opt}) \cdot 2^{-qm/2}. \end{aligned} \quad (\text{IV.85})$$

Zamjenjujući prethodne izraze u prvi izraz jednačine (IV.81), dobijamo:

$$q = \frac{2}{m+n} \log_2 \left(\Delta \kappa \sqrt{\frac{n}{m}} \cdot \frac{1+2^{m/2}}{1-2^{-n/2}} \right) - 1. \quad (\text{IV.86})$$

Vrijednosti izračunatih parametara su, za razne vrijednosti m, n date u Tabeli IV.2.

Precizniju vrijednost parametra q možemo izračunati zahtijevajući da adaptivni prozor bude *unbiased po logaritamskoj skali*. Ovaj zahtjev je posljedica definicije (IV.66) skupa H . Bias i varijansa estimatora trenutne frekvencije su eksponencijalne funkcije po m i n , jednačine (IV.71)-(IV.72). Drugim riječima, granice intervala sigurnosti se mijenjaju po eksponencijalnom pravilu, $2^{(s-s^+)(m+n)/2}$, [144]. Granice posljednjeg para intervala sigurnosti, čija je zajednička tačka adaptivna širina prozora, se dobijaju za $s - s^+ = 0$ i $s - s^+ = 1$. Srednja vrijednost dobijenih granica intervala sigurnosti je: $(1 + 2^{(m+n)/2})/2$. Ona je pomjerena u odnosu na geometrijsku sredinu posmatranih intervala sigurnosti, $\sqrt{2^{(m+n)/2}}$ aproksimativno za

$$\Delta q \approx \frac{2}{m+n} \log_2 ((1 + 2^{(m+n)/2})/2) - \frac{1}{2}.$$

Pomjeranje Δq rezultira u apsolutnom pomjeranju u logaritamskoj razmjeri, $q_1 = q + \Delta q$, Tabela IV.2. Shodno ovome, procjena optimalne širine lag-prozora je: $\hat{h}_{opt} = h_{s^+} / 2^{q_1}$.

Sada se nalazimo pred dilemom izbora jedne od dvije moguće odluke. Prva mogućnost je izbor adaptivne širine prozora $h_a = h_{s^+} / 2^{q_1}$. Sa druge strane, niz diskretnih vrijednosti H je unaprijed određen. Shodno tome, izračunato q_1 možemo upotrijebiti samo u cilju korigovanja određene vrijednosti h_{s^+} . Odnosno, nalazimo se pred dilemom da li za adaptivnu širinu prozora odabrat $h_a = h_{s^+}$ ili $h_a = h_{s^+ - 1}$. Ukoliko je $|q_1| \leq 1/2$, potrebna korekcija je takvog reda veličine da je manja od primijenjenog koraka odabiranja, tako da je razumno odabrat $h_a = h_{s^+}$. Međutim, za $1/2 < |q_1| \leq 3/2$, poželjno je odabrat $h_a = h_{s^+ - 1} = h_{s^+} / 2$. Primjetimo, ipak, da donijeta odluka o proračunu adaptivne širine lag-prozora neće značajno uticati na tačnost estimacije, pošto srednja kvadratna greška veoma sporo varira oko svoje stacionarne tačke, slika IV.4. ■

Ilustracija¹⁹: Simulirana je slučajna promjenljiva $\hat{\Delta\omega}_h(t) = \mathbf{a}\sqrt{V/h^m} + \sqrt{B(t)h^n}$, gdje je $\mathbf{a} = \mathcal{N}(0,1)$ slučajna veličina sa Gaussovom raspodjelom i jediničnom varijansom. Prepostavljen je niz mogućih širina lag-prozora sa vrijednostima $H = \{1/16, 1/8, 1/4, 1/2, 1, 2, 4, 8\}$. Takođe je prepostavljeno da se odnos parametara $V/B(t)$, kojim je

¹⁹Ilustracija je uzeta iz [144].

predstavljen odnos varijansa-bias, mijenja u logaritamskoj razmjeri unutar opsega $\log_2(mV/nB(t))/7 \in [-4,3]$ sa korakom 0.05. Za dato $mV/nB(t)$ simulirana je vrijednost $\Delta\hat{\omega}_h(t)$ za svaku širinu prozora $h_s \in H$ i istovremeno testirana relacija (IV.76). Najveća vrijednost h_s za koju je (IV.76) zadovoljeno se označava sa h_{s+} . Vrijednosti parametara $\Delta\kappa$ i q_1 su uzete iz Tabele IV.2. Na slici IV.5. je predstavljena optimalna širina prozora (puna linija), zajedno sa adaptivnom širinom prozora, $h_a = h_{s+}/2^{q_1}$ (vrijednosti povezane vertikalnim linijama na slici). Za relativno malu vrijednost κ , $\kappa = 2$, primjetne su pogreške prilikom određivanja optimalne širine prozora, pošto je, u ovom slučaju, relacija (IV.64) zadovoljena sa vjerovatnoćom $P(2) = 0.95$. Naime, za $\kappa = 2$, dva susjedna intervala sigurnosti se ne presijecaju, u slučaju malog biasa, sa vjerovatnoćom reda veličine $2 \cdot (0.05)^2 \sim 10^{-2}$. Drugim riječima, adaptivni algoritam će, u ovom slučaju, proizvoditi netačne rezultate sa vjerovatnoćom reda veličine 10^{-2} . Već za $\kappa = 3$ vjerovatnoća greške je reda veličine 10^{-5} .

Algoritam

Saglasno iznijetom stavu i analizi predočenoj kroz njegov dokaz u prethodnom poglavlju, definiše se, [153], [154], sljedeći algoritam za adaptivnu estimaciju trenutne frekvencije. Algoritam se sastoji iz nekoliko koraka:

1. Prepostavlja se skup H , sa elementima h_s koji predstavljaju širine lag-prozora. Širine prozora odgovaraju nizu dvostrukih brojnih vrijednosti, na primjer $N = \{4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512\}$. Svaki element skupa N predstavlja broj odbiraka analiziranog signala unutar lag-prozora;
2. Za svaki vremenski trenutak $t = nT$, proračunava se WD, počev od prozora najmanje širine h_0 ka prozorima širine $h_s \in H, s > 0$;
3. Estimira se trenutna frekvencija kao maksimum TF reprezentacije (IV.7);
4. Znajući veličinu varijanse $\sigma^2(h_s)$ i estimaciju $\hat{\omega}_{h_s}(t)$, definiju se intervali sigurnosti,

$$D_s(t) = [\hat{\omega}_{h_s}(t) - (\kappa + \Delta\kappa)\sigma(h_s), \hat{\omega}_{h_s}(t) + (\kappa + \Delta\kappa)\sigma(h_s)],$$

sa svojim gornjim i donjim granicama

$$U_s(t) = \hat{\omega}_{h_s}(t) + (\kappa + \Delta\kappa)\sigma(h_s),$$

$$L_s(t) = \hat{\omega}_{h_s}(t) - (\kappa + \Delta\kappa)\sigma(h_s),$$

gdje je $\kappa + \Delta\kappa$ određeno vrijednostima parametara $\kappa, \Delta\kappa$, Tabela IV.2.

5. Adaptivna širina lag-prozora $h_a = h_{s^+}$ se određuje kao širina prozora koja odgovara najvećem s ($s = 1, 2, \dots, J$), za koje važi $D_s \cap D_{s+1} \neq \emptyset$, odnosno za koje je još uvijek zadovoljen uslov presijecanja susjednih intervala sigurnosti (IV.76). Tada je s^+ najveće s za koje segmenti $D_s(t)$ i $D_{s+1}(t)$, $s \leq J$, imaju najmanje jednu zajedničku tačku. Adaptivna širina prozora se odabira kao:

$$h_a(t) = h_{s^+}(t).$$

Tada je $\hat{\omega}_{h_a}(t)$ adaptivni estimator trenutne frekvencije za posmatrani vremenski trenutak t . Ukoliko je q_1 takvo da

je: $1/2 < q_1 \leq 3/2$, uzima se $h_a(t) = h_{s^+}(t)/2 = h_{s^+-1}(t)$, kada je (IV.76) još uvijek zadovoljeno.

6. Uzima se sljedeći vremenski trenutak t i tok algoritma se vraća na tačku 2.

Komentar

Za praktičnu implementaciju predstavljenog algoritma neophodno je poznавање amplitude analiziranog signala A i varijanse šuma σ_ε^2 , tačka 4. algoritma. Obezbeđujući mali korak odabiranja T , parametri analiziranog signala i šuma, A i σ_ε^2 , mogu biti estimirani izrazom:

$$\hat{A}^2 + \hat{\sigma}_\varepsilon^2 = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N |x(nT)|^2, \quad (\text{IV.87})$$

gdje se sumiranje vrši nad svih N observacija, uz pretpostavku velikog broja odbiraka $N \gg 1$. Varijansa šuma može

biti estimirana izrazom $\hat{\sigma}_\varepsilon^2 = (\hat{\sigma}_{\varepsilon_r}^2 + \hat{\sigma}_{\varepsilon_i}^2)/2$, gdje su $\hat{\sigma}_{\varepsilon_r}^2$ i $\hat{\sigma}_{\varepsilon_i}^2$ realni i imaginarni dio pretpostavljenog šuma,

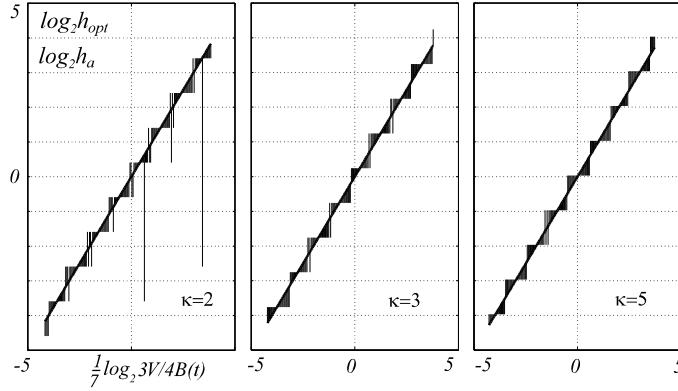
$$\begin{aligned} \hat{\sigma}_{\varepsilon_r} &= \frac{\text{median}(|x_r(nT) - x_r((n-1)T)| : n = 2, \dots, N)}{0.6745}, \\ \hat{\sigma}_{\varepsilon_i} &= \frac{\text{median}(|x_i(nT) - x_i((n-1)T)| : n = 2, \dots, N)}{0.6745} \end{aligned} \quad (\text{IV.88})$$

i $x_r(nT)$ i $x_i(nT)$ realni i imaginarni dio od $x(nT)$.

IV.5.1. NUMERIČKA IMPLEMENTACIJA ALGORITMA SA PRIMJENAMA

Wignerova distribucija, diskretizovana po frekvenciji, može biti implementirana sljedećim izrazom:

$$WD(l, k) = \sum_{n=-N/2}^{N/2-1} w_h(nT) x(lT + nT) x^*(lT - nT) e^{-j2\frac{2\pi}{N}kn}, \quad (\text{IV.89})$$



Slika IV.5. Adaptivna i optimalna širina lag-prozora dobijena za $m = 3$, $n = 4$ i logaritamsku promjenu odnosa varijansa -bias $V/B(t)$. Adaptivna širina prozora je korigovana parametrom q_1 , $h_a = h_{s^+}/2^{q_1}$, Tabela IV.2.

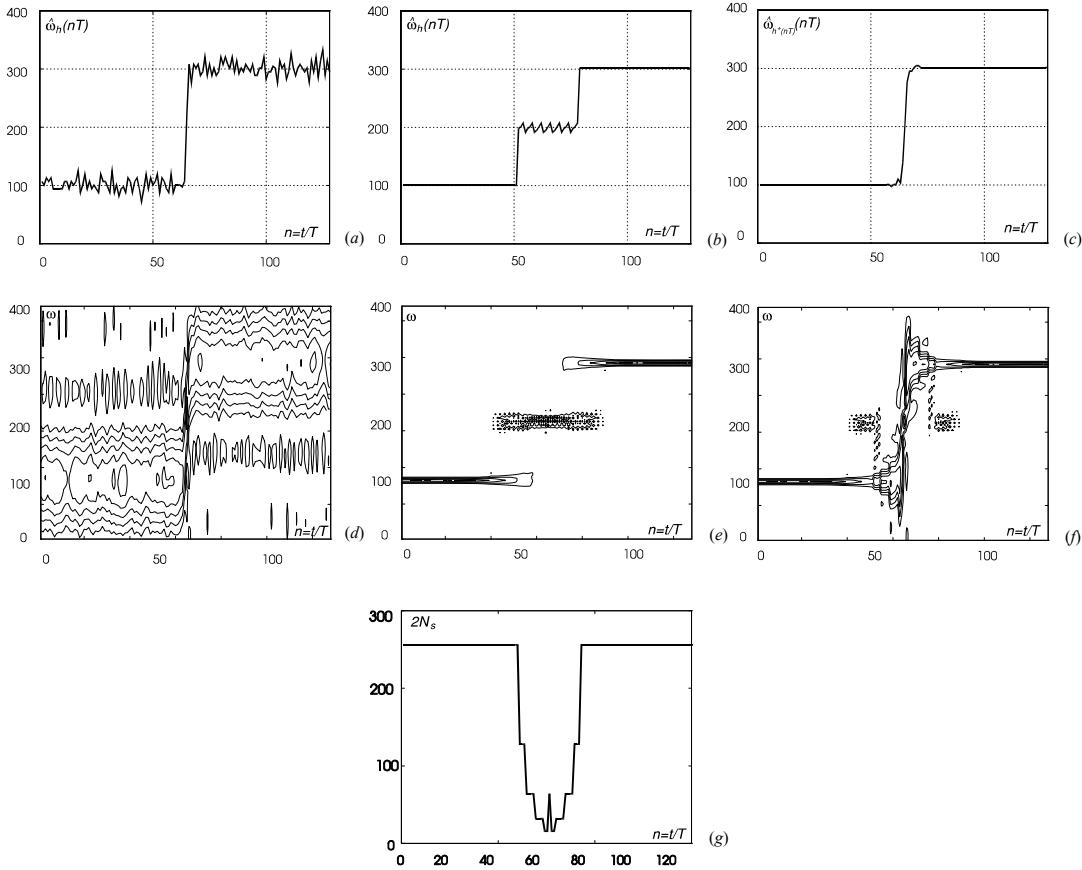
gdje je $N = h/T$ broj odbiraka određen širinom prozora h , dok je interval odabiranja T predstavljen sa $T = \pi/(2\omega_m)$; ω_m je maksimalna frekvencija analiziranog signala. Trenutna frekvencija je određena tačkom (po frekvencijskoj osi) na kojoj distribucija dostiže svoj maksimum,

$$\hat{\omega}_h(lT) = \frac{\pi}{NT} \arg \left[\max_k WD(k, l) \right], \quad (\text{IV.90})$$

za $0 \leq k \leq N/2 - 1$. Ograničenje za k važi u slučaju analize signala čiji spektar postoji samo na nenegativnim frekvencijama.

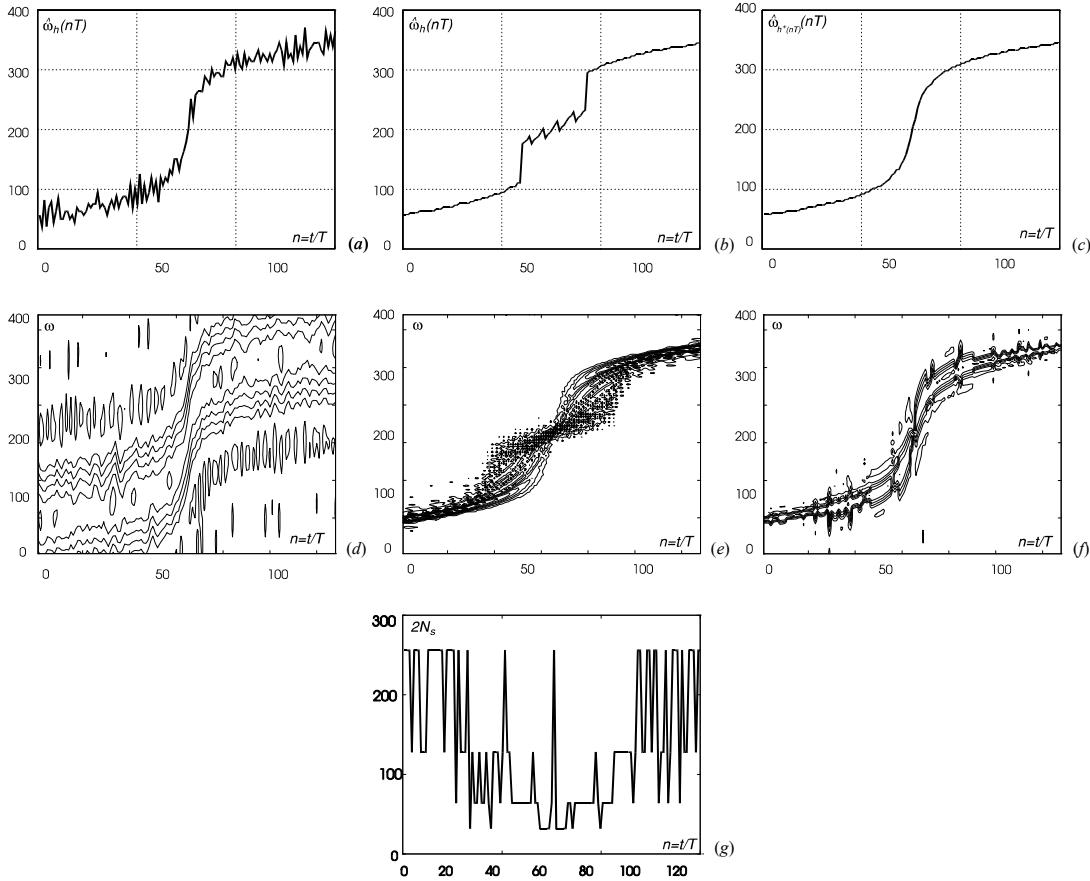
Veoma interesantan slučaj aditivnog šuma nastaje uticajem efekata kvantizacije na tačnost estimacije trenutne frekvencije, pošto često greška kvantizacije može imati tako značajnu vrijednost da premašuje samu varijansu estimatora. Efekti kvantizacije su posljedica diskretizacije WD po frekvencijskoj osi, predstavljene jednačinom (IV.89). Analizirajući efekte kvantizacije prilikom implementacije TF metoda, poglavlje III.4., zaključeno je da se ovi efekti najčešće modeliraju bijelim uniformno distribuiranim šumom. Gustina vjerovatnoće šuma kvantizacije je u (IV.90) uniformno distribuirana veličina na intervalu $(-\pi/(2h), \pi/(2h)]$, kada je $\pi/(NT) = \pi/h$. Varijansa šuma kvantizacije je $\sigma_q^2 = \frac{1}{12}(\pi/h)^2$, [68], [105] i poglavlje III.4. Kao posljedica ovoga, rezultujuća srednja kvadratna greška estimatora trenutne frekvencije se dobija kombinacijom jednačina (IV.62), (IV.46) i (IV.47),

$$E\{(\Delta\hat{\omega}_h(t))^2\} = \left(\frac{6\sigma_\epsilon^2}{|A(t)|^2} \frac{1}{N} + \frac{\pi^2}{12} \right) \frac{1}{h^2} + \left(\frac{\phi^{(3)}(t)}{40} h^2 \right)^2. \quad (\text{IV.91})$$



Slika IV.6. Vremensko-frekvencijska analiza signala (IV.93) maskiranog aditivnim šumom, (a) estimirana trenutna frekvencija upotrebom WD sa $N = 8$, (b) estimirana trenutna frekvencija upotrebom WD sa $N = 256$, (c) estimirana trenutna frekvencija upotrebom WD sa adaptivnom širinom lag-prozora, (d) WD sa $N = 8$, (e) WD sa $N = 256$, (f) WD sa adaptivnom širinom prozora, (g) adaptivna širina lag-prozora u funkciji vremena.

Za slučaj visokog ulaznog odnosa signal-šum, kao i razumno odabranog broja odbiraka N , šum kvantizacije je dominantan nad varijansom estimatora trenutne frekvencije $6\sigma_e^2/(N|A(t)|^2) < \pi^2/12$. Poznato je, [68], [105], međutim, da se efekti kvantizacije, prilikom primjene FFT algoritama, značajno umanjuju interpolacijom po frekvencijskoj osi, odnosno dodavanjem nula proizvodu $x(lT + nT)x^*(lT - nT)$ do odgovarajuće dužine u vremenskom domenu. Interpolacijom Wignerove distribucije u frekvencijskom domenu, do broja odbiraka koji odgovara prozoru najveće posmatrane širine, h_J , postiže se značajno redukovanje greške kvantizacije prilikom izbora najvećeg broja elemenata skupa H za širinu lag-prozora. Uz to, interpolacijom se greška kvantizacije zadržava na konstantnoj vrijednosti. Diskretna WD (IV.89) se izračunava upotrebom standardnih FFT rutina. Istovremeno je:



Slika IV.7. Vremensko-frekvenčijska analiza signala (IV.94) maskiranog aditivnim šumom, (a) estimirana trenutna frekvencija upotrebom WD sa $N = 8$, (b) estimirana trenutna frekvencija upotrebom WD sa $N = 256$, (c) estimirana trenutna frekvencija upotrebom WD sa adaptivnom širinom lag-prozora, (d) WD sa $N = 8$, (e) WD sa $N = 256$, (f) WD sa adaptivnom širinom prozora, (g) adaptivna širina lag-prozora u funkciji vremena.

$$\hat{\omega}_h(lT) = \frac{\pi}{N_J T} \arg \left[\max_k WD(k, l) \right]. \quad (\text{IV.92})$$

Analiza, predstavljena u prethodnim izlaganjima, je izvršena uz zanemarenje efekata kvantizacije, tako da se ona odnosi na slučaj primijenjene interpolacije (u frekvenčijskom domenu). Dobijeni rezultati se mogu adekvatno implementirati uzimanjem $m = 3, n = 4$. Ukoliko interpolacija nije primijenjena, sprovedenu analizu i stavove razvijene prilikom definisanja i dokazivanja adaptivnog algoritma, možemo pojednostaviti uzimajući $m = 2$ i $n = 4$, [155]. Napomenimo da je ovo veoma čest slučaj u realizaciji TF metoda.

Primjeri²⁰: Posmatrajmo sljedeće signale:

²⁰Primjeri su preuzeti iz [85].

1. Signal sa trenutnom frekvencijom oblika podignutog Hevisideovog odskočnog signala u trenutku $nT = 0.5$,

$$\omega(nT) = 64\pi + 32\pi \text{sign}(nT - 0.5), \quad (\text{IV.93})$$

2. Nelinearni FM signal,

$$\omega(nT) = 10\pi \text{asinh}[100(nT - 0.5)] + 64\pi. \quad (\text{IV.94})$$

Na slikama IV.6. i IV.7. je predstavljena estimirana trenutna frekvencija analiziranih signala (IV.93)-(IV.94) sa konstantnom veličinom lag-prozora (slike (a) i (b)), kao i sa adaptivnom širinom prozora (slike (c)). Takođe su predstavljene odgovarajuće TF reprezentacije ovih signala (slike (d)- (f)) i prikazane vremenske promjene adaptivne širine prozora h_{s^+} , slike IV.6.(g) i IV.7.(g). Posmatrane su diskrette vrijednosti lag-prozora koje odgovaraju skupu odbiraka $N = \{8, 16, 32, 64, 128, 256\}$.

Primijetimo da, u tačkama sa konstantnom trenutnom frekvencijom analiziranog signala, prozor uzima maksimalnu diskretnu vrijednost iz skupa H . U tačkama sa brzim promjenama trenutne frekvencije, bias ima značajnu vrijednost, tako da, u cilju njegovog smanjenja, prozor uzima minimalnu veličinu. Trenutna frekvencija (IV.94) je veoma nelinearna, pa su i promjene širine lag-prozora u vremenu veoma izražene, slika IV.7.(g).

V

OPTIMALNO NESTACIONARNO FILTRIRANJE BAZIRANO NA VREMENSKO-FREKVENCIJSKOJ ANALIZI

Spektralna analiza stacionarnih signala u širem smislu riječi je često korišćeni pojam u analizi signala, [105], [108]. Uobičajeno je, naime, da se stacionarni signali analiziraju u vremenskom ili u frekvencijskom domenu. Međutim, analizirani signali se u mnogim primjenama modeliraju nestacionarnim procesima. Proširivanje spektralne analize na slučaj nestacionarnih procesa rezultira vremensko-frekvencijski promjenljivim spektrom, kao na primjer Wignerovim, [99] ili evolutivnim spektrom, [100], [102]. Već nekoliko puta do sada je naznačeno da svoju cijelokupnu pažnju u disertaciji posvećujemo analizi signala sa veoma nestacionarnim karakteristikama. U tom cilju implementiramo razvijene TF metode. Vremensko-promjenljivo filtriranje je veoma izazovna oblast koja upotrebljava najznačajnije rezultate i metode TF analize nestacionarnih signala. Njime se poboljšavaju dobijeni rezultati, u poređenju sa rezultatima postignutim procesiranjem nestacionarnih signala u vremenskom ili u frekvencijskom domenu. Kao posljedica izvjesnih stepena slobode, [35], [37], [65], [143], [186], [194] i glava I, u TF analizi se predlaže značajan broj metoda za analizu i procesiranje nestacionarnih procesa. Povezivanjem sa ovim metodama, definiše se nekoliko mogućih prilaza vremenski-promjenljivom filtriranju, [67], [73], [88], [89], [124], [192]. Istorijski posmatrano, najprije je Zadeh, [192], predložio rješenje bazirano na povezivanju sa Richaczekovom distribucijom, [35], [37], [118]. Kako Richaczekova distribucija pokazuje značajne nedostatke prilikom TF analize nestacionarnih signala, [35], [37], prilazi se, [24], [88], redefinisanju vremensko-promjenljivih filtera povezujući ih sa drugim TF distribucijama, najprije sa WD. Slijedeći navedenu proceduru i upotrebljavajući Weylovu definiciju funkcije oslonca vremensko-promjenljivih

filtara, kao i teoriju Wienerovih filtara iz stacionarnog slučaja, [108], definiše se optimalno filtriranje nestacionarnih signala.

U ovoj glavi se, najprije, definije optimalno nestacionarno filtriranje primjenom teorije Wienerovog optimalnog filtriranja iz stacionarnog slučaja. Posmatran je prilaz baziran na TF distribucijama. Vremenski-promjenljivo filtriranje je definisano analogno definisanju WD, uz uvođenje jednostavne modifikacije. Modifikacija se upotrebljava u cilju prevazilaženja izobličenja filtriranog signala. Analiziran je izbor pogodne širine funkcije oslonca u cilju zadovoljenja poželjnih osobina vremenski-promjenljivog filtriranja. Pokazano je da optimalna širina dominantno zavisi od oblika analiziranog signala i upotrebljavane TF reprezentacije. U slučaju linearnih FM signala i implementacije WD, u [143] je izvršena estimacija domena funkcije oslonca vremenski-promjenljivog filtra (na trenutnoj frekvenciji dobijene reprezentacije), algoritmom baziranim na jednoj realizaciji signala sa šumom. U disertaciji su analizirani monokomponentni i multikomponentni FM signali sa veoma nelinearnim promjenama trenutne frekvencije njihovih komponenti. Predloženo je simetrično proširivanje domena funkcije oslonca sa jedne tačke (trenutna frekvencija analiziranog signala za posmatrani vremenski trenutak). Zbog svojih ranije isticanih osobina, glave I i III, upotrebljavani su spektrogram i S-metod, kao osnovna sredstva u vremenski-promjenljivom filtriranju multikomponentnih signala.

Prilikom izlaganja je posmatran veoma interesantan primjer optimalnog nestacionarnog filtriranja, filtriranje govornog signala maskiranog šumom. Govorni signal je veoma nestacionaran multikomponentni signal sa izraženim efektima interferencije. Zbog njegove prirode, a u cilju zadovoljavajućeg filtriranja u realnom vremenu, predlaže se, [166], [167], [175], aproksimiranje najčešće upotrebljavanog Wignerovog spektra distribucijama sa redukovanim efektima interferencije. Saglasno kriterijumu jednostavne praktične implementabilnosti, [171] i glava II, rješenje je pronađemo u optimalnom nestacionarnom filtriranju baziranom na spektrogramu i S-metodu.

Na koncu je predložen hardver za VLSI implementaciju optimalnog nestacionarnog filtra, baziran na hardveru realizovanom u cilju praktične realizacije vremensko-frekvencijskih metoda, glava II.

V.1. DEFINICIJA OPTIMALNOG NESTACIONARNOG FILTRIRANJA

Vremenski-promjenljivo (nestacionarno) filtriranje signala $x(t) = f(t) + \varepsilon(t)$ se definije na sljedeći način, [88], [192]:

$$(Hx)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t, t - \tau)x(\tau)d\tau, \quad (\text{V.1})$$

gdje su $h(t, \tau)$ impulsni odziv vremenski-promjenljivog sistema H , $f(t)$ željeni signal i $\varepsilon(t)$ aditivni šum. Optimalni sistem H_{opt} može biti određen minimizacijom srednje kvadratne greške, [108],

$$H_{opt} = \arg \min_H \{ |f(t) - (Hx)(t)|^2 \}. \quad (\text{V.2})$$

Minimiziranjem (V.2) minimiziramo grešku $|f(t) - (Hx)(t)|$ na posmatranom vremenskom intervalu. U idealnom slučaju, filtriranjem se postiže da je:

$$(Hf)(t) = f(t), (H\varepsilon)(t) = 0. \quad (\text{V.3})$$

U glavi I smo zaključili da postoje izvjesni stepeni slobode u definiciji vremensko-promjenljivog spektra. Shodno tome, definiše se, [67], [73], [88], [89], [124], [192], određeni broj mogućih prilaza filtriranju nestacionarnih signala. Moguće rješenje problema se određuje definisanjem funkcije prenosa nestacionarnog filtra analogno definisanju pojedine TF distribucije. Zadeh je prvi, u [192], prišao rješavanju predloženog problema na ovaj način. Zadehov prilaz se, zbog toga, naziva klasičnim, a temelji se na povezivanju prenosne funkcije filtra sa Richaczekovom distribucijom,

$$Z_H(t, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t, t - \tau) e^{-j\omega\tau} d\tau. \quad (\text{V.4})$$

Impulsni odziv vremenski-promjenljivog filtra se može predstaviti inverznom FT prethodnog izraza:

$$h(t, t - \tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} Z_H(t, \omega) e^{j\omega\tau} d\omega. \quad (\text{V.5})$$

Poznato je, [35], [37] i glava I, da Richaczekova distribucija pokazuje značajne nedostatke prilikom TF analize nestacionarnih signala. Isti zaključci se mogu izvesti i za Zadehovu prenosnu funkciju $Z_H(t, \omega)$ nestacionarnog filtra. U cilju prevazilaženja ovog nedostatka, predlaže se, [24], [67], [88], [89], redefinisanje optimalnog nestacionarnog filtriranja, povezujući ga sa Wignerovom distribucijom.

Potiskujući izobličenja izlaznog signala, nastala implementacijom definicionog izraza (V.1), [143], i definišući nestacionarno filtriranje analogno definisanju WD, modifikuje se filtrirani signal $x(t)$ na sljedeći način, [24], [88]:

$$y(t) = (Hx)(t) = \int_{-\infty}^{\Delta} h(t + \tau/2, t - \tau/2) x(t + \tau) d\tau. \quad (\text{V.6})$$

Motiv za uvođenje modifikacije analiziranog signala $x(t)$ (u poređenju sa klasičnom definicijom (V.1)) će biti detaljno analiziran kasnije, prilikom ilustracija filtriranja FM signala.

Optimalna funkcija prenosa nestacionarnog filtra H_{opt} se izvodi analogno izvođenju funkcije prenosa Wienerovog filtra prilikom analize stacionarnih signala: minimiziranjem srednje kvadratne greške

$$e^2 = E \{ |f(t) - (Hx)(t)|^2 \}$$

po prenosnoj funkciji projektovanog filtra H ,

$$\frac{\partial e^2}{\partial h(t+\alpha/2, t-\alpha/2)} = 2E \left\{ [f(t) - \int_{-\infty}^{\infty} h(t+\tau/2, t-\tau/2)x(\tau)d\tau] x^*(t+\alpha) \right\} = 0. \quad (\text{V.7})$$

Primijetimo da se, dostizanjem minimalne vrijednosti srednje kvadratne greške e^2 , postiže ortogonalnost greške $f(t) - (Hx)(t)$ sa $x^*(t+\alpha)$, sa proizvoljnom vrijednošću parametra α ,

$$E \left\{ [f(t) - \int_{-\infty}^{\infty} h(t+\tau/2, t-\tau/2)x(\tau)d\tau] x^*(t+\alpha) \right\} = 0. \quad (\text{V.8})$$

Takođe, notirajmo da se FT, po t , pojedinih članova jednačine (V.8) može predstaviti u funkciji srednje vrijednosti ambiguity funkcije,

$$\overline{AF}_{xx}(\Theta, \tau) = \int_{-\infty}^{\infty} E \{ x(t+\tau/2) x^*(t-\tau/2) \} e^{-j\Theta t} dt. \quad (\text{V.9})$$

Drugim riječima, pronalazeći FT, po promjenljivoj t , svih sabiraka iz (V.8) i upotrebljavajući definiciju (V.9), jednostavno se mogu izvesti sljedeće jednakosti:

$$FT_t [E \{ f(t) x^*(t+\alpha) \}] = \overline{AF}_{fx}(\Theta, -\alpha) e^{j\Theta\alpha/2}, \quad (\text{V.10})$$

$$FT_t [E \{ x(t+\tau) x^*(t+\alpha) \}] = \overline{AF}_{xx}(\Theta, \tau - \alpha) e^{j\Theta(\tau+\alpha)/2}, \quad (\text{V.11})$$

kao i da se jednačina (V.8) može napisati u jednom od sljedećih oblika:

$$\overline{AF}_{fx}(\Theta, -\alpha) e^{j\Theta\alpha/2} = \int_{-\infty}^{\infty} A_H(\Theta, \tau)^* \overline{AF}_{xx}(\Theta, \tau - \alpha) e^{j\Theta(\tau+\alpha)/2} d\tau, \quad (\text{V.12})$$

$$\overline{AF}_{fx}(\Theta, \alpha) e^{-j\Theta\alpha/2} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} A_H(u, -\tau) \overline{AF}_{xx}(\Theta - u, \alpha - \tau) e^{-j(\Theta-u)(\tau+\alpha)/2} d\tau du, \quad (\text{V.13})$$

gdje je:

$$A_H(\Theta, \tau) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t+\tau/2, t-\tau/2) e^{-j\Theta t} dt \quad (\text{V.14})$$

FT, po t , impulsnog odziva optimalnog nestacionarnog filtra. U slučaju vremenski-promjenljivog filtriranja nestacionarnih procesa koji su, gotovo u potpunosti, koncentrisani oko ishodišta i oko osa ambiguity (Θ, τ) ravni (tzv. *undespread procesi*), $|\Theta\tau - u\alpha - u\tau|/2 \ll \pi$, imamo da je: $\exp(j(\Theta\tau - u\alpha - u\tau)/2) \approx 1$, ili,

$$\overline{AF}_{fx}(\Theta, \alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} A_H(u, -\tau) \overline{AF}_{xx}(\Theta - u, \alpha - \tau) d\tau du. \quad (\text{V.15})$$

U cilju predstavljanja pojedinih članova prethodnog izraza u obliku spektra proizvoljne kvadratne distribucije (iz Cohenove klase), pomnožimo obje strane prethodne jednačine funkcijom jezgra $c(\Theta, \alpha)$ i pronađimo dvodimenzionu FT tako dobijene jednačine,

$$\bar{\rho}_{fx}(t, \omega) = L_H(t, \omega) \bar{\rho}_{xx}(t, \omega). \quad (\text{V.16})$$

$L_H(t, \omega)$ je Weylov simbol, kojim je označena funkcija oslonca optimalnog nestacionarnog filtra,

$$L_H(t, \omega) = FT_{\Theta, \alpha}[A_H(\Theta, -\alpha)] = \int_{-\infty}^{\infty} h(t + \tau/2, t - \tau/2) e^{-j\omega\tau} d\tau, \quad (\text{V.17})$$

dok je $\bar{\rho}_{xx}(t, \omega)$ spektar proizvoljne kvadratne distribucije signala $x(t)$,

$$\bar{\rho}_{xx}(t, \omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} c(\Theta, \tau) E\{x(u + \tau/2)x^*(u - \tau/2)\} e^{j\Theta t - j\omega\tau - j\Theta u} du d\Theta d\tau. \quad (\text{V.18})$$

Za $c(\Theta, \tau) \equiv 1$ dobijamo Wignerov spektar filtriranog signala, [99],

$$\overline{WD}_{xx}(t, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} E\{x(t + \tau/2)x^*(t - \tau/2)\} e^{-j\omega\tau} d\tau. \quad (\text{V.19})$$

Drugim riječima, funkcija oslonca optimalnog nestacionarnog filtra se, u združenom TF domenu definiše sa:

$$L_H(t, \omega) = \frac{\bar{\rho}_{fx}(t, \omega)}{\bar{\rho}_{xx}(t, \omega)}. \quad (\text{V.20})$$

Ovaj izraz odgovara funkciji prenosa Wienerovog filtra iz stacionarnog slučaja²¹, [108].

Izraz (V.20) se može veoma jednostavno izvesti ukoliko se pode od pretpostavke da su posmatrani slučajni signali kvazistacionarni. U tom slučaju se autokorelaciona funkcija $r_{fx}(t, t + \alpha)$, iz izraza (V.10), može napisati u obliku

²¹Wienerov filter se definiše prilikom analize stacionarnog signala $f(t)$ maskiranog aditivnim šumom $\varepsilon(t)$, $x(t) = f(t) + \varepsilon(t)$. Tada se kroskorelaciona i autokorelaciona funkcija mogu predstaviti sljedećim izrazima, respektivno

$$r_{fx}(-\alpha) = E\{f(t)x^*(t + \alpha)\},$$

$$r_{xx}(\tau - \alpha) = E\{x(t + \tau)x^*(t + \alpha)\}.$$

Takođe, u ovom slučaju se spektralna gustina snage definiše sa: $S(\omega) = FT_{\tau}[r(\tau)]$. Slijedeći prethodnu proceduru jednostavno se dobija prenosna funkcija Wienerovog filtra, [108],

$$H(\omega) = \frac{S_{fx}(\omega)}{S_{xx}(\omega)}.$$

$r_{fx}(t + \alpha/2, t - \alpha/2)$, odnosno $r_{xx}(t + \tau, t + \alpha)$, iz (V.11), u obliku $r_{xx}(t + (\tau - \alpha)/2, t - (\tau - \alpha)/2)$. Dalja procedura izvođenja izraza (V.20) je analogna prethodnoj.

U slučaju signala nekoreliranog sa aditivnim šumom,

$$L_H(t, \omega) = \frac{\bar{\rho}_{ff}(t, \omega)}{\bar{\rho}_{ff}(t, \omega) + \bar{\rho}_{ee}(t, \omega)} = 1 - \frac{\bar{\rho}_{ee}(t, \omega)}{\bar{\rho}_{xx}(t, \omega)}. \quad (\text{V.21})$$

Prepostavimo da se spektar odabrane distribucije korisnog signala $f(t)$ nalazi unutar uske oblasti R vremensko-frekvencijske ravni, dok je najveći dio šuma raspoređen van ove oblasti (samo mali dio šuma, u poređenju sa njegovom cijelokupnom energijom, leži u oblasti R). Više puta kroz disertaciju smo dokazali realističnost uvedene pretpostavke. Njen veoma aplikativan primjer je široka klasa FM signala, visoko koncentrisanih na svojoj trenutnoj frekvenciji, i maskiranih bijelim šumom $\epsilon(t)$, raširenim u čitavoj TF ravni²². U ovom slučaju se postavljeni zahtjevi ispunjavaju veoma jednostavnim matematičkim oblikom funkcije oslonca optimalnog nestacionarnog filtra,

$$L_H(t, \omega) = \begin{cases} 1, & \text{za } (t, \omega) \in R \\ 0, & \text{za } (t, \omega) \notin R. \end{cases} \quad (\text{V.22})$$

Naime, uz prethodne pretpostavke se može zaključiti da je: $\bar{\rho}_{ee}(t, \omega) \equiv 0$, za $(t, \omega) \in R$ i $\bar{\rho}_{ff}(t, \omega) = 0$, za $(t, \omega) \notin R$.

Primjenom ovog rješenja na definicioni izraz vremensko-promjenljivog filtriranja, omogućava se efikasno filtriranje monokomponentnih i multikomponentnih FM signala, maskiranih bijelim šumom. Primijetimo da uzimanje proizvoljne konstantne vrijednosti u (V.22), unutar opsega R , ne uslovljava bilo kakve kvalitativne izmjene u analizi.

Impulsni odziv vremenski-promjenljivog filtra se dobija u obliku:

$$h(t + \tau/2, t - \tau/2) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} L_H(t, \omega) e^{-j\omega\tau} d\omega. \quad (\text{V.23})$$

Primjenom Parsevalove teoreme na jednačinu (V.6), definišemo vremenski-promjenljivo filtriranje u frekvencijskom domenu,

$$y(t) = (Hx)(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} L_H(t, \omega) X(\omega) e^{j\omega t} d\omega, \quad (\text{V.24})$$

²²Pretpostavljeni slučaj se, matematički, može predstaviti izrazima:

$$\iint_{(t, \omega) \in R} \bar{\rho}_{ee}(t, \omega) dt d\omega \ll \iint_{(t, \omega) \notin R} \bar{\rho}_{ee}(t, \omega) dt d\omega,$$

$$\iint_{(t, \omega) \in R} \bar{\rho}_{ff}(t, \omega) dt d\omega \gg \iint_{(t, \omega) \notin R} \bar{\rho}_{ff}(t, \omega) dt d\omega.$$

gdje je $X(\omega) = FT[x(t)]$. Realizacija i osobine vremenski-promjenljivog filtriranja će biti analizirani implementiranjem jednačina (V.6) i (V.24).

Napomenimo, na koncu, da se isti zaključci (međutim, samo u slučaju Wignerovog spektra) mogu izvesti, [141], [143], upotrebljavajući poželjne osobine (V.3) i Moyalovu formulu, [35], [108], kojom se povezuje unutrašnji proizvod posmatranih signala sa unutrašnjim proizvodom njihovih WD,

$$(WD_{xx}(t, \omega), WD_{yy}(t, \omega)) = |(x(t), y(t))|^2.$$

Naime, zadovoljavajući poželjne osobine (V.3) vremenski-promjenljivog sistema, te upotrebljavajući Moyalovu formulu, jednostavno se pokazuje da sistem zadovoljava sljedeće jednakosti:

$$((Hf)(t), f(t)) = \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = (L_H(t, \omega), WD_{ff}(t, \omega)),$$

$$((H\varepsilon)(t), \varepsilon(t)) = 0 = (L_H(t, \omega), WD_{\varepsilon\varepsilon}(t, \omega)). \quad (\text{V.25})$$

Prepostavljajući, najprije, visoku koncentrisanost WD korisnog signala, $WD_{ff}(t, \omega)$, u uskoj oblasti R , kao i rasprostranjenost energije šuma najvećim svojim dijelom van ovog regionala, fusnota 21, nameće se jednostavno rješenje (V.22) za funkciju oslonca optimalnog nestacionarnog filtra, [88], [143].

Diskretni oblik

U cilju numeričke realizacije vremenski-promjenljivog filtriranja (V.6), (V.23)-(V.24), neophodno je izvršiti njegovu diskretizaciju. Diskretni oblici ovih jednačina mogu biti predstavljeni sa:

$$(Hx)(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h(n + \frac{m}{2}, n - \frac{m}{2}) x(n + m) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} L_H(n, \theta) X(\theta) e^{j\theta n} d\theta, \quad (\text{V.26})$$

gdje su:

$$\begin{aligned} L_H(n, \theta) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(n + \frac{k}{2}, n - \frac{k}{2}) e^{-j\theta k}, \\ X(\theta) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) e^{-j\theta k}. \end{aligned} \quad (\text{V.27})$$

Podsetimo da je, u cilju prevazilaženja izobličenja filtriranog signala, u definiciju (V.6) uvedena neznatna modifikacija analiziranog signala $x(t)$, relativno posmatrano u odnosu na uobičajenu definiciju (V.1). Nakon budućih razmatranja pažljiv čitalac će smatrati neophodnim i prirodnim uvođenje ove modifikacije.

V.2. PSEUDO FORMA OPTIMALNOG NESTACIONARNOG FILTRIRANJA

Analogno uvođenju pseudo oblika TF metoda, upotrebljavnih u analizi signala, a u cilju praktične realizacije vremenski-promjenljivog filtriranja, predlaže se ograničavanje ulaznog signala $x(t)$ (filtriranog po definicionom izrazu (V.6)) funkcijom prozora $w(\tau)$,

$$y(t) = (Hx)(t) = \int_{-\infty}^{\Delta} h(t + \tau/2, t - \tau/2) w(\tau) x(t + \tau) d\tau. \quad (\text{V.28})$$

Primjenom Parsevalove teoreme definišemo vremenski-promjenljivo filtriranje u frekvencijskom domenu,

$$y(t) = (Hx)(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} L_H(t, \omega) STFT_x(t, \omega) d\omega. \quad (\text{V.29})$$

Prilikom praktične implementacije, domen R se određuje upotrebom pseudo oblika TF distribucije. Analizirajmo postignute efekte na primjeru pseudo forme WD,

$$PWD_{ff}(t, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} w_e(\tau) f(t + \tau/2) f^*(t - \tau/2) e^{-j\omega\tau} d\tau. \quad (\text{V.30})$$

Primjetimo da lag-prozori $w(\tau)$ i $w_e(\tau)$ upotrijebljeni u definicionim izrazima pseudo forme optimalnog nestacionarnog filtriranja, jednačina (V.28), i pseudo WD, jednačina (V.30), nijesu povezani, tako da se njihova analiza i optimizacija može vršiti odvojeno. Prozorom $w_e(\tau)$ se vrši zaobljavanje originalne WD,

$$PWD_{ff}(t, \omega) = WD_{ff}(t, \omega) *_{\omega} W_e(\omega). \quad (\text{V.31})$$

Ukoliko sa R_p označimo region dobijen upotrebom pseudo forme WD u definicionom izrazu (V.21) funkcije oslonca, njegovu veličinu možemo predstaviti sa:

$$R_p = R + \Delta R. \quad (\text{V.32})$$

Sa R je označen region dobijen originalnom WD, dok je ΔR oblast čijom veličinom je uvećan region R , kao posljedica implementiranja pseudo forme WD. ΔR je direktno proporcionalno sa $W_e(\omega)$, odnosno obrnuto proporcionalno širini upotrebljavanog lag-prozora $w_e(\tau)$. Primjenom metoda (V.30) propuštamo veću količinu šuma kroz sistem, nego što je neophodno sa teorijskog aspekta. Drugim riječima, sa aspekta svodenja količine šuma, unesene u sistem, na prihvatljivu mjeru, zahtijeva se smanjenje širine lag-prozora $w_e(\tau)$, odnosno proširivanje funkcije $W_e(\omega)$. Sa druge strane, ovim postupkom se vrši značajan uticaj i na analizirani signal. Naime, proširivanjem $W_e(\omega)$ povećavamo

region R_p funkcije oslonca. Time se mogu degradirati performanse posmatranog signala u trenutku t , pošto se, širenjem R_p , na izlazu sistema mogu pojaviti i frekvencijske komponente signala koje ne pripadaju posmatranom vremenskom trenutku. Odnosno, zahtjevi za izborom širine lag-prozora $w_e(\tau)$ su suprostavljeni sa aspekta redukovanja energije šuma i sa aspekta predstavljanja analiziranog signala. Širina prozora $w_e(\tau)$ mora biti određena kompromisnim izborom (optimizacijom) u cilju zadovoljenja oba zahtjeva. Centralno mjesto u rješavanju ovog problema zauzima adaptivni algoritam, razmatran u poglavlju IV.5., ovoga puta u svom značajno pojednostavljenom obliku, [143], [154]. Ovom problemu se posvećuje prostor u kasnijim izlaganjima.

V.3. ODREĐIVANJE FUNKCIJE OSLONCA

Iz dosadašnjeg izlaganja je jednostavno zaključiti da je određivanje funkcije oslonca, odnosno veličine njenog domena, od fundamentalnog značaja prilikom projektovanja optimalnog nestacionarnog filtra. Ovdje ćemo predložiti njen odgovarajući izbor bazirajući se na poželjnim karakteristikama vremenski-promjenljivog filtriranja:

1. Da izlazni signal odgovara korisnom signalu $f(t)$, $(Hf)(t) = f(t)$, i
2. Da je uticaj šuma na filtrirani signal (okarakterisan varijansom šuma) smanjen na najmanju moguću mjeru.

Analizirajmo proizvoljni FM signal $f(t) = A(t)\exp(j\phi(t))$ sporopromjenljive amplitude $A(t)$. Razvijajući $\phi(t + \tau)$ u Taylorov red u okolini tačke $t = 0$ dobijamo sljedeći oblik kratkotrajne FT:

$$STFT_f(t, \omega) = f(t) \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j(\omega - \phi^{(1)}(t))\tau} \exp(j \sum_{i=2}^{\infty} \frac{\phi^{(i)}(t)}{i!} \tau^i) w(\tau) d\tau. \quad (\text{V.33})$$

Izlazni signal iz sistema je:

$$(Hf)(t) = \frac{f(t)}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(j \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\phi^{(i)}(t)}{i!} \tau^i) w(\tau) L_R(t, \tau) d\tau, \quad (\text{V.34})$$

gdje je:

$$L_R(t, \tau) = \int_{-\infty}^{\infty} L_H(t, \omega) e^{-j\omega\tau} d\omega = \int_{\omega \in R} e^{-j\omega\tau} d\omega \quad (\text{V.35})$$

Forierova transformacija funkcije oslonca po ω -pravcu. Podsjetimo da se domen R funkcije oslonca nalazi u veoma uskoj okolini trenutne frekvencije $\phi^{(1)}(t)$ analiziranog signala. Polazeći od definicionog izraza (V.21) funkcije oslonca, zaključujemo da veličina domena R dominantno zavisi od primijenjenog TF metoda i od oblika analiziranog signala $f(t)$. Poznato je, naime, da se distribucijama postiže visoka koncentracija analiziranog signala na trenutnoj

frekvenciji, kao i da se ona razlikuje za različite TF metode. Tako se, na primjer, Wignerovom distribucijom postiže maksimalna koncentracija linearog FM signala, dok je postizanje veće koncentrisanosti nelinearnih FM signala osnovni razlog definisanja distribucija višeg reda. Sve ostale kvadratne distribucije imaju niži stepen koncentracije FM signala u poređenju sa WD. Takođe, napomenimo da sve distribucije idealno koncentrišu konstantni FM signal, pošto ovaj signal pripada grupi underspread procesa. Primjetimo, takođe, da je samo u ovom slučaju potpuno tačna analiza iz poglavlja V.1., odnosno da je samo tada apsolutno primjenljiv definicioni izraz (V.21) funkcije oslonca optimalnog nestacionarnog filtra.

U cilju izvođenja adekvatnih zaključaka pretpostavimo, najprije, da širina funkcije oslonca nije manja od širine auto-člana analiziranog signala (postignutog TF reprezentacijom signala kratkotrajnom FT, jednačina (V.29)). Tada $L_R(t, \tau)$ uzima veoma jednostavan oblik,

$$L_R(t, \tau) = 2\pi\delta(\tau), \quad (\text{V.36})$$

tako da je izlazni signal identičan analiziranom signalu $f(t)$,

$$(Hf)(t) = f(t), \quad (\text{V.37})$$

uz zadovoljenje uslova $w(0) = 1$.

Sa druge strane, pretpostavljajući da se domen R poklapa sa trenutnom frekvencijom $\phi^{(1)}(t)$, imamo:

$$L_R(t, \tau) = \exp(-j\phi^{(1)}(t)\tau). \quad (\text{V.38})$$

Shodno tome, na izlazu optimalnog nestacionarnog filtra dobijamo korisni signal $f(t)$ modifikovane amplitude,

$$(Hf)(t) = \frac{f(t)}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(j \sum_{i=2}^{\infty} \frac{\phi^{(i)}(t)}{i!} \tau^i) w(\tau) d\tau. \quad (\text{V.39})$$

U slučaju linearog FM signala $f(t) = A(t) \exp(jat^2/2)$, posljednji izraz se značajno pojednostavljuje. Međutim, i u tom slučaju potreban faktor skaliranja na izlazu sistema u potpunosti zavisi od analiziranog signala, odnosno njegovog nagiba a . Aproksimativna veličina faktora skaliranja se može odrediti analitičkim putem, ali samo u slučaju signala sa veoma malim ili sa velikim nagibom u TF ravni. U svim ostalim slučajevima, fakrot skaliranja se određuje na veoma komplikovan način. Primjetimo da na izlazu dobijamo nemodifikovani filtrirani signal samo u slučaju analize konstantnog FM signala. Tada se, naime, postiže ideana reprezentacija ovog signala kratkotrajnom FT, tako da se domen R funkcije oslonca poklapa sa trenutnom frekvencijom analiziranog signala. Drugim riječima, u cilju dobijanja korisnog signala $f(t)$ (nemodifikovane amplitude) na izlazu sistema, adekvatan izbor predstavlja funkcija oslonca širine ne manje od širine auto-člana analiziranog signala (postignutog kratkotrajnom FT, jednačina (V.29)).

Analizirajmo sada drugu poželjnu osobinu projektovanog filtra – oslobađanje filtriranog signala uticaja aditivnog šuma. Mjera uticaja šuma na izlazu sistema je njegova varijansa, tako da je u cilju izvođenja odgovarajućih zaključaka neophodno pronaći varijansu diskretnog oblika²³ izraza (V.29),

$$(Hx)(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} L_H(n, k) STFT_x(n, k). \quad (\text{V.40})$$

Primjenjujući analizu iz glave III, varijansu izraza (V.40) možemo predstaviti u sljedećoj formi:

$$\text{var}\{(Hx)(n)\} = \sum_{k_1=-\infty}^{\infty} \sum_{k_2=-\infty}^{\infty} L_H(n, k_1) L_H(n, k_2) E\{STFT_e(n, k_1) STFT_e^*(n, k_2)\}. \quad (\text{V.41})$$

U slučaju bijelog, Gaussovog šuma, varijanse σ_e^2 , posljednji izraz se svodi na sljedeći veoma jednostavan oblik:

$$\text{var}\{(Hx)(n)\} = \sigma_e^2 \sum_{k_1=-\infty}^{\infty} \sum_{k_2=-\infty}^{\infty} L_H(n, k_1) L_H(n, k_2) W_w^2(k_1 - k_2), \quad (\text{V.42})$$

gdje je $W_w^2 = FT[w^2(n)]$. Primijetimo da se, primjenom originalne definicije (V.24), posljednji izraz dodatno pojednostavljuje,

$$\text{var}\{(Hx)(n)\} = \sigma_e^2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} L_H^2(n, k). \quad (\text{V.43})$$

Zaključimo da je, u cilju minimiziranja uticaja izlaznog šuma na filtrirani signal, potrebno suziti domen R funkcije oslonca do jedne tačke – trenutne frekvencije analiziranog signala. Preciznije, zadovoljavajući poželjne osobine vremenski-promjenljivog filtriranja, dobijaju se suprostavljeni zahtjevi u pogledu izbora širine funkcije oslonca u TF ravni, tako da se izbor vrši kompromisnim putem. U radu će biti predstavljena dva rješenja: *prvo*, sa minimalnom širinom funkcije oslonca i primjenom Wignerovog spektra u definiciji (V.21), prilikom analize linearnih FM signala i *drugo*, dobijeno simetričnim proširivanjem funkcije oslonca oko trenutne frekvencije analiziranog signala.

Primijetimo da je, prilikom analize konstantnog FM signala, domen R minimalne širine (i nalazi se na trenutnoj frekvenciji analiziranog signala). Minimalna širina funkcije oslonca, određena implementiranjem definicionog izraza (V.21), se postiže i u slučaju primjene Wignerovog spektra i analize linearog FM signala, [143]. Predloženo rješenje se može primijeniti, takođe, prilikom filtriranja proizvoljnog FM signala. Međutim, u tom slučaju se značajno modifikuje amplituda izlaznog signala $(Hx)(t)$. U praktičnim implementacijama predložemo simetrično proširivanje funkcije oslonca sa njene minimalne veličine, uzimanjem, na primjer, po još jedne tačke sa lijeve i sa desne strane

²³Varijansa se pronalazi u diskretnom domenu, u cilju prevazilaženja njene beskonačne veličine, koja se postiže sprovođenjem analize u kontinualnom domenu, [157].

trenutne frekvencije. Time se pravi kompromis u smislu zadovoljenja poželjnih osobina vremenski-promjenljivog filtriranja. Naime, proširivanjem funkcije oslonca sa jedne na tri tačke u TF ravni i upotrebom širokog prozora $w(\tau)$ u definiciju $STFT_x(t, \omega)$ (čime se dobija reprezentacija filtriranog signala sa veoma koncentrisanim auto-članom) gotovo se prevazilazi potreba za skaliranjem filtriranog signala. Istovremeno se varijansa šuma zadržava na razumnoj veličini, pošto se energija šuma redukuje sa faktorom:

$$Q = \frac{\iint_D d\omega dt}{\iint_R d\omega dt} \quad (\text{V.44})$$

gdje je sa D označena čitava vremensko-frekvencijska ravan.

Sa aspekta zadovoljenja poželjne osobine 2 (o minimizaciji veličine izlaznog šuma), zahtijevana je minimalna širina funkcije oslonca, $L_H(t, \omega) = \delta(\omega - \phi^{(1)}(t))$. Upoređujući ovaj slučaj sa izborom tri tačke (u posmatranom trenutku t) u kojima funkcija oslonca ima jediničnu vrijednost, jednostavno se izvodi zaključak da faktor Q uzima približno tri puta manju vrijednost u drugom slučaju. Napomenimo da se umanjenje faktora Q izvodi uz prepostavku idealnog filtriranja analiziranog signala, $(Hf)(t) = f(t)$ (odnosno, uz prepostavku zadovoljenja prvog željenog uslova vremenski-promjenljivog filtriranja). Ovaj odnos se, u logaritamskoj skali (potrebnoj za izražavanje odnosa signal-šum), projektuje umanjenjem za $10\log_{10}(3) = 4.77\text{ dB}$ u odnosu na slučaj izbora minimalne širine funkcije oslonca. Međutim, uzimajući u obzir neophodno skaliranje filtriranog signala prilikom implementacije minimalne širine funkcije oslonca (u cilju postizanja idealne forme izlaznog signala), analizirano umanjenje odnosa signal-šum ne uzima izračunatu veličinu, već značajno manju, zavisno od oblika analiziranog signala.

Prethodnu analizu ćemo ilustrovati na FM signalu $f(t) = A(t)\exp(j\phi(t))$ sporopromjenjive amplitude i sa veoma brzim promjenama faze, te minimalnom širinom funkcije oslonca optimalnog nestacionarnog filtra. U cilju pojednostavljenja analize pretpostavimo originalni oblik (V.24) vremenski-promjenljivog filtriranja, kao i implementaciju Wignerovog spektra u definiciji (V.21). Ovim prepostavkama postižemo da se, u slučaju linearног FM signala, domen R i teorijski poklapa sa tačkom u kojoj se nalazi trenutna frekvencija analiziranog signala. Primjenom metoda stacionarne faze, [108], FT analiziranog signala se može predstaviti u obliku:

$$FT[f(t)] = F(\omega) \cong \int_{-\infty}^{\infty} A(t_0) e^{j\phi(t_0) - j\omega t_0} \sqrt{\frac{2\pi j}{\phi^{(2)}(t_0)}} \delta(t_0 - (\phi^{(1)}(\omega))^{-1}) dt_0, \quad (\text{V.45})$$

gdje je sa $(\phi^{(1)}(\omega))^{-1}$ označena inverzna transformacija trenutne frekvencije $\phi^{(1)}(t)$. Prilikom analize asimptotskih signala, ovom veličinom je predstavljeno grupno kašnjenje, [35], [37], [65]. Pretpostavljajući da WD ulaznog signala

$x(t) = f(t) + \varepsilon(t)$ veoma lokalizuje domen TF ravni u kome funkcija oslonca ima jediničnu vrijednost, definisimo samu funkciju oslonca $L_H(t, \omega)$ sa:

$$L_H(t, \omega) = \delta(\omega - \phi^{(1)}(t)). \quad (\text{V.46})$$

Primijetimo da funkcija oslonca (V.46), u diskretnom domenu ima oblik Kroneckerovog delta impulsa, čime se zadovoljava uslov jedinične vrijednosti amplitude. Zamjenom dvije posljednje jednačine u jednačinu (V.24), dobijamo:

$$(Hx)(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\omega - \phi^{(1)}(t)) A(t_0) e^{j\phi^{(1)}(t_0) - j\omega t_0} \sqrt{\frac{2\pi j}{\phi^{(2)}(t_0)}} \delta(t_0 - (\phi^{(1)}(\omega))^{-1}) e^{j\omega t} dt_0 d\omega + \varepsilon_{out}(t). \quad (\text{V.47})$$

Polazeći od činjenice da je $(\phi^{(1)}(\omega))^{-1}$ inverzna transformacija trenutne frekvencije $\phi^{(1)}(t)$, jednostavno se pokazuje da je, u slučaju monotone funkcije $\phi^{(1)}(t)$,

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(t_0) \delta(\omega - \phi^{(1)}(t)) \delta(t_0 - (\phi^{(1)}(\omega))^{-1}) dt_0 d\omega = F(t), \quad (\text{V.48})$$

kao i:

$$(Hx)(t) = A(t) e^{j\phi(t)} \sqrt{\frac{2\pi j}{\phi^{(2)}(t)}} + \varepsilon_{out}(t). \quad (\text{V.49})$$

U slučaju linearogn FM signala, $\phi(t) = at^2/2$, $\phi^{(2)}(t) = a = \text{const.}$, unutar posmatranog intervala, dobijamo:

$$y(t) = (Hx)(t) = cA(t) \exp(j\phi(t)) = cf(t). \quad (\text{V.50})$$

gdje je c konstanta. Primijetimo, sada, da se modifikacijom analiziranog signala $x(t)$ (u definiciji (V.6)) dobija neizobličeni korisni signal. Naime, faza filtriranog signala je identična fazi korisnog signala. Međutim, i tada je neophodno izvršiti skaliranje dobijenog signala konstantom c u cilju dovođenja njegove applitude na odgovarajuću veličinu. Određeni faktor skaliranja ima veoma usak opseg primjenljivosti, $a \approx 1$. Na sličan način se može odrediti adekvatni faktor skaliranja za konstantni FM signal (ovoga puta nezavisan od analiziranog signala), ponovo sa uskim opsegom primjenljivosti, $a \approx 0$. Kompenzacija amplitude se vrši estimiranjem pravca trenutne frekvencije u TF ravni. Pretpostavljajući da je poznata oblast u kojoj funkcija oslonca ima konstantnu vrijednost, estimacija pravca trenutne frekvencije ne predstavlja značajan problem, [143].

Energija šuma unutar oblasti R , definisane delta impulsom $\delta(\omega - \phi^{(1)}(t))$, je zanemarljiva i redukuje se sa faktorom

$$Q = \frac{\iint_D d\omega dt}{\iint_D \delta(\omega - \phi^{(1)}(t)) d\omega dt} \gg 1. \quad (\text{V.51})$$

Sprovodeći analizu, adekvatnu prethodnoj, samo za slučaj pseudo forme optimalnog nestacionarnog filtra (V.29), postižu se identični rezultati uz zadovoljavanje uslova $w(0) = 1$, [143].

Komentari

Naglasimo, najprije, dvostrislenost u definiciji funkcije oslonca (V.46). Umjesto delta funkcije duž trenutne frekve-ncije $\phi^{(1)}(t)$ analiziranog signala, funkcija oslonca oblika delta impulsa može biti posmatrana u inverznom pravcu, duž grupnog kašnjenja $(\phi^{(1)}(\omega))^{-1}$,

$$L_H^{(g)}(t, \omega) = \delta(t - (\phi^{(1)}(\omega))^{-1}). \quad ^{24} \quad (V.52)$$

Takođe, interesantno je, sa teorijskog aspekta, ukazati na geometrijsku sredinu funkcija oslonca $L_H(t, \omega)$ i $L_H^{(g)}(t, \omega)$,

$$L_{H_g}(t, \omega) = \sqrt{\frac{1}{2\pi j} \delta(\omega - \phi^{(1)}(t)) \delta(t - (\phi^{(1)}(\omega))^{-1})}. \quad (V.53)$$

Sprovodeći analizu sličnu prethodnoj, jednostavno je izvesti²⁵ da se funkcijom oslonca (V.53) i analizom visoko koncentrisanog FM signala dobija neizobličeni korisni signal,

$$y(t) = (Hx)(t) = A(t) \exp(j\phi(t)). \quad (V.54)$$

Napomenimo da se prethodna analiza izvodi zadovoljavajući uslov primjenljivosti metoda stacionarne faze, tako da se njen domen primjenljivosti poklapa sa domenom primjenljivosti metoda stacionarne faze.

Poboljšanje G , postignuto vremensko-promjenljivim filtriranjem, može biti definisano razlikom odnosa signal-šum na izlazu i na ulazu vremenski-promjenljivog filtra,

$$G = SNR_{\text{out}} - SNR_{\text{in}}. \quad (V.55)$$

Saglasno izrazima (V.51) i (V.54), dobijamo:

$$G = 10 \log Q. \quad (V.56)$$

Vrijednost prethodnog izraza može biti značajna, pošto je $Q \gg 1$.

²⁴Sa (g) u izložiocu, označavamo da je funkcija oslonca locirana u okolini grupnog kašnjenja $(\phi^{(1)}(\omega))^{-1}$, dok je sa g u indeksu, jednačina (V.53), označena funkcija oslonca, definisana geometrijskom sredinom jednačina (V.46) i (V.52).

²⁵Prilikom izvođenja izraza (V.54) je uvažavana činjenica da je $\delta(t - (\phi^{(1)}(\omega))^{-1}) = \delta(\omega - \phi^{(1)}(t))\phi^{(2)}(t)$ i stoga:

$$L_{H_g}(t, \omega) = \delta(\omega - \phi^{(1)}(t))\sqrt{\phi^{(2)}(t)/(2\pi j)}.$$

Podsjetimo, na koncu, da se potpuna koncentracija signala na trenutnoj frekvenciji, prilikom implementacije WD, postiže jedino u slučaju linearnih FM signala, glave I i III, tako da se funkcija oslonca $L_H(t)$ može definisati izrazom (V.46) samo u ovom slučaju. U cilju postizanja potpune koncentracije (bliske idealnoj) nestacionarnih FM signala sa nelinearnom promjenom trenutne frekvencije, $\sim \delta(\omega - \phi^{(1)}(t))$, neophodno je primijeniti distribucije višeg reda, S-distribuciju, [135], [136], ili L-Wignerovu distribuciju, [128], [130], [133], [134] i glava I. Tada je, za $L \rightarrow \infty$,

$$\lim_{L \rightarrow \infty} SD(t, \omega) = A^2(t) \delta(\omega - \phi^{(1)}(t)),$$

$$\lim_{L \rightarrow \infty} LWD(t, \omega) = A^{2L}(t) \delta(\omega - \phi^{(1)}(t)). \quad (\text{V.57})$$

Idealna koncentracija distribucije na trenutnoj frekvenciji se, u slučaju analiziranog signala sa polinomialnom promjenom faze, postiže polinomialnom Wigner-Villeovom distribucijom, [18], [122] i lokalnim polinomialnim distribucijama, [80], [81].

V.4. VREMENSKI-PROMJENLJIVO FILTRIRANJE MONOKOMPONENTNIH SIGNALA

Posmatrajmo slučajni proces $\{f(n)\}$ maskiran bijelim šumom nulte srednje vrijednosti. Pretpostavljajući međusobnu nekoreliranost posmatranih procesa, mogu se razlikovati dva slučaja:

- I. Poznavanje velikog broja realizacija signala $f(t)$, i
- II. Poznavanje samo jedne realizacije analiziranog signala sa šumom.

Oblast R funkcije oslonca se, u prvom slučaju, može veoma jednostavno odrediti. U cilju izvođenja adekvatnih zaključaka, pretpostavimo implementaciju Wignerovog spektra. Wignerov spektar, naime, ima najjednostavniji matematički oblik i konačni zaključci se najpogodnije izvode u tom slučaju. Spektar signala $x(t) = f(t) + \varepsilon(t)$, tada, može biti predstavljen sumom Wignerovog spektra korisnog signala $f(t)$ i varijanse bijelog šuma σ_ε^2 , glava III:

$$\overline{WD}_{xx}(t, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} E\{x(t + \tau/2)x^*(t - \tau/2)\} e^{-j\omega\tau} d\tau = \overline{WD}_{ff}(t, \omega) + \sigma_\varepsilon^2. \quad (\text{V.58})$$

Drugim riječima, funkcija oslonca $L_H(t, \omega)$ se jednostavno može pronaći iz (V.21).

Analiza i određivanje funkcije oslonca u drugom slučaju se značajno komplikuje. Međutim, ova situacija je veoma interesantna zbog svoje, gotovo absolutne, praktične implementabilnosti. U ovom slučaju se spektar distribucije određuje na osnovu samo jedne realizacije signala sa šumom (odnosno, identičan je samoj distribuciji analiziranog signala). Tada se filtriranje obavlja u dva koraka:

1. Vrši se najpreciznija moguća aproksimacija TF reprezentacije željenog signala $f(t)$ na osnovu samo jedne opservacije signala sa šumom, i
2. Upotrebljava se distribucija iz koraka 1. u cilju određivanja oblasti R funkcije oslonca i kasnijeg vremenski-promjenljivog filtriranja.

Korak 1. je fundamentalan, naročito u slučaju visokog šuma na ulazu sistema, odnosno veoma malog ulaznog odnosa signal-šum. Postoji više načina određivanja domena R funkcije oslonca. U [143] se predlaže pojednostavljenje adaptivnog algoritma, predstavljenog u poglavlju IV.5., kao efikasan način određivanja funkcije oslonca na trenutnoj frekvenciji analiziranog signala.

Predstavljajući pojednostavljeni algoritam na slučaju primjene Wignerovog spektra i analize linearnih FM signala, naglasimo da implementacija pojednostavljenog algoritma može biti proširena na sve kvadratne distribucije, [154]. Shodno do sada izvedenim zaključcima, domen R funkcije oslonca (određen implementiranjem definicionog izraza (V.21)), se, u ovom slučaju, poklapa sa domenom TF ravni u kom se nalazi trenutna frekvencija analiziranog signala. Posmatrani signal $f(t)$, maskiran aditivnim šumom, sa jednom njegovom poznatom realizacijom se može formalno modelirati *monokomponentnim diskretnim signalom* $f(n)$ *maskiranim slučajnim, bijelim, Gaussovim, kompleksnim šumom* $\epsilon(n)$, sa *nezavisnim realnim i imaginarnim djelovima*. U cilju adekvatnog određivanja domena R , potrebno je odrediti (sa maksimalnom mogućom tačnošću) WD korisnog signala $PWD_{ff}(t, \omega)$. Tom prilikom se mora imati u vidu da se upotrebom lag-prozora $w_e(\tau)$, u definiciji (V.30) unose dvije vrste greške, [154], [158] i glava III: jedna, uslovljena biasom; i druga, uslovljena varijansom šuma. Bias i varijansa distribucije ne mogu istovremeno dostići svoje minimalne vrijednosti, pošto su zahtjevi za njihovom minimizacijom suprostavljeni. Minimiziranjem srednje kvadratne greške estimatora, pronalazimo optimalnu širinu lag-prozora (upotrijebljenog u definiciji pseudo WD), glava III. Međutim, ovako određena veličina (III.37) nije praktično primjenljiva, tako da je implementacija adaptivnog algoritma u ovom slučaju neophodna.

Upoređujući jednačinu (IV.61) sa adekvatnim izrazima za bias i varijansu pseudo WD estimatora, jednačine (III.14) i (III.35), zaključujemo da se adaptivni algoritam, predstavljen u poglavlju IV.5., može implementirati uzimajući da je $m = -1$, $n = -4$. Neophodno je napomenuti da je adaptivni algoritam u poglavlju IV.5. izведен u cilju kreiranja adaptivnog metoda za estimaciju trenutne frekvencije, a da se u ovom slučaju primjenjuje u cilju postizanja adaptivne reprezentacije signala sa šumom. Preciznije, u izrazima izvođenim u poglavlju IV.5. neophodno je estimator trenutne frekvencije, $\hat{\omega}_h(t)$, zamijeniti estimacijom WD korisnog signala, $PWD_{ff}(n, \omega; N)$, dok se tačna trenutna frekvencija $\omega(t)$ zamjenjuje poznatom realizacijom $PWD_{xx}(n, \omega; N)$. Zabilježimo, uz to, da se malom veličinom biasa (za koju su

zadovoljeni uslovi presijecanja susjednih intervala sigurnosti (IV.76)), smatraju one vrijednosti koje zadovoljavaju uslov: $\text{bias}(t, \omega; N) \leq \sigma_{xx}(N)/2$, jednačina (IV.65) za $m = -1, n = -4$. Sa druge strane, za sve druge vrijednosti biasa, intervali sigurnosti (dobijeni za različite veličine lag-prozora) nemaju zajedničkih tačaka.

Međutim, adaptivni algoritam iz poglavlja IV.5. se, u ovom slučaju, značajno pojednostavljuje izborom širine lag-prozora iz skupa sa dva elementa, minimalnom i maksimalnom širinom prozora. Ovaj stav je baziran na osobini TF metoda o izrazitoj koncentrisanosti reprezentacije FM signala na trenutnoj frekvenciji i u njenoj veoma bliskoj okolini. Naime, prilikom analize posmatranog FM signala, mogu se razlikovati dva dijela TF ravni. U jednom je koncentrisana cjelokupna energija analiziranog signala (dio ravni sa brzim promjenama distribucije), dok je u drugom dijelu ravni distribucija korisnog signala (bez šuma) jednaka nuli. Drugim riječima, u prvom dijelu TF ravni, veličina $b_f(n, \omega)$, jednačina (III.13), ima značajnu vrijednost, dok je u drugom dijelu $b_f(n, \omega) = 0$ (ili, preciznije rečeno $b_f(n, \omega) \equiv 0$), pošto je $PWD_{ff}(n, \omega; N) \equiv 0$ (ili su, u najgorem slučaju, promjene $PWD_{ff}(n, \omega; N)$ veoma male). Odnosno, u prvom dijelu TF ravni, bias pseudo Wignerovog estimatora ima veliku vrijednost, tako da je, u cilju smanjenja njegove veličine, poželjno upotrijebiti reprezentacije sa velikom širinom prozora, označenom sa N_2 . U drugom dijelu TF ravni imamo da je $\text{bias}(n, \omega; N) = 0$, tako da je, u cilju smanjenja varijanse, odgovarajuća širina lag-prozora - veoma male vrijednosti N_1 (teoretski, $N_1 = 0$). Tačnije, prethodnim opservacijama se adaptivni algoritam uprošćava do izbora širine lag-prozora iz skupa od dvije moguće vrijednosti, $\mathbf{N} = \{N_1, N_2\}$, gdje je $N_1 \ll N_2$. Ovakav izbor je moguć pošto su bias (III.14) i varijansa (III.35), respektivno monotono opadajuća i monotono rastuća funkcija u odnosu na širinu lag-prozora N . Ovim metodom se značajno poboljšava TF reprezentacija FM signala u poređenju sa metodima sa konstantnom širinom prozora. Postignuti rezultati se bitno ne razlikuju od slučaja primjene originalnog adaptivnog algoritma (poglavlje IV.5), a implementabilnost pojednostavljenog algoritma je značajno veća i jednostavnija, [154].

Primijetimo da se u tačkama (n, ω) sa veoma malim biasom, $\text{bias}(n, \omega; N) \equiv 0$, posmatrani intervali sigurnosti (za N_1 i N_2) presijecaju, te da je odgovarajuća veličina prozora N_1 . Nasuprot tome, u tačkama (n, ω) sa značajnim biasom, intervali sigurnosti se ne presijecaju, tako da je odgovarajući izbor širine lag-prozora $N_2 \gg N_1$. Drugim riječima, adaptivna distribucija (sa vremenski-promjenljivom širinom lag-prozora) se definiše sa:

$$PWD_{xx}^+(n, \omega) = \begin{cases} PWD_{xx}(n, \omega; N_1), & \text{za } \Phi = T \\ PWD_{xx}(n, \omega; N_2), & \text{drugdje} \end{cases} \quad (\text{V.59})$$

gdje je sa $\Phi = T$ označeno presijecanje intervala sigurnosti,

$$|PWD_{xx}(n, \omega; N_1) - PWD_{xx}(n, \omega; N_2)| \leq (\kappa + \frac{1}{2})[\sigma_{xx}(N_1) + \sigma_{xx}(N_2)]. \quad (\text{V.60})$$

Jedini parametar zahtijevan adaptivnim TF metodom (V.59)-(V.60) je varijansa $\sigma_{xx}(N)$. Postoji nekoliko načina za određivanje njene veličine. Jedan od načina, za slučaj **malog šuma**, je predstavljen u [84], [85], [153], [154], [156] i poglavlju IV.5. U slučaju **velikog šuma**, $\sigma_v^2 > A^2$, varijansa šuma $\sigma_{xx}(N)$ se estimira, [143], polazeći od (III.35),

$$\frac{\sigma_{xx}^2(N)}{E_w(N)} = \sigma_v^2(2A^2(n) + \sigma_v^2) \cong (\sigma_v^2 + A^2(N))^2 \cong \left(\sum_{k=-N/2}^{N/2-1} \frac{1}{N} |x(n+k)|^2 \right)^2, \quad (\text{V.61})$$

gdje je energija prozora $E_w(N) \sim N$. Posljednja jednakost u (V.61) je izvedena iz definicionog izraza za energiju signala maskiranog šumom (u kontinualnom domenu). Estimirana veličina varijanse $\sigma_{xx}(N_2)$ je pouzdanija, pošto se, u tom slučaju, suma (V.61) pronalazi u većem broju tačaka. Estimaciju $\sigma_{xx}(N_1)$ određujemo posredno, implementiranjem relacije $\sigma_{xx}^2(N_1) = \sigma_{xx}^2(N_2)N_1/N_2$. Primjetimo da bi se veličina $\sigma_{xx}(N)$, u ovom slučaju, može estimirati izračunavanjem varijanse distribucije $PWD_{xx}(n, \omega; N_2)$, i to usrednjavanjem po frekvenciji ω za posmatrani vremenski trenutak n . Ovo je omogućeno, ranije izvedenom činjenicom, da je $\sigma_{xx}(N)$ frekvencijski nezavisna veličina. Tada se usrednjavanjem posmatrane distribucije po frekvenciji dobija procjena varijanse $\sigma_{xx}(N_2)$.

V.5. VREMENSKI-PROMJENLJIVO FILTRIRANJE MULTIKOMPONENTNIH SIGNALA

Postojanje veoma izraženih efekata interferencije, prilikom analize multikomponentnih signala, se najčešće označava osnovnim nedostatkom kvadratnih TF reprezentacija. Međutim, analizom slučajnog procesa $\{f(t)\}$ sa velikim brojem poznatih opservacija, omogućena je implementacija spektra $\bar{\rho}(t, \omega)$ upotrijebljene distribucije, [99]. U cilju izvođenja adekvatnih zaključaka tom prilikom, pretpostavimo međusobnu nekoreliranost komponenti $f_i(t)$ analiziranog multikomponentnog signala, $f(t) = \sum_{i=1}^M f_i(t)$. Usrednjavanjem opservacija posmatrane distribucije eliminisu se njene kros-komponente, tako da se spektar $\bar{\rho}_{ff}(t, \omega)$, u ovom slučaju, može predstaviti u sljedećoj formi:

$$\bar{\rho}_{ff}(t, \omega) = \sum_{i=1}^M \bar{\rho}_{f_i}(t, \omega), \quad (\text{V.62})$$

gdje je $\bar{\rho}_{f_i}(t, \omega)$ spektar vremensko-frekvencijske reprezentacije signala $f_i(t)$ i

$$E\{f_i(t + \tau/2)f_j^*(t - \tau/2)\} = \begin{cases} E\{f_i(t + \tau/2)f_j^*(t - \tau/2)\}, & i = j \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$$

Označavajući regione funkcije oslonca pojedinih komponenti multikomponentnog signala sa R_i i prepostavljajući da se komponente analiziranog signala ne presjecaju u TF ravni ($R_i \cap R_j = \emptyset$, za $i \neq j$), region R funkcije oslonca optimalnog nestacionarnog filtra ima sljedeću formu:

$$R = R_1 \cup R_2 \cup \dots \cup R_M = \bigcup_{i=1}^M R_i, \quad (\text{V.63})$$

tako da se funkcija oslonca može definisati izrazom:

$$L_H(t, \omega) = \begin{cases} 1, & \text{za } (t, \omega) \in R = \bigcup_{i=1}^M R_i \\ 0, & \text{za } (t, \omega) \notin R = \bigcup_{i=1}^M R_i. \end{cases} \quad (\text{V.64})$$

Zaključimo da je vremenski-promjenljivo filtriranje direktno primjenljivo na analizu multikomponentnih signala u slučaju poznavanja velikog broja realizacija slučajnog procesa $\{f(t)\}$. Polazeći od jednostavnosti sprovođenja TF analize i samog oblika distribucije, kao i postignute reprezentacije komponenti analiziranog signala, najčešće se primjenjuje Wignerov spektar, [67], [73], [88], [89], [124], [143]. Međutim, ovo je samo teorijski aspekt posmatranja. U praksi imamo suprotnu situaciju.

Vremensko-promjenljivo filtriranje se, u realnom vremenu, najčešće vrši poznavajući samo jednu realizaciju signala sa šumom, tako da je nemoguća primjena Wignerovog spektra, već samo originalne WD. Sa druge strane, implementiranjem WD (i ostalih kvadratnih distribucija), značajno degradiramo TF reprezentaciju analiziranog signala, uslijed veoma izraženih efekata interferencije.

U cilju određivanja funkcije oslonca i efikasnog vremenski-promjenljivog filtriranja, neophodno je odabratи TF reprezentaciju $\rho(t, \omega)$ koja zadovoljava više poželjnih osobina:

1. zadovoljavajuće potiskivanje uticaja šuma,
2. jednostavnost i pogodnost za realizaciju u realnom vremenu,
3. koncentrisanost signala na trenutnoj frekvenciji blisku Wignerovom spektru.

Stoga, izbor adekvatne TF reprezentacije predstavlja najosjetljivije mjesto vremenski-promjenljivog filtriranja.

Najjednostavnija i najčešće upotrebljavana distribucija za realizaciju u realnom vremenu je spektrogram, tako da se, pod ovim uslovima, cijelokupna pažnja posvećuje filtriranju baziranom na spektrogramu i distribucijama koje su sa njim direktno povezane (S-metod). S-metod predstavlja idejno, možda, ponajbolje rješenje, pošto se njime postiže TF reprezentacija ekvivalentna sumi Wignerovih distribucija pojedinih komponenti multikomponentnog signala,

$$SM_{ff}(t, \omega) = \sum_{i=1}^M PWD_{f_i}(t, \omega). \quad (\text{V.65})$$

Implementiranje S-metoda je interesantno iz više razloga. Najprije, realizacija S-metoda, bilo hardverska ili numerička, se obavlja na veoma jednostavan način - koristeći kratkotrajnu FT ili Hartley-enu transformaciju kao međukorak u svojoj realizaciji, glava II. Slijedeći proceduru predstavljenu u slučaju monokomponentnih signala, adaptivni metod za TF analizu multikomponentnih signala ima sljedeći oblik:

$$SM_{xx}^+(n, \omega) = \begin{cases} SM_{xx}(n, \omega; N_1, L_{p1}), & \text{za } \Phi = T \\ SM_{xx}(n, \omega; N_2, L_{p2}), & \text{drugdje,} \end{cases} \quad (\text{V.66})$$

gdje je $N_1 \ll N_2$ i $L_{p1} < L_{p2}$. U dijelu TF ravni u kom postoje komponente signala sa značajnom veličinom biasa (svi oblici signala, sa izuzetkom konstantnog FM signala), upotrebljavamo $SM_{xx}(n, \omega; N_2, L_{p2})$ sa $L_{p2} \geq 2$, čime se postiže reprezentacija komponenti analiziranog signala veoma bliska reprezentaciji postignutoj pseudo WD, sa širinom lag-prozora N_2 . U dijelu TF ravni u kom ne postoje komponente signala preporučuje se obavljanje TF analize spektrogrptom, $L_{p1} = 0$ sa malom širinom N_1 lag-prozora. Time se postiže dodatno smanjenje varijanse šuma u poređenju sa WD, analiziranom sa istom širinom lag-prozora, glava III.

Ilustracija

Posmatrajmo signal čija je svaka komponenta oblika FM signala,

$$f(t) = \sum_{i=1}^M A_i(t) \exp(j\phi_i(t)). \quad (\text{V.67})$$

Prepostavimo da su amplitude $A_i(t)$ sporopromjenljive, za svako i , $i = 1, 2, \dots, M$, u poređenju sa brzim promjenama faza odgovarajućih komponenti analiziranog signala. Ovom prepostavkom je omogućena primjena metoda stacionarne faze na STFT signala (V.67), analogno analizi izvršenoj u slučaju monokomponentnih signala. Prepostavimo funkciju oslonca u obliku sume Kronecherovih δ-impulsa (za svaku pojedinačnu komponentu multikomponentnog signala),

$$L_H(t, \omega) = \sum_{i=1}^M \delta(\omega - \phi_i^{(1)}(t)), \quad (\text{V.68})$$

odnosno u formi (V.53), u cilju dobijanja neizobličenog multikomponentnog signala na izlazu projektovanog filtra,

$$(Hx)(t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{i=1}^M \sum_{k=1}^M \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\omega - \phi_k^{(1)}(t)) w(\tau_0) A_i(t + \tau_0) e^{j\phi_i(t+\tau_0) - j\omega\tau_0} \delta(t + \tau_0 - (\phi_i^{(1)}(\omega))^{-1}) \times \\ \times e^{j\omega t} d\tau_0 d\omega + \varepsilon_{\text{out}}(t) = \sum_{i=1}^M A_i(t) \exp(j\phi_i(t)) + \varepsilon_{\text{out}}(t). \quad (\text{V.69})$$

Naravno, prethodna ilustracija ima realan domen implementabilnosti samo prilikom filtriranja multikomponentnog signala čije se komponente oblika konstantnog FM signala, kao i u slučaju linearnih FM signala sa velikim nagibom u

TF ravni (uz neophodno skaliranje filtriranog signala, jednačina (V.50)). U tom slučaju se S-metodom postižu minimalne širine funkcija oslonca za sve komponente analiziranog signala.

Analiza je sprovedena uz pretpostavku nepresijecanja komponenti signala u TF ravni. Ovo može biti shvaćeno na sljedeći način, [143]: Za $t \in \tau_0$ takve da je: $\phi_k^{(1)}(t) = \phi_i^{(1)}(t + \tau_0)$, zadovoljen je uslov: $w(\tau_0)A_i(t + \tau_0) = 0$, unutar lag-prozora $w(\tau_0)$, za svako τ_0 .

V.6. NUMERIČKA IMPLEMENTACIJA

Posmatrajmo sljedeće signale:

- linearni FM signal,

$$f(t) = \exp(j128\pi t^2), \quad (\text{V.70})$$

- sinusoidalni FM signal,

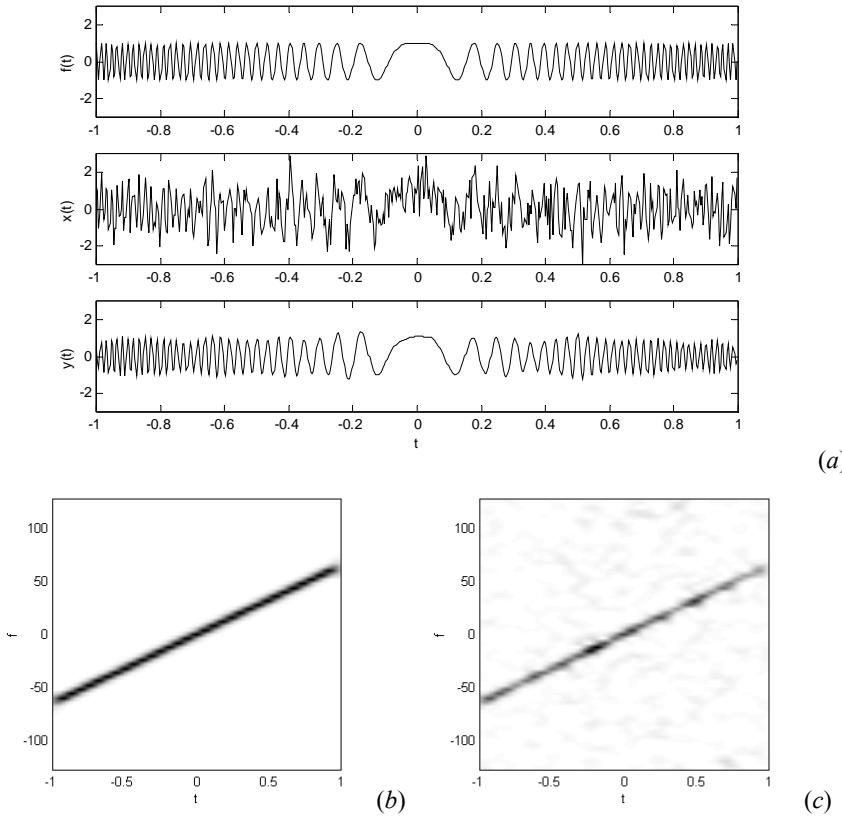
$$f(t) = \cos(102.4 \cos(\pi t) + 128\pi t), \quad (\text{V.71})$$

- multikomponentni signal koji se sastoji od dva čirp-impulsa na različitim frekvencijama,

$$f(t) = e^{j64\pi t} \exp(-10(t - 0.5)^2) + e^{-j16\pi t} \exp(-10(t + 0.5)^2). \quad (\text{V.72})$$

U posmatranim slučajevima odnos signal-šum na ulazu sistema iznosi $SNR_{\text{in}}[\text{dB}] = 0 \text{ dB}$. Na slikama V.1.(a), V.2.(a), V.3.(a) su prikazani vremenski oblici korisnog signala (gornji dijagram), signala sa šumom (srednji dijagram) i filtriranog signala (donji dijagram). Na slikama V.1 i V.3 je prikazan realan dio signala (V.70) i (V.72), respektivno. Na slikama V.1.(b), V.2.(b), V.3.(b) su prikazani spektrogrami analiziranih signala bez šuma, dok su na slikama V.1.(c), V.2.(c), V.3.(c) prikazani spektrogrami analiziranih signala maskiranih aditivnim bijelim šumom. Prilikom implementacije je odabran Hanningov prozor širine $N = 65$ odbiraka. Isti prozor je upotrijebljen u definiciji spektrograma, kao i u definiciji $STFT_x(t, \omega)$ prilikom implementacije optimalnog nestacionarnog filtriranja, jednačina (V.29).

Određivanje domena funkcije oslonca se temelji na pronalaženju maksimuma spektrograma po frekvenciji za proizvoljni trenutak t (glava IV). Oblast R je, potom, simetrično raširena (na tri tačke u TF ravni) oko trenutne frekvencije analiziranog signala. Proširivanjem na tri tačke su postignuti ponajbolji rezultati u poređenju sa daljim proširivanjem posmatranog opsega (na primjer, na pet tačaka u TF ravni). Ovakav izbor funkcije oslonca je pogodan sa još jednog aspekta: *ukoliko bi se oblast R svela na samo jednu tačku za posmatrani vremenski trenutak, u diskretnom slučaju bi se pojavio problem nepoklapanja trenutne frekvencije signala sa vremensko-frekvencijskim gridom*, [143]. Time se, još jedanput, podržava odluka za simetričnim proširivanjem oblasti R funkcije oslonca sa jedne tačke u TF ravni.



Slika V.1. Vremenski-promjenljivo filtriranje i TF reprezentacija linearnog FM signala (V.70),

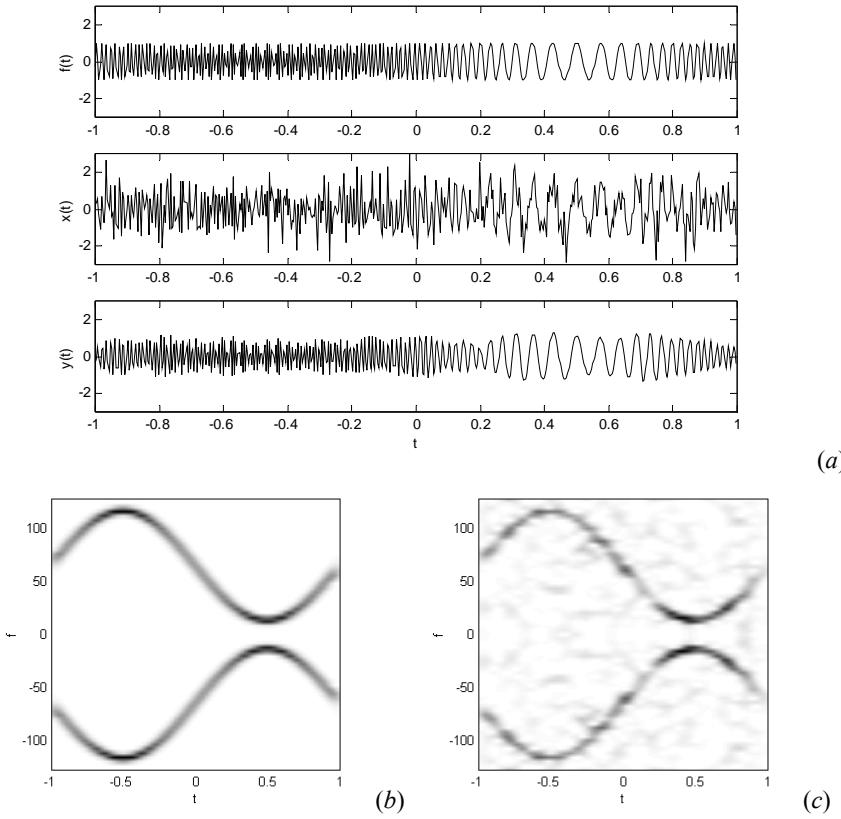
(a) korisni signal $f(t)$ (gornja slika), signal sa šumom $x(t)$ (slika u sredini) i filtrirani signal $(Hx)(t)$ (donja slika),

(b) spektrogram korisnog signala, (c) spektrogram signala sa šumom

Teorijski posmatrano, poboljšanje, postignuto filtriranjem signala (V.70) i (V.72) i izračunato implementiranjem izraza (V.56), iznosi $G = 10 \log(65/3) = 13.357 dB$, dok je poboljšanje postignuto filtriranjem signala (V.71) $G = 10 \log(65/3/2) = 10.348 dB$. Drugim riječima, izlazni odnos signal-šum, u posmatranim slučajevima, iznosi $SNR_{out} = 13.357 dB$ i $SNR_{out} = 10.348 dB$, respektivno. Izračunato poboljšanje G ima nešto manju veličinu u praktičnim realizacijama, što se opravdava izraženim uticajem efekata diskretizacije tom prilikom, [143].

V.7. HARDVERSKA IMPLEMENTACIJA OPTIMALNOG NESTACIONARNOG FILTRA

U cilju filtriranja nestacionarnih signala u realnom vremenu, neophodno je projektovati hardver za realizaciju vremenski-promjenljivog filtra. Filtriranje je, u ovoj glavi, realizovano određivanjem domena funkcije oslonca projektovanog filtra, simetrično raširenog u okolini trenutne frekvencije analiziranog signala.

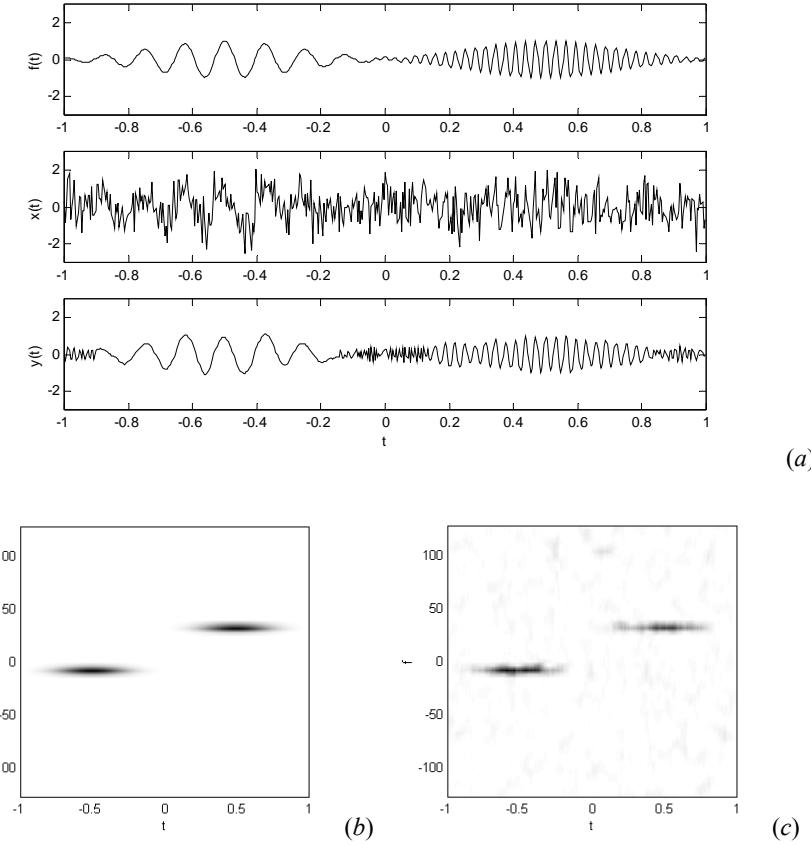


Slika V.2. Vremenski-promjenljivo filtriranje i TF reprezentacija sinusoidalnog FM signala (V.71),
 (a) korisni signal $f(t)$ (gornja slika), signal sa šumom $x(t)$ (slika u sredini) i filtrirani signal $(Hx)(t)$ (donja slika),
 (b) spektrogram korisnog signala, (c) spektrogram signala sa šumom

Takođe, zaključeno je da se S-metodom postiže reprezentacija komponenti signala gotovo identična reprezentaciji auto-članova, postignutih implementacijom WD. Poredeći je sa ostalim kvadratnim distribucijama iz Cohenove klase, postignuta koncentracija signala (na trenutnoj frekvenciji) je ponajbolja u ovom slučaju. Drugim riječima, poređenjem TF reprezentacije signala, postignute S-metodom, sa unaprijed zadatom referentnom vrijednošću R (glava II i [166], [167]), dobijamo kontrolni signal na izlazu komparatora,

$$c_k = \begin{cases} 1, & \text{za } SM_{xx}(n, k) \geq R \\ 0, & \text{za } SM_{xx}(n, k) < R, \end{cases} \quad (\text{V.73})$$

kojim je generisana odluka o (ne)propuštanju komponente $STFT(n, k)$ na izlaz sistema. Time se realizuje funkcija oslonca u k -tom kanalu potpune hardverske realizacije sistema, slika V.4. Stoga je predložena hardverska realizacija optimalnog nestacionarnog filtra, dizajnjirana na bazi hardverske implementacije S-metoda, projektovane u glavi II. Još jedna prednost ovog rješenja je u činjenici da S-metod, kao međukorak u svojoj realizaciji, upotrebljava STFT, veličinu



Slika V.3. Vremenski-promjenljivo filtriranje i TF reprezentacija multikomponentnog signala (V.72),

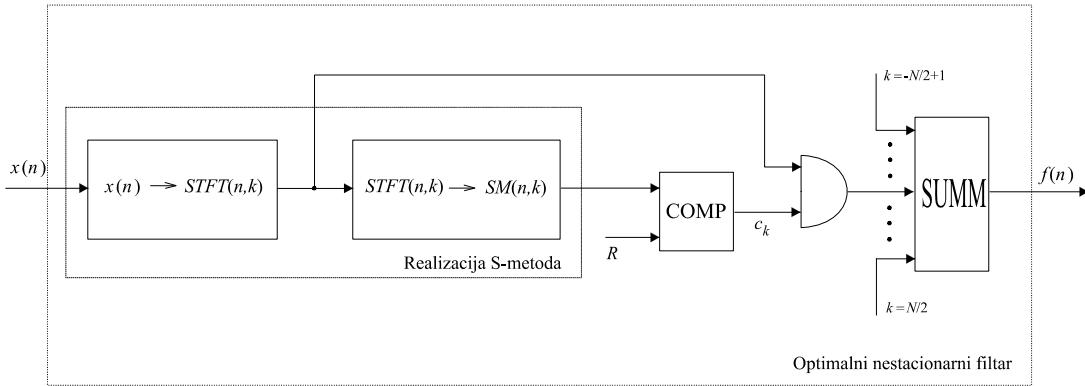
(a) korisni signal $f(t)$ (gornja slika), signal sa šumom $x(t)$ (slika u sredini) i filtrirani signal $(Hx)(t)$ (donja slika),
 (b) spektrogram korisnog signala, (c) spektrogram signala sa šumom

neophodnu za dizajniranje vremenski-promjenljivog filtra, jednačina (V.29). Primijetimo da predloženo hardversko rješenje ne intenzivira neophodno vrijeme procesiranja analiziranog signala, u poređenju sa realizacijom S-metoda za TF analizu signala.

Potpuni hardver za realizaciju jednog kanala optimalnog nestacionarnog filtra je prikazan na slici V.5. Sistem se sastoji od N kanala. Primijetimo da je u realizaciji filtra, baziranoj na definicionom izrazu:

$$(Hx)(n) = \sum_{k=-N/2+1}^{N/2} L_H(n, k) STFT_x(n, k), \quad (\text{V.74})$$

upotrijebljen samo realni dio kratkotrajne FT, $STFT_{\text{Re}}(n, k)$, iako se pronalaženjem STFT realnog signala dobijaju kompleksni koeficijenti spektra. Naime, uočavajući da je prethodno određena funkcija oslonca simetrična po frekvencijskoj osi, $L_H(n, -k) = L_H(n, k)$, imaginarni djelovi $STFT(n, k \pm i)$ se međusobno poništavaju, pa se filtrirani signal



Slika V.4. Blok šema hardvera za realizaciju optimalnog nestacionarnog filtra

dobija sumiranjem realnih djelova funkcija $STFT(n,k)$, za $k = 0, 1, \dots, N-1$. Naravno, $STFT_{Re}(n,k)$ dolazi na ulaz sabirača samo ukoliko kontrolni signal c_k ima jediničnu vrijednost.

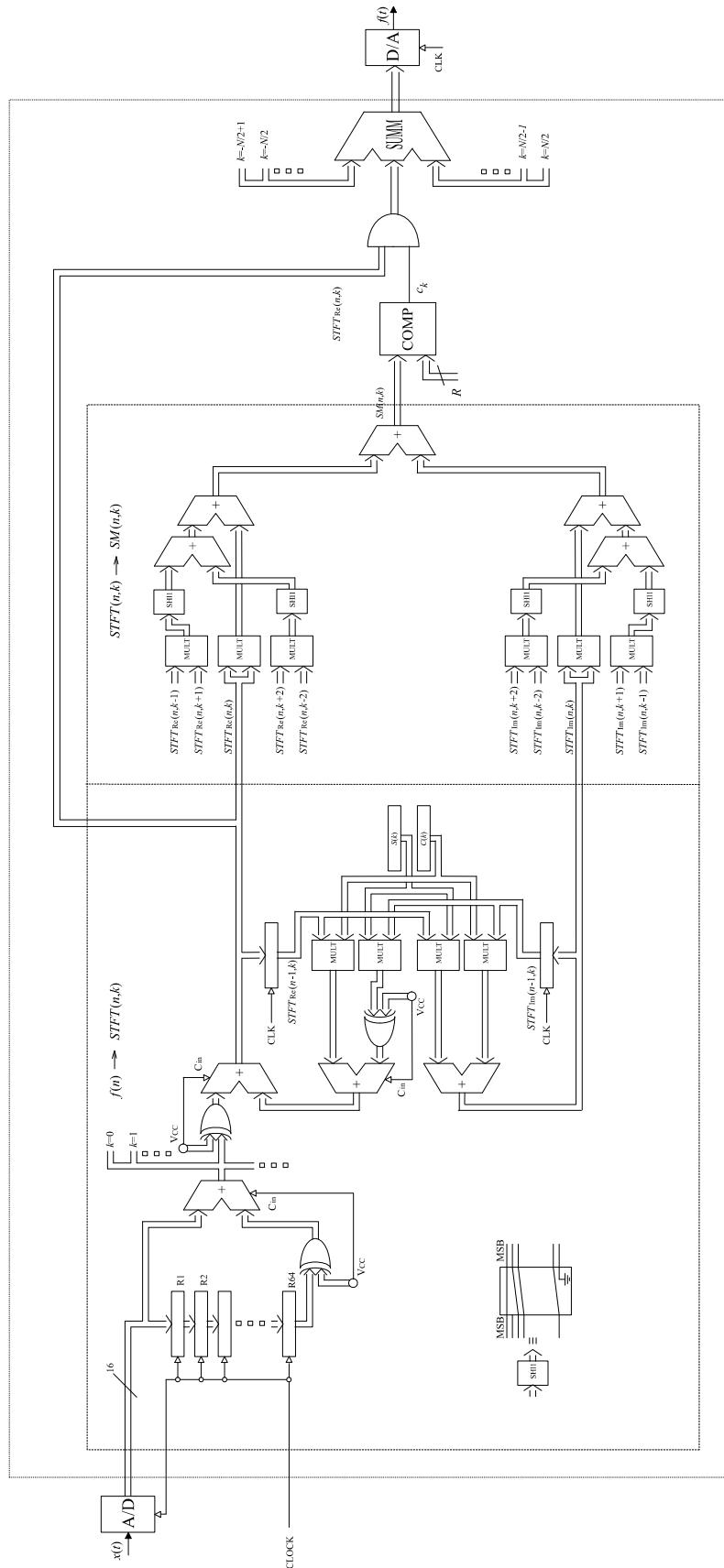
V.8. FILTRIRANJE GOVORNOG SIGNALA

U HANDS-FREE TELEFONSKIM SISTEMIMA

Govorni signal predstavlja veoma interesantan primjer nestacionarnog, multikomponentnog signala sa dinamičkim opsegom od 40 dB . Govorni signali su, u najvećem broju slučajeva, zahvaćeni šumom značajne snage. Ovo predstavlja neizbjegnu karakteristiku hands-free²⁶ telefonskih sistema. Naime, prilikom vožnje automobilom, mnogi izvori šuma kompromitiraju čujnost korisnog telefonskog signala. Izvori šuma, tom prilikom, mogu da budu posljedica okretanja točkova, rada motora, otpora vazduha prilikom kretanja vozila, Filtriranju posmatranog govornog signala, maskiranog aditivnim šumom, se posvećuje značajna pažnja u mnogim časopisima, monografijama i udžbenicima posvećenih obradi signala.

Prilikom filtriranja govornih signala maskiranih šumom se zahtijeva postizanje željenog kvaliteta filtriranog signala, predstavljenog odnosom signal-šum većim od 12 dB , [167], [175]. Najčešće upotrebljavani prilaz u filtriranju govornog signala je kvazi-stacionarni prilaz, [182]. Naime, govorni signal se može aproksimirati stacionarnim procesom na vremenskim intervalima veličine 20 ms . Kvazi-stacionarni prilaz posmatra govorni signal kao stacionarni proces na po-

²⁶Hands-free telefonski sistemi se ugrađuju u automobilima i drugim prevoznim sredstvima, u cilju stvaranja uslova da vozač u toku obavljanja telefonskih razgovora zadržava pažnju i motoriku svog organizma na upravljanje vozilom. Hands-free sistemi su, u visoko razvijenim zemljama, zakonom regulisani kao obavezno sredstvo u automobilima, tako da ih, kao svoj sastavni dio, sadrže sva vozila novije generacije.



Slika V.5. Potpuni hardver za realizaciju jednog kanala optimalnog nestacionarnog filtra

jedinim vremenskim intervalima $[0, T]$, gdje je $T = 20\text{ms}$. S aspekta vremenski-promjenljivog filtriranja možemo smatrati da se ovim postupkom definiše kvazi-promjenljivo filtriranje. Preciznije, pomjerajući prozor širine T duž govornog signala, vršimo njegovo filtriranje nakon isteka svakog vremenskog intervala trajanja T . Sa druge strane, na početku smo, kao osnovnu karakteristiku govornog signala, istakli njegovu visoku nestacionarnost, tako da se jednostavno može izvesti zaključak da je ovaj prilaz aproksimativan (ukoliko ga posmatramo kroz prizmu vremensko-frekvencijske analize), te da se može smatrati, u manjoj ili većoj mjeri, zadovoljavajućim, zavisno od postavljenih zahtjeva.

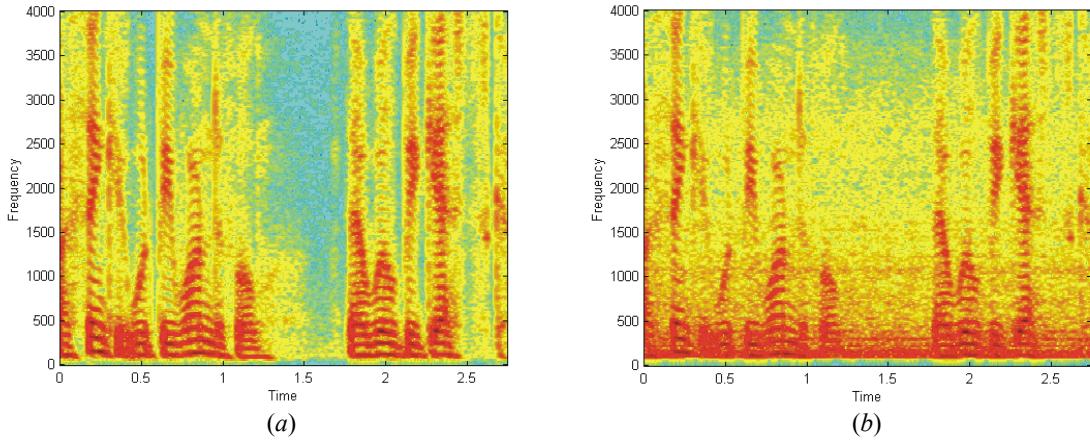
Ukoliko je zahtijevana veća tačnost i pouzdanost filtriranog govornog signala, neophodno je primijeniti model vremenski-promjenljivog filtriranja, [67], [73], [88], [89], [124], [167], [175]. Već smo zaključili da se, u cilju implementacije vremenski-promjenljivog filtriranja, u literaturi obično upotrebljava prilaz baziran na Wignerovom spektru. Sa druge strane, očigledno je da se filtriranje govornih signala u hands-free telefonskim sistemima obavlja u realnom vremenu, kao i da nije dostupan veliki broj različitih realizacija istog slučajnog procesa u posmatranom vremenskom trenutku. Naprotiv, u ovom slučaju se procesiranje signala obavlja poznavajući samo jednu realizaciju signala sa šumom. Iz ovih razloga se, kao aproksimacija Wignerovog spektra $\overline{WD}_{ff}(t, \omega)$ upotrebljavaju TF metodi koji ne pate od efekata interferencije, tako da se (V.21) modifikuje u:

$$L_H(t, \omega) = \frac{\rho_{ff}(t, \omega)}{\rho_{ff}(t, \omega) + \rho_{ee}(t, \omega)}. \quad (\text{V.75})$$

Filtriranje govornog signala se, u literaturi, vrši upotrebom spektrograma, [167], [175], [182]. Mi ćemo u disertaciji, u tom cilju, paralelno sa spektrogramom posmatrati i S-metod za TF analizu signala.

Znajući da se govorni signal može aproksimirati stacionarnim procesom na intervalu veličine $T = 20\text{ms}$, kao i da je njegova maksimalna frekvencija $f_m = 8\text{kHz}$, jednostavno je izračunati korak odabiranja u ovom slučaju, $\Delta t = 0.125\text{ms}$ i zaključiti da interval T sadrži $N = 160$ odbiraka. Saglasno tome, kao i neophodnosti primjene razvijenih FFT algoritama, odgovarajuća širina prozora, upotrijebljena u vremenski-promjenljivom filtriranju, je 256 odbiraka. U cilju postizanja veće tačnosti prilikom numeričkog izračunavanja izraza (V.29), predlaže se interpolacija signala u frekvencijskom domenu do 1024 odbirka. Ovom prilikom se funkcija oslonca određuje polazeći od definicionog izraza (V.29), [166], [167], [175], a ne pronalaženjem trenutne frekvencije analiziranog signala. Ovo se može protumačiti činjenicom da analizirani govorni signal aproksimativno predstavlja underspread proces na pojedinim vremenskim intervalima, tako da je analiza izvođena u poglavljju V.1. apsolutno primjenljiva u ovom slučaju.

U primjerima je analizirano filtriranje govornog signala maskiranog aditivnim šumom, snimljenog u hands-free telefonskom sistemu prilikom vožnje automobilom. Procjena veličine $\rho_{ee}(t, \omega)$ se vrši samo jedanput, duž pauze u govornom signalu. Time je obezbjeđena bliskost realnoj situaciji. Najznačajnije komponente šuma se nalaze u uskom



Slika V.6. Vremensko-frekvencijska reprezentacija govornog signala sa i bez šuma,

(a) spektrogram čistog govornog signala, (b) spektrogram govornog signala maskiranog aditivnim šumom

frekvencijskom opsegu i na niskim frekvencijama (do 98 Hz), kada komponente signala gotovo ne postoje. U ovom slučaju se vrši prefiltriranje govornog signala visokopojasnim filtrom sa graničnom učestanostu na 98Hz . U primjeru su posmatrani spektrogram i S-metod sa $L_d = 4$,

$$L_H|_{SPEC} = 1 - \frac{SPEC_{ee}(t, \omega)}{SPEC_{xx}(t, \omega)}, \quad (\text{V.76})$$

$$L_H|_{SM} = 1 - \frac{SM_{ee}(t, \omega)}{SM_{xx}(t, \omega)}. \quad (\text{V.77})$$

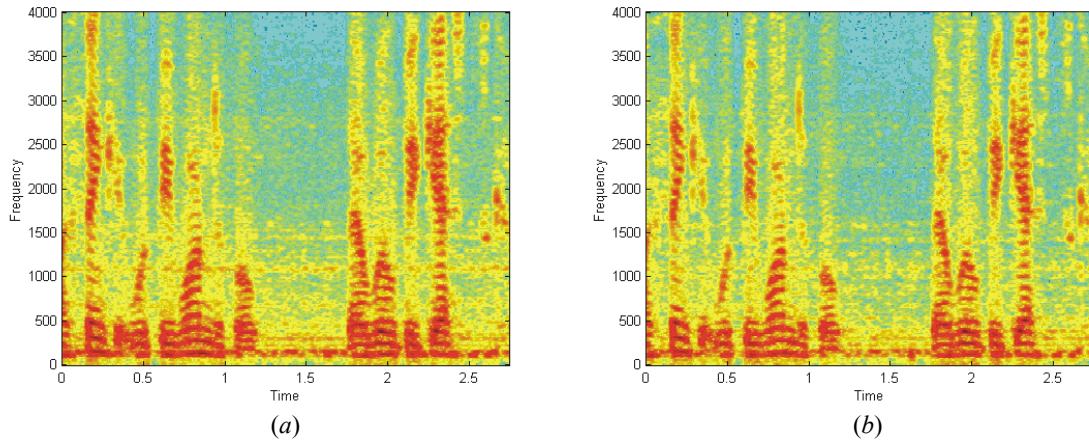
U cilju poboljšanja karakteristika filtra, njegova funkcija oslonca se pronalazi jednostavnom modifikacijom izraza (V.74)-(V.75),

$$L_H|_{SPEC} = \max\{L_H|_{SPEC}, \beta\}, \quad (\text{V.78})$$

$$L_H|_{SM} = \max\{L_H|_{SM}, \beta\}, \quad (\text{V.79})$$

gdje je β spektralni prag (spektralni prag odgovara referentnoj vrijednosti R , upotrijebljenoj u hardverskoj realizaciji filtra). Povećanjem veličine spektralnog praga povećavamo snagu šuma koja ostaje u signalu, dok se, istovremeno, umanjuje čujnost izobličenja govornog signala, tako da se β bira kompromisno. U primjerima je prepostavljena veličina spektralnog praga $\beta = 0.12$.

Na slici V.6. su prikazani spektrogram čistog govornog signala i govornog signala maskiranog aditivnim šumom. Upotrijebljen je Hanningov prozor širine 1024 odbirka prilikom realizacije kratkotrajne FT i spektrograma. Primjetimo da je šum prisutan u čitavoj TF ravni, naročito unutar frekvencijskog opsega od 500Hz do 2kHz .



Slika V.7. Vremensko-frekvencijska reprezentacija filtriranog govornog signala sa šumom,

- (a) spektrogram signala na izlazu vremenski-promjenljivog sistema, filtriranog upotrebom spektrograma,
- (b) spektrogram signala na izlazu vremenski-promjenljivog sistema, filtriranog upotrebom S-metoda sa $L_d = 4$

Prethodna teorijska razmatranja su, na koncu, primijenjena na filtriranje govornog signala zahvaćenog aditivnim šumom i dobijeni rezultati su prikazani na slici V.7. Rezultati su predstavljeni spektrogramom filtriranog signala, pošto se predstavljanjem rezultata u vremenskom domenu teško mogu izvesti adekvatni zaključci, [166]. Primijetimo da se filtriranjem S-metodom postižu nešto bolji rezultati u poređenju sa rezultatima dobijenim implementacijom spektrograma. Dalja poboljšanja se postižu upotrebom zaobljenog oblika S-metoda, [166], kao i primjenom razvijenijih tehniki (u poređenju sa optimalnim nestacionarnim filtriranjem), [167], [175].

Napomenimo, na koncu, da je upotreba distribucija iz RID klase neželjena iz više razloga. Najprije, realizacija ovih distribucija u realnom vremenu je veoma komplikovana. Potom, prilikom analize govornog signala maskiranog aditivnim šumom unosimo dodatne kros-komponente u TF reprezentaciju signala, a time i značajne greške u filtriranju, [167].

ZAKLJUČAK

U disertaciji je posmatrana vremensko-frekvencijska analiza nestacionarnih signala. Predstavljeni su matematički metodi za adekvatnu reprezentaciju analiziranih signala, i to metodi iz klase linearnih, kvadratnih i distribucija višeg reda. Posebna pažnja je posvećena najčešće upotrebljavanim vremensko-frekvencijskim transformacijama, kratkotrajnoj Fourierovoj transformaciji, spektrogramu i Wignerovoj distribuciji. Kao najznačajnija osobina kvadratnih transformacija (generalisanih u Cohenovoj klasi distribucija), označeno je koncentrisanje energije analiziranog signala na njegovoj trenutnoj frekvenciji. Nasuprot tome, kao njihov najznačajniji nedostatak, analizirani su efekti interferencije nastali vremensko-frekvencijskom analizom multikomponentnih signala. Shodno tome, posebna pažnja je posvećena onim reprezentacijama koje redukuju neželjene efekte interferencije. Kao najinteresantniji i najjednostavniji prilaz u praktičnim implementacijama, istaknut je S-metod za vremensko-frekvencijsku analizu signala, i to u svoja dva oblika: nezavisnom i zavisnom od oblika analiziranog signala. Distribucije su analizirane sa više aspekata:

- Jednostavnosti njihove hardverske implementacije.
- Uticaja šuma dodatog analiziranom signalu na njegovu vremensko-frekvencijsku reprezentaciju,
- Uticaja šuma na estimaciju trenutne frekvencije analiziranog signala,

Sprovedena analiza uticaja šuma na vremensko-frekvencijske metode i njihovu trenutnu frekvenciju je primijenjena u definisanju optimalnog nestacionarnog filtriranja. Takođe, hardver, razvijen za implementaciju vremensko-frekvencijskih distribucija, je iskorišćen u hardverskoj realizaciji optimalnog nestacionarnog filtra.

Navedene teme su proučavane i postignuti rezultati prezentirani u nekoliko cjelina.

Najprije je predložen fleksibilni hardver za implementaciju vremensko-frekvencijskih metoda. Hardver je dizajniran na bazi S-metoda, koji kao međukorak u svojoj realizaciji upotrebljavaju dobro poznate i često analizirane transformacije, kratkotrajnu Fourierovu transformaciju i Hartley-evu transformaciju. Izvodi se veoma interesantan zaključak: implemeniranjem Hartley-eve transformacije značajno pojednostavljuje hardverska realizacija S-metoda u poređenju sa istom realizacijom, postignutom implementiranjem kratkotrajne Fourierove transformacije. Dizajnirani hardver se, uz neznatne modifikacije, upotrebljava za realizaciju distribucija višeg reda, L-Wignerovu distribuciju i polinomialnu Wigner-Villeovu distribuciju. Za razliku od slučaja softverske realizacije ovih distribucija, predloženom hardverskom realizacijom se ne zahtijeva dodatno vrijeme procesiranja signala u poređenju sa realizacijom S-metoda. Postignuti rezultati su veoma značajni s aspekta svoje praktične primjenljivosti.

Nakon veoma zanimljive hardverske implementacije metoda upotrebljavanih u vremensko-frekvencijskoj analizi signala, u disertaciji se posvećujemo analizi uticaja šuma na distribucije i njihovu trenutnu frekvenciju. Naime, svi realni signali su, u manjoj ili većoj mjeri, zahvaćeni aditivnim šumom, tako da je njegov uticaj na pojedine vremensko-frekvencijske reprezentacije atraktivan aspekt posmatranja i međusobnog poređenja ovih metoda.

Treća cjelina disertacije obuhvata analizu uticaja šuma i efekata ograničene dužine registara (upotrijebljениh pri hardverskoj realizaciji) na metode upotrebljavane u vremensko-frekvencijskoj analizi. Najprije je posmatran uticaj šuma na S-metod. Time je unificirana analiza uticaja šuma na najznačajnije vremensko-frekvencijske transformacije, Wignerovu distribuciju i spektrogram. Pokazano je da se, prilikom analize signala čija frekvencija nije konstantna, S-metodom poboljšava vremensko-frekvencijska reprezentacija u poređenju sa reprezentacijom postignutom njegovim marginalnim slučajevima, spektrogramom i Wignerovom distribucijom. Takođe je sprovedena analiza uticaja šuma na proizvoljnu kvadratnu distribuciju iz generalisane Cohenove klase distribucija. Izvedena je varijansa kvadratnih metoda (prilikom analize signala sa šumom) i pokazano je da je ona direktno proporcionalna energiji funkcije jezgra upotrijebljene distribucije. Izvršena je minimizacija dobijenih izraza i zaključeno je da se njena minimalna vrijednost, uz zadovoljenje marginalnih osobina i vremenske ograničenosti metoda, postiže jezgrom Born-Jordanove distribucije. Takođe je pokazano da je varijansa distribucije blisko povezana sa samom vremensko-frekvencijskom distribucijom korisnog signala (bez šuma). Sprovedena analiza je implementirana na primjeru greške nastale upotrebom registara konačne dužine riječi prilikom hardverske realizacije pojedinih metoda. Posmatrani su slučajevi fixed-point i floating-point aritmetike, kao i procesiranje slučajnih i determinističkih FM signala. Pokazano je da, u svim analiziranim

slučajevima, distribucije iz RID klase imaju približno iste karakteristike. Dobijeni rezultati su kategorisani veličinom odnosa signal-šum kvantizacije. Izvedena je relacija kojom se povezuje dinamički opseg upotrebljavanih registara sa željenim kvalitetom predstavljanja rezultata, definisanih odnosom signal-šum. Izvedeni zaključci se mogu upotrijebiti za optimizaciju dužine registara, veoma značajnog faktora u hardverskoj implementaciji distribucija.

Naredna cjelina je posvećena trenutnoj frekvenciji i njenoj estimaciji. Vremensko-frekvencijska analiza predstavlja veoma interesantan prilaz estimaciji trenutne frekvencije analiziranog signala. Najčešće se trenutna frekvencija analiziranog signala određuje implementiranjem osobine prvog momenta upotrijebljenog vremensko-frekvencijskog metoda. Međutim, njena primjena je onemogućena prisustvom aditivnog šuma. Alternativa ovom prilazu je pronalaženje maksimuma vremensko-frekvencijske reprezentacije. U disertaciji je analizirana estimacija trenutne frekvencije bazirana na distribucijama iz generalisane kvadratne klase distribucija. Izvedeni su izrazi za bias i varijansu posmatranog estimatora. Pokazuje se da je varijansa estimatora tijesno povezana sa distribucijom korisnog signala (oslobodenog uticaja šuma). Kao specijalni slučajevi generalne analize, izvedeni su adekvatni izrazi za najčešće upotrebljavane vremensko-frekvencijske metode. Za razliku od do sada prezentiranih rezultata u slučaju spektrograma (slučaj konstantnog FM signala), u disertaciji su izvedeni izrazi za bias i varijansu greške estimacije, dobijeni analizom proizvoljnog oblika FM signala. Izvedena je varijansa estimatora, dobijena estimiranjem trenutne frekvencije linearног FM signala, interesantnog oblika analiziranog signala. Dobijeni izraz je veoma jednostavan, ali i zavisan od oblika analiziranog signala. Trenutna frekvencija istog signala je estimirana implementiranjem najznačajnijih distribucija za redukovanje efekata interferencije. Pokazano je da se distribucijama za redekovanje interferencije postiže poboljšane performanse u poređenju sa Wignerovom distribucijom, ali samo u slučaju analize signala sa konstantnom ili sporo promjenljivom trenutnom frekvencijom. Dobijeni rezultati su provjereni statističkim i numeričkim putem.

U završnom poglavlju četvrte cjeline je predstavljen algoritam za estimaciju trenutne frekvencije, i to distribucijama sa adaptivnom i vremenski-promjenljivom širinom prozora, upotrijebljenog u njihovoј definiciji. Metodom se minimizira srednja kvadratna greška estimatora u slučaju diskretnih parametara optimizacije, uz upotrebu izračunate asimptotske vrijednosti varijanse estimatora.

Metodi, definisani u vremensko-frekvencijskoj analizi, i sprovedena analiza uticaja šuma na vremensko-frekvencijsko predstavljanje signala i njegovu trenutnu frekvenciju su primjenjeni u definiciji i određivanju performansi optimalnog nestacionarnog filtriranja. U disertaciji je posmatrano vremenski-promjenljivo filtriranje definisano na bazi povezivanja sa Wignerovom distribucijom. Funkcija oslonca je definisana postupkom razvijenim prilikom filtriranja stacionarnih signala (Wienerov filter). Tom prilikom je korišćeno označavanje upotrebljavano u Weylovoj korespondenci. Funkcija oslonca je određena regionom TF ravni, simetrično raširenim u okolini trenutne frekvencije analiziranog signala. Predložen je njegov adekvatan izbor na bazi zadovoljenja poželjnih osobina

vremenski-promjenljivog filtriranja. Analizirani su monokomponentni i multikomponentni signali. U cilju efikasnog filtriranja, a s aspekta jednostavne implementabilnosti u realnom vremenu, kao i neosjetljivosti na neželjene efekte interferencije (prilikom analize multikomponentnih signala), upotrebljavani su spektrogram i S-metod za vremensko-frekvencijsku analizu signala. Na koncu je predložena hardverska implementacija optimalnog nestacionarnog filtra. Tom prilikom je iskorišćen hardver dizajniran u drugoj cjelini disertacije i razvijen u cilju praktične realizacije vremensko-frekvencijskih metoda. Kao veoma interesantan primjer nestacionarnog multikomponentnog signala, analiziran je govorni signal u hands-free telefonskim sistemima. Teorija je ilustrovana na realnim signalima.

R E F E R E N C E S

- [1] M.H.Ackroyd: “Short-time spectra and time-frequency energy distribution”, *J. Acoust. Soc. Am.*, vol.50, 1970, pp.1229-1231.
- [2] J.B.Allen, L.R.Rabiner: “A unified approach to short-time Fourier analysis and synthesis”, *Proc. of the IEEE*, vol. 65, no.11, Nov.1977, pp.1558-1564.
- [3] M.G.Amin: “A new approach to recursive Fourier transform”, *Proc. of the IEEE*, vol.75, 1987, pp.1357-1358.
- [4] M.G.Amin: “Time and lag window selection in the Wigner-Ville distribution”, in *Proc. of the IEEE Int. Conf. Acoust., Speech, Signal Processing*, 1987, pp.1529-1532.
- [5] M.G.Amin: “A comparison between two measures of convergence in recursive-window based spectral estimation”, *IEEE Trans. on Acoust., Speech, Signal Processing*, vol.ASSP-38, Aug.1990, pp.1457-1459.
- [6] M.G.Amin: “Spectral smoothing and recursion based on the nonstationarity of the autocorrelation function”, *IEEE Trans. on Signal Processing*, vol.41, no.2, Feb.1993, pp.930-934.
- [7] M.G.Amin: “Spectral decomposition of time-frequency distribution kernels”, *IEEE Trans. on Signal Processing*, vol.42, no.5, May 1994, pp.1156-1165.
- [8] M.G.Amin: “Minimum-variance time-frequency distribution kernels for signals in additive noise”, *IEEE Trans. on Signal Processing*, vol.44, no.9, Sept.1996, pp.2352-2356.
- [9] M.G.Amin, P.J.Davis, F.Allen, Jr.: “An application of the LMS algorithm in smoothing pseudo Wigner distribution”, *IEEE Trans. on Signal Processing*, vol.39, no.3, Mar.1991, pp.183-185.

- [10] M.G.Amin, K.D.Feng: "Short-time Fourier transform using cascade filter structures", *IEEE Trans. on Circuits and Systems*, vol.42, no.10, Oct.1995, pp.631-641.
- [11] L.E.Atlas, Y.Zhao, R.J.Marks II: "The use of cone shape kernels for generalized time-frequency representations of nonstationary signals", *IEEE Trans. on Acoust., Speech, Signal Processing*, vol.ASSP-38, 1990, pp.1084-1091.
- [12] F.Auger, P.Flandrin: "Improving the readability of time-frequency and time-scale representations by the reassignment method", *IEEE Trans. on Signal Processing*, vol.43, no.3, May 1995, pp.1068-1089.
- [13] R.G.Baraniuk, D.L.Jones: "A signal dependent time-frequency representation: Fast algorithm for optimal kernel design", *IEEE Trans. on Signal Processing*, vol.42, no.1, Jan.1994, pp.134-146.
- [14] B.Barkat, B.Boashash, LJ.Stanković: "Adaptive window in the PWVD for the IF estimation of FM signals in adaptive Gaussian noise", in *Proc. of the IEEE Int. Conf. Acoust., Speech, Signal Processing*, 1999, pp.1317-1320.
- [15] J.Bertrand, P.Bertrand: "Affine time-frequency distributions", in *Time-frequency analysis - Methods and Applications*, B. Boashash ed., Longman-Cheshire, Melbourne, 1991.
- [16] B.Boashash: "Time-frequency signal analysis", in *Advances in Spectrum Analysis and Array Processing*, vol.1, S.Haykin, Ed. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1991.
- [17] B.Boashash: "Estimating and interpreting the instantaneous frequency of a signal Part 1 – Fundamentals", *Proc. of the IEEE*, vol.80, no.4, April 1992, pp.519-538.
- [18] B.Boashash, J.B.Black: "An efficient real time implementation of the Wigner-Ville distribution", *IEEE Trans. on Acoust. Speech, Signal Processing*, vol.ASSP-35, no.11, Nov.1987, pp.1611-1618.
- [19] B.Boashash, P.O'Shea: "Polynomial Wigner-Ville distributions and their relationship to time-varying higher order spectra", *IEEE Trans. on Signal Processing*, vol.42, no.1, Jan.1994, pp.216-220.
- [20] B.Boashash, B.Ristić: "Analysis of FM signals affected by Gaussian AM using the reduced WV Trispectrum", in *Proc. of the IEEE Int. Conf. Acoust., Speech, Signal Processing*, vol.IV, 1993, pp.408-411.
- [21] B.Boashash, B.Ristić: "Polynomial WVDs and time-varying polyspectra", in *Higher Order Statistical Signal Processing*, B. Boashash et al, eds., Longman-Cheshire, 1993.
- [22] S.Boll: "Suppression of acoustic noise in speech using spectral subtraction", *IEEE Trans. on Acoust. Speech, Signal Processing*, vol.ASSP-27, no.2, Feb.1979, pp.113-120.
- [23] G.F.Boudreax-Burtels, T.W.Parks: "Reducing aliasing in the Wigner distribution using implicate spline interpolation", in *Proc. of the IEEE Int. Conf. Acoust., Speech, Signal Processing*, 1983, pp.1438-1441.

- [24] G.F.Boudreux-Burtels, T.W.Parks: "Time-varying filtering and signal estimation using Wigner distribution", *IEEE Trans. on Acoust. Speech, Signal Processing*, vol.ASSP-34, no.6, June 1986, pp.442-451.
- [25] N.R.Bracewell: "The fast Hartley transform", *Proc. of the IEEE*, vol.72, Aug.1984, pp.1010-1018.
- [26] L.Carin, L.B.Felsen, "Wave-oriented data processing for frequency- and time-domain scattering by nonuni-form truncated arrays", *IEEE Ant. and Propagation Mag.*, vol.36, no.3, June 1994, pp.29-43.
- [27] D.S.K.Chan: "A nonaliased discrete-time Wigner distribution for time-frequency signal analysis", in *Proc. of the IEEE Int. Conf. Acoust., Speech, Signal Processing*, 1982, pp.1333-1336.
- [28] D.Chester: "Discrete Wigner implementations", in *Proc. of the Int. Symp. Circuits Syst.*, San Jose, CA, May 1986, pp.38-41.
- [29] H.Chi, W.Williams: "Improved time-frequency representation of multicomponent signals using exponential kernels", *IEEE Trans. on Acoust., Speech, Signal Processing*, vol.ASSP-73, no.6, June 1989, pp.862-871.
- [30] T.A.C.M.Claasen, W.F.G.Mecklenbrauker: "The Wigner distribution - a tool for time frequency signal analysis, Part I: Continuous time signals", *Philips J. Res.*, 35, (3), 1980, pp.217-250.
- [31] T.A.C.M.Claasen, W.F.G.Mecklenbrauker: "The Wigner distribution - a tool for time frequency signal analysis, Part II: Discrete-time signals", *Philips J. Res.*, 35, (4/5), 1980, pp.276-300.
- [32] T.A.C.M.Claasen, W.F.G.Mecklenbrauker: "The Wigner distribution - a tool for time frequency signal analysis, Part III: Relations with other time frequency signal transformations", *Philips J. Res.*, 35, (6), 1980, pp.372-389.
- [33] T.A.C.M.Claasen, W.F.G.Mecklenbrauker: "The aliasing problem in discrete time Wigner distributions", *IEEE Trans. on Acoust. Speech, Signal Processing*, vol.ASSP-31, no.5, Oct.1983, pp.1067-1072.
- [34] L.Cohen: "Generalized phase-space distribution functions", *J. of Math.Phys.*, vol.7, 1966, pp.781-786.
- [35] L.Cohen: "Time-frequency distributions - a review", *Proc. of the IEEE*, vol.77, no.7, July 1989, pp.941-981.
- [36] L.Cohen: "Distributions concentrated along the instantaneous frequency", *Advances Signal Proc., Algorithms, Architectures and Implementation*, SPIE, vol.1348, 1992, pp.149-157.
- [37] L.Cohen, *Time-frequency analysis*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1995.
- [38] L.Cohen, C.Lee: "Instantaneous bandwidth", in *Time-frequency signal analysis, B. Boashash Ed.*, Longman-Cheshire, Australia 1992.
- [39] L.Cohen, T.E.Posch: "Generalized ambiguity function", in *Proc. of the IEEE Int. Conf. Acoust., Speech, Signal Processing*, 1985, pp.1033-1036.
- [40] E.T.Copson, *Asymptotic expansions*, Cambridge University Press, New York, 1967.

- [41] A.H.Costa, G.F.Boudreux-Bartels: "A comparative study of alias-free time-frequency representations", in *Proc. of the IEEE Int. Symp. TFTSA*, Philadelphia, Pa, 1994, pp.76-79.
- [42] G.S.Cunningham, W.J.Williams: "Kernel decomposition of time-frequency distributions", *IEEE Trans. on Signal Processing*, vol.42, June 1994, pp.1425-1441.
- [43] N.Delpart, B.Escudie, P.Guillemain, R.Kronland-Martinet, P.Tchamitchian, B.Torresani: "Asymptotic wavelet and Gabor analysis: Extraction of instantaneous frequency", *IEEE Trans. on Information Theory*, vol.38, no.2, Feb/Mar.1992, pp.644-661.
- [44] E.J.Diethorn: "The generalized exponential time-frequency distribution", *IEEE Trans. on Signal Processing*, vol.42, no.5, May 1994, pp.1028-1037.
- [45] I.Djurović, V.Katkovnik, LJ.Stanković, R.Dragović-Ivanović: "Instantaneous frequency estimation using adaptive robust M-periodogram", in *Proc. of the IEEE WISP*, Budapest, Sept.99, pp.176-181.
- [46] I.Djurović, LJ.Stanković: "Time-frequency representation based on the reassigned S-method", *Signal Processing*, vol.77, no.1, Aug.1999, pp.115-120.
- [47] I.Djurović, LJ.Stanković: "A virtual instrument for time-frequency analysis", *IEEE Trans. on Instrumentation and Measurements*, vol.48, no.6, Dec.1999, pp.1086-1092.
- [48] B.Escudie, J.Grea: "Sur une formulation generale de la representation en temps et frequence dans l' analyse de signaux d' energie finie", *C.R. Acad. Sci.*, vol.A283, Paris 1976, pp.1049-1051.
- [49] K.D.Feng, M.G.Amin, S.Tyler: "Analysis of the recursive multiple window STFTs and spectrograms", in *Proc. of the IEEE Int. Symp. TFTSA*, Philadelphia, Oct.1994, pp.72-75.
- [50] R.P.Feynman, A.R.Hibbs, *Quantum mechanics and path integrals*, New York, 1965.
- [51] P.Flandrin: "Some features of time-frequency representation of multicomponent signals", in *Proc. of the IEEE Int. Conf. Acoust., Speech, Signal Processing*, 1984, pp.41B.4.1-4.4.
- [52] P.Flandrin, B.Escudie: "Time and frequency representation of finite energy signals: a physical property as a result of a Hilbertian condition", *Signal Processing*, vol.2, 1980, pp.93-100.
- [53] P.Flandrin, F.Hlawatsch: "Signal representation geometry and catastrophes in the time-frequency plane", in *Mathematics in Signal Processing*, T. Durrani et all eds., Oxford, U.K., Clarendon, 1987, pp.3-14.
- [54] P.Flandrin, O.Rioul: "Affine smoothing of the Wigner distribution", in *Proc. of the IEEE Int. Conf. Acoust., Speech, Signal Processing*, April 1990, pp.2455-2458.
- [55] J.R.Fonollosa, C.L.Nikias: "Analysis of transient signals using higher order time-frequency distributions", in *Proc. of the Int. Conf. Acoust., Speech, Signal Processing*, 1992, pp.197-200.

- [56] J.R.Fonollosa, C.L.Nikias: "Wigner higher order moment spectra: Definitions, properties, computation and application to transient signal analysis", *IEEE Trans. on Signal Processing*, vol.41, Jan.1993, pp.245-266.
- [57] D. Gabor: "Theory of communications", *J. IEE*, vol.93, London 1946, pp.423-457.
- [58] N.L.Gerr: "Introducing a third order Wigner distribution", *Proc. of the IEEE*, vol.76, no.3, Mar.1988, pp.290-292.
- [59] A.Goldenshluger, A.Nemirovski: "On spatial adaptive estimation of nonparametric regression", *Res. report, 5/94, Technion*, Israel, Nov.1995.
- [60] P.Goncalves, R.G.Baraniuk: "A pseudo Bertrand distribution for time-scale analysis", *IEEE Signal Processing Letters*, vol.3, no.3, March 1996, pp.82-84.
- [61] J.K.Hammond, R.F.Harrison: "Wigner-Ville and evolutionary spectra for covariance equivalent nonstationary random process", in *Proc. of the IEEE Int. Conf. Acoust., Speech, Signal Processing*, 1985, pp.1025-1027.
- [62] S.B.Hearon, M.G.Amin: "Minimum-variance time-frequency distribution kernels", *IEEE Trans. on Signal Processing*, vol.43, no.5, May 1995, pp.1258-1262.
- [63] F.Hlawatsch: "Interference terms in the Wigner distribution", in *Digital Signal Processing-84, V. Cappellini et al., Eds., North-Holland*, 1984, pp.363-367.
- [64] F.Hlawatsch: "Duality and classification of bilinear time-frequency signal representation", *IEEE Trans. on Signal Processing*, vol.39, July 1991. pp.1564-1574.
- [65] F.Hlawatsch, G.F.Boudreux-Bartels: "Linear and quadratic time-frequency signal representations", *IEEE Signal Processing Magazine*, April 1992, pp.21-67.
- [66] F.Hlawatsch, W.Kozek: "Time-frequency analysis of linear signal spaces", in *Proc. of the Int. Conf. Acoust., Speech, Signal Processing*, Toronto, May 1991, pp.2045-2048.
- [67] F.Hlawatsch, W.Kozek: "Time-frequency projection filters and time-frequency signal expansions", *IEEE Trans. on Signal Processing*, vol.42, no.12, Dec.1994, pp.3321-3334.
- [68] V.Ivanović: "Analiza uticaja šuma na vremensko-frekvencijsko predstavljanje signala sa primjenom na efekte ograničene dužine registara", *magistarska teza, Univerzitet Crne Gore, Elektrotehnički fakultet u Podgorici*, Cetinje-Podgorica, Mart 1996.
- [69] V.Ivanović, M.Daković, I.Djurović, LJ.Stanković: "Instantaneous frequency estimation by using time-frequency distributions", in *Proc. of the IEEE Int. Conf. Acoust., Speech, Signal Processing*, Salt Lake City, May 2001.
- [70] V.Ivanović, LJ.Stanković, D.Petranović: "Finite word-length effects in implementation of algorithms for time-frequency signal analysis", *IEEE Transaction on Signal Processing*, vol.46, no.7, July 1998, pp.2035-2041.

- [71] V.Ivanović, LJ.Stanković, Z.Uskoković: "Quantization effects in implementation of distributions from the Cohen class", in *Proc. of the IX European Signal Processing Conf.*, Island of Rhodes, Greece, Sept.1998, pp.649-652.
- [72] A.J.E.M.Jannsen: "On the locus and spread of pseudo density functions in the time-frequency plane", *Phillips Journal of Research*, vol.37, 1982, pp.79-110.
- [73] A.J.E.M.Jannsen: "Wigner weight functions and Weyl symbols of nonnegative definite linear operators", *Phillips Journal of Research*, vol.44, 1989, pp.7-42.
- [74] J.Jeong, W.J.Williams: "On the cross-terms in spectrograms", in *Proc. of the IEEE Int. Symp. Circuits and Systems*, 1990, pp.1565-1568.
- [75] J.Jeong, W.J.Williams: "Kernel design for reduced interference distributions", *IEEE Trans. on Signal Processing*, vol.40, no.2, Feb.1992, pp.402-412.
- [76] J.Jeong, W.J.Williams: "Mechanism of the cross-terms in spectrograms", *IEEE Trans. on Signal Processing*, vol.40, no.10, Oct.1992, pp.2608-2613.
- [77] J.Jeong, W.J.Williams: "Alias-free generalized diskrete-time time-frequency distributions", *IEEE Trans. on Signal Processing*, vol.40, no.11, Nov.1992, pp.2757-2764.
- [78] E.A.Jonckheere, C.Ma: "Split-radix fast Hartley transform in one and two dimension", *IEEE Trans. on Signal Processing*, vol.39, no.2, Feb.1991, pp.499-503.
- [79] S.Kadambe, G.F.Boudreux-Bartels: "A comparison of the existence of 'cross terms' in the Wigner distribution and the squared magnitude of the Wavelet transform and Short-time Fourier transform", *IEEE Trans. on Signal Processing*, vol.40, no.10, Oct.1992, pp.2498-2517.
- [80] V.Katkovnik: "Local polynomial approximation of the instantaneous frequency: Asymptotic accuracy", *Signal Processing*, vol.52, no.3, 1996.
- [81] V.Katkovnik: "Adaptive local polynomial periodogram for time-varying frequency estimation", in *Proc. of the IEEE Int. Symp. TFTSA*, Paris, June 1996, pp.329-332.
- [82] V.Katkovnik: "Nonparametric estimation of instantaneous frequency", *IEEE Trans. on Information Theory*, vol.43, no.1, Jan.1997, pp.183-189.
- [83] V.Katkovnik, I.Djurović, LJ.Stanković: "Instantaneous frequency estimation using robust spectrogram with varying window length", *Archiv fur Elektronik und Ubertragungstechnik*, vol.54, no.4, 2000, pp.193-202.
- [84] V.Katkovnik, LJ.Stanković: "Instantaneous frequency estimation using periodogram with time varying window length", *Signal Processing*, vol.67, no.3, June 1998, pp.345-358.

- [85] V.Katkovnik, LJ.Stanković: "Instantaneous frequency estimation using the Wigner distribution with varying and data driven window length", *IEEE Trans. on Signal Processing*, vol.46, no.9, Sept.1998, pp.2315-2325.
- [86] S.M.Kay: "Statistically/computationally efficient frequency estimation", in *Proc. of the IEEE Int. Conf. Acoust., Speech, Signal Processing*, New York, 1988, pp.2292-2295.
- [87] H.Kirchauer, F.Hlawatsch, W.Kozek: "Time-frequency formulation and design of nonstationary Wiener filter", in *Proc. of the Int. Conf. on Acoust., Speech, Signal Processing*, 1995, pp.1549-1552.
- [88] W.Kozek: "Time-frequency processing based on the Wigner-Weyl framework", *Signal Processing*, vol.29, Oct. 1992, pp.77-92.
- [89] W.Kozek, F.Hlawatch: "Time-frequency representation of linear time-varying systems using the Weyl symbol", in *Proc. of the 6-th Int. Conf. on Digital Processing of Signals in Communication*, Loughborough, UK, Sept.1991, pp.25-30.
- [90] W.Kozek, F.Hlawatsch, H.Kirchauer, U.Trautwein: "Correlative time-frequency analysis and classification of non stationary random process", in *Proc. of the IEEE Int. Symp. TFTSA*, Philadelphia, PA, Oct.1994, pp.417-420.
- [91] W.Krattenthaler, F.Hlawatsch: "Time-frequency design and processing of signals via smoother Wigner distributions", *IEEE Trans. on Signal Processing*, vol.41, no1, Jan.1993, pp.278-287.
- [92] K.J.R.Liu: "Novel parallel architecture for short time Fourier transform", *IEEE Trans. on Circuits and Systems II*, vol.40, no.12, Dec.1993, pp.786-789.
- [93] K.J.R.Liu, C.T.Chiu: "Unified parralel lattice structures for time-recursive discrete cosine/sine/Hartley transforms", *IEEE Trans. on Signal Processing*, vol.41, no.3, March 1993, pp.1357-1377.
- [94] P.Loughlin, J.W.Pitton, L.Atlas: "An information-theoretic approach to positive time-frequency distributions", in *Proc. of the Int. Conf. Acoust., Speech, Signal Processing*, Vol.V, 1992, pp.125-128.
- [95] B.C.Lovell, R.C.Williamson: "The statistical performance of some instantaneous frequency estimators", *IEEE Trans. on Signal Processing*, vol.40, no.7, July 1992, pp.1707-1723.
- [96] B.C.Lovell, R.C.Williamson, B.Boashash: "The relationship between instantaneous frequency and time-frequency representations", *IEEE Trans. on Signal Processing*, vol.41, no.3, Mar.1993, pp.1458-1461.
- [97] N.Marinović, L.Cohen, S.Umesh: "Joint representation in time and frequency scale for harmonic type signals", in *Proc. of the IEEE Int. Symp. on TFTSA*, Philadelphia, PA, Oct.1994, pp.84-87.
- [98] W.Martin: "Time-frequency analysis of random signals", in *Proc. of the IEEE Int. Conf. Acoust., Speech, Signal Processing*, 1982, pp.1325-1328.

- [99] W.Martin, P.Flandrin: "Wigner-Will spectral analysis of nonstationary processes", *IEEE Trans. on Acoust., Speech, Signal Processing*, vol.ASSP-33, no.6, Dec.1985, pp.1461-1470.
- [100] G.Matz, F.Hlawatsch, W.Kozek: "Generalized evolutionary spectral analysis and the Weyl spectrum of non-stationary random processes", *IEEE Trans. on Signal Processing*, vol.45, no.6, June 1997, pp.1520-1534.
- [101] J.M.Mendel: "Tutorial on higher-order statistics (spectra) in signal processing and system theory: Theoretical results and some applications", *Proc. of the IEEE*, vol.79, no.3, March 1991, pp.278-305.
- [102] A.H.Nuttal: "Wigner distribution function: Relation to the short-term spectral estimation, smoothing and performances in noise", *Naval Underwater Systems center, NUSC Technical Report 8225*, 16, Feb.1988.
- [103] A.H.Nuttall: "Signal Processing studies", *Naval Underwater Systems center, NUSC, New London, CT, Technical report*, 1989.
- [104] S.Oh, R.J.Marks II: "Some properties of generalized time-frequency representation with cone-shaped kernels", *IEEE Trans. on Signal Processing*, vol.40, no.7, July 1992, pp.1735-1745.
- [105] A.V.Oppenheim, R.W.Schafer, *Digital signal processing*, Prentice-Hall, New Jersey, 1975.
- [106] R.S.Orr: "The order of computation of finite discrete Gabor transform", *IEEE Trans. on Signal Processing*, vol.41, no.1, Jan.1993, pp.122-130.
- [107] C.H.Page: "Instantaneous power spectra", *J. Appl. Phys.*, vol.23,1952, pp.103-106.
- [108] A.Papoulis, *Signal analysis*, McGraw Hill Company, New York, 1977.
- [109] S.C.Pei, I.I.Yang: "High resolution Wigner distribution using chirp z-transform analysis", *IEEE Trans. on Signal Processing*, vol.39, no.7, July 1991, pp.1699-1702.
- [110] S.C.Pei, I.I.Yang: "Computing pseudo Wigner distribution by the fast Hartley transform", *IEEE Trans. on Signal Processing*, vol.40, no.9, Sep.1992, pp.2346-2349.
- [111] Peleg, Porat: "Estimation and classification of polynomial phase signals", *IEEE Trans. on Information Theory*, no.3, March 1991, pp.422-430.
- [112] D.Petranović, S.Stanković, LJ.Stanković: "Special purpose hardware for time-frequency analysis", *Electronics Letters*, vol.33, no.6, March 1997, pp.464-466.
- [113] F.Peyrin, R.Prost: "A unified definition for the discrete-time, discrete frequency, and discrete time/frequency Wigner distributions", *IEEE Trans. on Acoust. Speech, Signal Processing*, vol.ASSP-34, no.4, Aug.1986, pp.858-867.
- [114] W.A.Porter: "Computational aspects of quadratic signal processing", *IEEE Trans. on Acoust. Speech, Signal Processing*, vol.ASSP-38, no.1, Jan.1990, pp.137-144.

- [115] T.Posch: "Time-frequency distributions for a wide-sense stationary random signal", *IEEE Trans. on Acoust., Speech, Signal Processing*, vol.ASSP-38, no.4, Apr.1990, pp.725-727.
- [116] B.G.Quin: "Estimating frequency by interpolation using Fourier coefficients", *IEEE Trans. on Signal Processing*, vol.42, no.5, May 1994, pp.1264-1268.
- [117] P.Rao, F.J.Taylor: "Estimation of the instantaneous frequency using the discrete Wigner distribution", *Electronics Letters*, vol.26, 1990, pp.246-248.
- [118] W.Rihaczek: "Signal energy distribution in time and frequency", *IEEE Trans. on Information Theory*, vol.14, 1968, pp.369-374.
- [119] O.Rioul, P.Flandrin: "Time-scale energy distributions: A general class extending wavelet transforms", *IEEE Trans. on Signal Processing*, no.7, July 1992, pp.1746-1757.
- [120] O.Rioul, M.Vetterli: "Wavelets and signal processing", *IEEE Signal Processing Magazine*, Oct.1991, pp.14- 38.
- [121] B.Ristić, B.Boashash: "Kernel design for time-frequency signal analysis using the Radon transform", *IEEE Trans. on Signal Processing*, vol.41, no.5, May 1993, pp.1996-2008.
- [122] B.Ristić, B.Boashash: "Relationship between the polynomial and higher order Wigner-Ville distribution", *IEEE Signal Processing Letters*, no.12, vol.2, Dec.1995, pp.227-229.
- [123] O.Rogozovski, LJ.Stanković: "Spectral characteristics of signals from high speed objects", in *Proc. of the 4-th European Conference on Underwater Acoustic*, Roma, Sept. 1998, pp.39-44.
- [124] R.G.Shenoy, T.W.Parks: "The Weyl correspondence and time-frequency analysis", *IEEE Trans. on Signal Processing*, vol.42, no.2, Feb.1994, pp.318-331.
- [125] LJ.Stanković: "Wigner higher order spectra of multicomponent signals: A method for higher order time-frequency analysis", in *Proc. of the ICDS*, Nicosia, Cyprus 1993, pp.100-105.
- [126] LJ.Stanković: "A method for time-frequency signal analysis", *IEEE Trans. on Signal Processing*, vol.42, no.1, Jan.1994, pp.225-229.
- [127] LJ.Stanković: "An analysis of Wigner higher order spectra of multicomponent signals", *Annales des telecommunications*, no.3/4, Mar/Apr.1994, pp.132-136.
- [128] LJ.Stanković: "A multitime definition of the Wigner higher order distribution: L-Wigner distribution", *IEEE Signal Processing Letters*, vol.1, no.7, July 1994, pp.106-109.
- [129] LJ.Stanković: "An analysis of some time-frequency and time-scale distributions", *Annales des Telecommunications*, vol.49, no.9-10, Sep/Oct.1994, pp.505-517.

- [130] LJ.Stanković: “A method for improved energy concentration in the time-frequency analysis of multicomponent signals using the L-Wigner distribution”, *IEEE Trans. on Signal Processing*, no.5, vol.43, May 1995, pp.1262-1268.
- [131] LJ.Stanković: “Auto-term representation by the reduced interference distributions; The procedure for a kernel design”, *IEEE Trans. on Signal Processing*, no.6, vol.44, June 1996, pp.1557-1564.
- [132] LJ.Stanković: “On the realisation on the highly concentrated time-frequency distributions”, in *Proc. of the IEEE Int. Symp. TFTSA*, Paris, June 1996.
- [133] LJ.Stanković: “L-class of time-frequency distributions”, *IEEE Signal Processing Letters*, vol.3, no.1, Jan.1996, pp.22-25.
- [134] LJ.Stanković: “A time-frequency distribution concentrated along the instantaneous frequency”, *IEEE Signal Processing Letters*, vol.3, no.3, Mar.1996, pp.89-91.
- [135] LJ.Stanković: “Highly concentrated time-frequency distributions: Pseudo quantum signal representation”, *IEEE Trans. on Signal Processing*, vol.45, no.3, Mar.1997, pp.543-552.
- [136] LJ.Stanković: “S-class of time-frequency distributions”, *IEE Proc. Vision, Image ang Signal Processing*, no.2, April 1997, pp.57-64.
- [137] LJ.Stanković: “Local polynomial Wigner distributions”, *Signal Processing*, vol.59, no.1, May 1997, pp.123-128.
- [138] LJ.Stanković: “Algorithm for the Wigner distribution of noisy signals realization”, *Electronics Letters*, vol.34, no.7, Apr.1998, pp.622-624.
- [139] LJ.Stanković: “On the realization of the polynomial Wigner-Ville distribution for multicomponent signals”, *IEEE Signal Processing Letters*, vol.5, no.7, July 1998, pp.157-159.
- [140] LJ.Stanković: “On the Wigner distribution of noisy signals with adaptive window”, in *Proc. of the 4-th European Conference on Underwater Acoustic*, Roma 21-24, Sept.1998, pp.51-56.
- [141] LJ.Stanković, ed, *Time-frequency signal analysis*, research monograph, KPZ-NB, Podgorica, 1999.
- [142] LJ.Stanković: “A measure of some time-frequency distributions concentration”, in *Proc. of the IEEE WISP*, Budapest, Sept.1999, pp.67-71.
- [143] LJ.Stanković: “On the time-frequency analysis based filtering”, *Annales des Telecommunications*, vol.55, no.5/6, May/June 2000.
- [144] LJ.Stanković: “Adaptive instantaneous frequency estimation using time-frequency distributions”, “*Time-Frequency Signal Analysis*”, edited by B.Boashash, Prentice Hall, 2002.

- [145] LJ.Stanković: “Analysis of additive noise in time-frequency distributions”, “*Time-Frequency Signal Analysis*”, edited by B.Boashash, Prentice Hall, 2002.
- [146] LJ.Stanković: “A measure of some time-frequency distributions concentration”, “*Time-Frequency Signal Analysis*”, edited by B.Boashash, Prentice Hall, 2002.
- [147] LJ.Stanković: “Quadratic and higher order time-frequency analysis based on the short-time Fourier transform”, “*Time-Frequency Signal Analysis*”, edited by B.Boashash, Prentice Hall, 2002.
- [148] LJ.Stanković, J.Boehme: “Time-frequency analysis of multiple resonances in combustion engine signals”, *Signal Processing*, vol.79, no.1, Nov.1999, pp.15-28.
- [149] LJ.Stanković, M.Daković, V.Ivanović: “Performance of spectrogram as an IF estimator”, *Electronics Letters*, in print.
- [150] LJ.Stanković, I.Djurović: “Relationship between Ambiguity function coordinate transformations and Fractional Fourier transform”, *Annales des Telecommunications*, vol.53, no.3/4, Mar/Apr.1998, pp.70-73.
- [151] LJ.Stanković, V.Ivanović: “Further results on the minimum variance time-frequency distributions kernels”, *IEEE Trans. on Signal Processing*, vol.45, no.6, June 1997, pp.1650-1655.
- [152] LJ.Stanković, V.Ivanović, Z.Petrović: “Unified noise analysis in the spectrogram and Wigner distribution”, *Annales des Telecommunications*, no.11/12, Nov/Dec.1996, pp.585-594.
- [153] LJ.Stanković, V.Katkovnik: “Algorithm for the instantaneous frequency estimation using time-frequency distributions with variable window width”, *IEEE Signal Processing Letters*, vol.5, no.9, Sept.1998, pp.224-227.
- [154] LJ.Stanković, V.Katkovnik: “The Wigner distribution of noisy signals with adaptive time-frequency varying window”, *IEEE Trans. on Signal Processing*, vol.47, no.2, Apr.1999, pp.1099-1108.
- [155] LJ.Stanković, V.Katkovnik: “Instantaneous frequency estimation using higher order distributions with adaptive order and window length”, *IEEE Trans. on Information Theory*, vol.46, no.1, Jan.2000, pp.302-311.
- [156] LJ.Stanković, V.Katkovnik, I.Djurović: “Adaptive order and window length higher order time-frequency distributions in the IF estimation”, in *Proc. IEEE ICECS*, Cyprus, vol.2, Sept.99, pp.1077-1080.
- [157] LJ.Stanković, S.Stanković: “Wigner distribution of noisy signals”, *IEEE Trans. on Signal Processing*, vol.41, no.2, Feb.1993, pp.956-960.
- [158] LJ.Stanković, S.Stanković: “On the Wigner distribution of the discrete-time noisy signals with application to the study of quantization effects”, *IEEE Trans. on Signal Processing*, no.7, vol.42, July 1994, pp.1863-1867.

- [159] LJ.Stanković, S.Stanković: "An analysis of instantaneous frequency presentation using time-frequency distributions - Generalized Wigner distribution", *IEEE Trans. on Signal Processing*, vol.43, no.2, Feb.1995, pp. 549-552.
- [160] LJ.Stanković, S.Stanković: "S-method with variable convolution window", in *Proc. of the IEEE Int. Symp. on TFTSA*, Paris, June 1996.
- [161] LJ.Stanković, S.Stanković: "Cross-terms free forms of some quadratic and higher order time-frequency distributions", in *Proc. of the IX European Signal Processing Conf.*, Iceland of Rhodos, Greece, Sept.1998, pp.653-656.
- [162] LJ.Stanković, S.Stanković, I.Djurović: "Space/spatial-frequency analysis based filtering", *IEEE Trans. on Signal Processing*, vol.48, no.8, Aug.2000, pp.2343-2352.
- [163] LJ.Stanković, S.Stanković, Z.Uskoković: "Modified Wigner bispectrum and its generalizations", *Circuits, Systems and Signal Processing*, vol.16, no.1, Jan.1997, pp.27-40.
- [164] LJ.Stanković, Z.Uskoković, S.Stanković, D.Petranović, Z.Petrović: "The L-Wigner distribution as a tool for robust time-frequency signal analysis", in *Proc. of the Asilomar Conf. on Signals, Systems and Computers*, Pacific Grove, California, Oct.1994.
- [165] S.Stanković: "Wignerova transformacija u obradi signala", *doktorska disertacija, Univerzitet Crne Gore, Elektrotehnički fakultet*, Podgorica, 1993.
- [166] S.Stanković: "About time-variant filtering of speech signals with time-frequency distributions for hands-free telephone systems", *Signal Processing*, vol.80, no.9, Sept.2000, pp.1777-1785.
- [167] S.Stanković: "Time-frequency analysis based filtering of speech signals in hands-free telephone systems", "Time-Frequency Signal Analysis", edited by B.Boashash, Prentice Hall, 2002.
- [168] S.Stanković, I.Djurović, V.Vuković: "System realisation for space-frequency image analysis", *Electronics Letters*, vol.34, no.23, Nov.1998, pp.2224-2245.
- [169] S.Stanković, I.Djurović, I.Pitas: "Watermarking in the space/spatial-frequency domain using two-dimensional Radon Wigner distribution", *IEEE Trans. on Image Processing*, vol.10, no.4, Apr.2001, pp.650-658.
- [170] S.Stanković, LJ.Stanković: "An approach to the polynomil Wigner distributions", in *Proc. of the IEEE Int. Symp. TFTSA*, Paris, June 1996.
- [171] S.Stanković, LJ.Stanković: "An architecture for the realisation of a system for time-frequency signal analysis", *IEEE Trans. on Circuits and Systems II*, vol.44, no.7, July 1997, pp.600-604.

- [172] S.Stanković, LJ.Stanković, Z.Uskoković: "A method for multidimensional time-frequency analysis", in *Proc. of the IEEE Eight Workshop on IMDSP*, Cannes, France 1993, pp.154-155.
- [173] S.Stanković, LJ.Stanković, Z.Uskoković: "A method for Wigner higher order spectra", in *Proc. of the IEEE Int. Symp. on TFTSA*, Philadelphia, Oct.1994.
- [174] S.Stanković, LJ.Stanković, Z.Uskoković: "On the local frequency, group shift and cross terms in some multidimensional time-frequency distributions; A method for multidimensional time-frequency analysis", *IEEE Trans. on Signal Processing*, vol.43, no.7, July 1995, pp.1719-1725.
- [175] S.Stanković, J.Tilp: "Time-varying filtering of speech signals using linear prediction", *Electronics Letters*, vol.36, no.8, Aug.2000, pp.763-764.
- [176] M.Sun, C.C.Li, L.N.Sekhar, R.J.Slabassi: "Efficient computation of the discrete pseudo Wigner distribution", *IEEE Trans. on Acoust., Speech, Signal Processing*, vol.ASSP-37, no.11, Nov.1989, pp.1735-1741.
- [177] B.Tacer, P.Loughlin: "Positive time-scale distributions", in *Proc. of the IEEE Int. Symp. TFTSA*, Philadelphia, Oct.1994, pp.201-204.
- [178] V.I.Tatarski: "Wigner's representation in quantum mechanics", *Uspehi Fiziceskikh Nauk (Advances in the Physics)*, Soviet Acad. Sci. Press, Moscow, vol.139, no.4, Apr.1983, pp.587-619.
- [179] G.Thomas, S.D.Cabrera: "Resolution enhancement in time-frequency distributions based on adaptive time extrapolations", in *Proc. of the IEEE Int. Symp. TFTSA*, Philadelphia, Oct.1994, pp.104-107.
- [180] J.Tilp, S.Stanković: "Prediction-based time-varying filtering for speech enhancement in cellular telephony", in *Proc. of the IWSPA*, Pula, Croatia, June 2000, pp.273-278.
- [181] H.L.Van Trees, *Detection, Estimation, and Modulation Theory*, New York: Wiley, 1968.
- [182] S.V.Vaseghi, *Advanced Signal Processing and Digital Noise Reduction*, Wiley and Teubner, 1996.
- [183] M.Vetterli, J.Kovačević, *Wavelets and subband coding*, Prentice Hall, 1994.
- [184] J.Ville: "Theorie et appliacations de la notion de signal analytique", *Cables es Transmission*, vol.2, no.1, 1946, pp.61-74.
- [185] N.Virag: "Single channel speech enhancement based on the masking properties on the human auditory system", *IEEE Trans. on Speech Audio Processing*, vol.7, no.2, March 1999, pp.126-137.
- [186] P.E.Wigner: "On the quantum correction for thermodynamic equilibrium", *Phys. Rev.*, vol.40, 1932, pp.246-254.

- [187] K.M.Wong: "Estimation of the time-varying frequency of a signal: The Cramer-Rao bound and the application of Wigner distributions", *IEEE Trans. on Acoust., Speech, Signal Processing*, vol.ASSP-38, 3, 1990, pp.519-535.
- [188] D.Wu, J.M.Morris: "Time-frequency representations using radial butterworth kernel", in *Proc. of the IEEE Int. Symp. TFTSA*, Philadelphia, Oct.1994, pp.60-63.
- [189] D.Wu, J.M.Morris: "Discrete Cohen's class of distributions", in *Proc. of the IEEE Int. Symp. TFTSA*, Philadelphia, Oct.1994, pp.532-535.
- [190] X.-G.Xia: "A quantitative analysis of SNR in the short-time Fourier transform domain for multicomponent signals", *IEEE Trans. on Signal Processing*, vol.46, no.1, Jan.1998, pp.200-203.
- [191] X.-G.Xia, V.C.Chen: "A quantitative SNR analysis for the pseudo Wigner-Ville distribution", *IEEE Trans. on Signal Processing*, vol.47, no.10, Oct.1999, pp.2891-2894.
- [192] L.A.Zadeh: "Frequency analysis of variable networks", *Proc. IRE*, vol.67, March 1950, pp.291-297.
- [193] B.Zhang, S.Sato: "A time-frequency distribution of Cohen's class with a compaound kernel and its application to speech signal processing", *IEEE Trans. on Signal Processing*, vol. 42, no.1, Jan.1994, pp.54-64.
- [194] Y.Zhao, L.E.Atlas, R.J.Marks, II: "The use of cone-shaped kernels for generalized time-frequency representations on non-stationary signals", *IEEE Trans. on Acoust., Speech, Signal Processing*, vol.ASSP-38, no.7, July 1990, pp.1084-1091.
- [195] Y.M.Zhu, F.Peyrin, R.Goutte: "Transformation de Wigner-Ville: description d' un nouvel outil de traitement du signal et des images", *Annales des telecommunications*, vol.42, no.3/4, Mar/Apr.1987, pp.105-117.

LIST OF PUBLICATIONS

A. Vodeći svjetski časopisi

- [A1] Veselin Ivanović, LJubiša Stanković, Dušan Petranović: "Finite word-length effects in implementation of algorithms for time-frequency signal analysis", *IEEE Transaction on Signal Processing*, vol.46, no.7, July 1998, pp.2035-2041.
- [A2] LJubiša Stanković, Veselin Ivanović: "Further results on the minimum variance time-frequency distribution kernels", *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol.45, no.6, June 1997, pp.1650-1655.
- [A3] LJubiša Stanković, Veselin Ivanović, Zoran Petrović: "Unified approach to the noise analysis in the Wigner distribution and Spectrogram using S-method", *Annales des Telecommunications*, no.11/12, Nov/Dec.1996, pp.585-594.
- [A4] LJubiša Stanković, Miloš Daković, Veselin Ivanović: "Performances of spectrogram as an IF estimator", *Electronics Letters*, u štampi.
- [A5] Veselin Ivanović, Miloš Daković, LJubiša Stanković: "Performances of quadratic time-frequency distributions as instantaneous frequency estimators", *IEEE Transactions on Signal Processing*, upućen na recenziju.

B. Jugoslovenski časopisi

- [B6] Đorđe Jovanović, Veselin Ivanović, Radovan Stojanović: "Jednosmjerni konvertor za povećanje/sniženje napona ili buck-boost-ov konvertor", *ETF Journal of Electrical Engineering*, vol.5, no.1, April 1995, pp.53-64.
- [B7] Veselin Ivanović, LJubiša Stanković, Dušan Petranović: "The quantization effects study in implementation of time-frequency distributions", *ETF Journal of Electrical Engineering*, vol.7, no.1, April 1998.

- [B8] **Veselin Ivanović**, Miloš Daković, LJubiša Stanković: "Analysis of the instantaneous frequency estimation with the reduced interference distributions", *ETF Journal of Electrical Engineering*, vol.8, no.1, Nov.1999.
- [B9] **Veselin Ivanović**, Miloš Daković, LJubiša Stanković: "The exact estimation error analysis in the instantaneous frequency estimation by using quadratic time-frequency distributions", *ETF Journal of Electrical Engineering*, u štampi.

C. Međunarodne konferencije

- [C10] **Veselin Ivanović**, LJubiša Stanković, Zdravko Uskoković: "Quantization effects in implementation of distributions from the Cohen class", in *Proc of the IX European Signal Processing Conference*, Island of Rhodes, Greece, Sept.1998, pp.649-652.
- [C11] **Veselin Ivanović**, Miloš Daković, Igor Đurović, LJubiša Stanković: "Instantaneous frequency estimation by using time-frequency distributions", in *Proc. of the IEEE International Conference on Acoust., Speech and Signal Processing*, Salt Lake City, May 2001.

D. Jugoslovenske konferencije

- [D12] **Veselin Ivanović**, Zoran Petrović: "Uticaj šuma na S-metod za vremensko-frekvencijsku obradu signala", *XXXIX Symp. ETRAN*, vol. 1, Jun 1995, pp.226-230.
- [D13] **Veselin Ivanović**, LJubiša Stanković, Zdravko Uskoković: "Uticaj šuma na generalisanu diskretnu Cohenovu klasu vremensko-frekvencijskih distribucija", *XL Symp. ETRAN*, vol. 1, Jun 1996, pp.346-349.
- [D14] Igor Đurović, **Veselin Ivanović**: "Uticaj ograničene dužine registara na rezultate dobijene vremensko-frekveničkom analizom", *XL Symp. ETRAN*, vol. 1, Jun 1996, pp.297-300.
- [D15] **Veselin Ivanović**, LJubiša Stanković: "Vremensko-frekvencijske distribucije sa minimalnom varijansom", *XLI Symp. ETRAN*, vol. 1, Jun 1997.
- [D16] **Veselin Ivanović**, LJubiša Stanković: "Error analysis in implementation of the S-method (SM) based sistem for time-frequency signal analysis", *XIII Conference of Applied Mathematics, PRIM 98*, Budva 1998.
- [D17] **Veselin Ivanović**, LJubiša Stanković: "Efekti ograničene dužine registara kod t-f distribucija", *konferencija IT '96*, Žabljak 1996.
- [D18] **Veselin Ivanović**, LJubiša Stanković: "Analiza uticaja šuma na vremensko-frekvencijske distribucije sa primjedom na efekte ograničene dužine riječi", *konferencija IT '97*, Žabljak 1997.
- [D19] **Veselin Ivanović**, Miloš Daković: "Reduced interference distributions in instantaneous frequency estimation", *XLIII Symp. ETRAN*, vol. 1, Sept.1999.

E. Knjige

[E20] Zajednički rad na monografiji: LJ. Stanković et all: "Time-frequency signal analysis", *Electrotechnical faculty Podgorica*, 1999.

[E21] Zajednički rad na knjizi: LJ. Stanković, I. Djurović: "Zbirka riješenih zadataka iz digitalne obrade signala", *University of Montenegro*.

