

UNIVERZITET CRNE GORE  
ELEKTROTEHNIČKI FAKULTET

Miloš Daković

**ESTIMACIJA PARAMETARA SIGNALA  
DEKOMPOZICIJOM U VREMENSKO-FREKVENCIJSKOM  
DOMENU SA PRIMJENOM NA RADARSKE SIGNALE**

- doktorska disertacija -

Podgorica, 2005.

# Predgovor

Obrada signala je danas široko rasprostranjena u mnogim praktičnim situacijama, kao što su analize ekonomskih parametara na berzi, bio-medicinskih, telekomunikacionih, radarskih, sonarskih signala i sl. Od velikog je interesa iz analiziranog signala izvući korisnu informaciju, odnosno na osnovu njega donijeti ispravnu odluku. Izdvajanje informacije iz signala predstavlja kompleksan problem, koji podrazumijeva poznavanje funkcionisanja sistema koji je generisao signal, načina na koji su informacije sadržane u signalu i metoda izdvajanja tih informacija.

Tema ove teze je estimacija (procjena) značajnih parametara signala, kao što su amplituda, frekvencija, prisustvo signala u slučajevima jakog šuma i odvajanje korisnog signala od signala smetnji. Algoritam izdvajanja (dekompozicije) korisnog signala iz signala koji pored korisnog dijela sadrži i smetnju, zasnovan na analizi sopstvenih vektora na odgovarajući način formirane matrice, jedan je od glavnih naučnih doprinosa ove teze. Pored teorijskih razmatranja, analizirane metode estimacije su primijenjene na simuliranim i realnim primjerima.

Motiv za razmatranje navedene teme bio je analiza realnih radarskih signala i učešće autora u naučno-istraživačkim projektima: "Time-frequency Signal Analysis: Methods and Applications", podržanog od strane Volkswagen fondacije i "Micro-Doppler and Moving Target Analysis Using Time-Frequency Analysis Techniques" podržanog od kanadskog Ministarstva odbrane.

Dio rezultata dobijenih istraživanjima navedenim u tezi naučno je verifikovan publikovanjem radova u vodećim svjetskim naučnim časopisima iz oblasti obrade signala i prezentovanjem na međunarodnim konferencijama.

# Izvod teze

Vremensko-frekvencijska analiza signala je oblast u okviru obrade signala koja svakim danom nalazi sve više primjena, prvenstveno zahvaljujući razvoju teorijskih metoda analize i napredovanju mikroprocesorskih sistema koji danas mogu u realnom vremenu da obavljaju numerički veoma komplikovane zadatke.

Osnovni cilj istraživanja objedinjenih u ovoj tezi je primjena vremensko-frekvencijske analize signala u estimaciji parametara signala. Glavni rezultat istraživanja je metod dekompozicije složenih signala, čije su karakteristike detaljno analizirane. Metod je primjenjiv na analizu radarskih signala, pri čemu spektar mogućih primjena svakako nije ograničen isključivo na radarske signale.

Rezultati istraživanja su u tezi izloženi kroz četiri poglavlja i zaključak.

U uvodnom poglavlju teze date su osnovne definicije signala i Furijeove transformacije. U drugom poglavlju definisani su osnovni pojmovi vremensko-frekvencijske analize. Nakon toga navedeni su prikazi metoda vremensko-frekvencijske analize, sa posebnim naglaskom na spektrogram, Wignerovu distribuciju i S-metod.

Treće poglavlje se bavi metodima estimacije parametara signala. U okviru ovog poglavlja teorijski je izveden metod dekompozicije signala baziran na S-metodu, sopstvenim vrijednostima i sopstvenim vektorima na odgovarajući način formirane matrice. Pored toga definisan je i vremensko-frekvencijski zasnovan metod za detekciju determinističkog nestacionarnog signala u prisustvu jakog šuma.

U četvrtom poglavlju analiziraju se radarski signali. Izveden je model radarskog signala, analizirani signali dobijeni na osnovu modela kao i eksperimentalno dobijeni radarski signali. Osnovni rezultati prikazani u tezi sumirani su u zaključku.

# Abstract

Time-frequency signal analysis is an important part of signal analysis, with many novel applications mainly due to development of the theoretical methods and improvements in microprocessor technology. Modern microprocessors are able to solve very complex tasks in real-time.

Main research topic, presented in this thesis, is time-frequency signal analysis application to signal's parameters estimation. The main result is method for multicomponent signal decomposition. The presented decomposition method is applicable, but not restricted, to the radar signals analysis.

Thesis is organized as follows:

Basic definitions, and Fourier transform are presented in Chapter 1. Chapter 2 presents basic definitions and methods in time-frequency signal analysis. Among many time-frequency analysis tools, Spectrogram, Wigner distribution and S-method are thoroughly explained.

Parameter estimation methods are presented in Chapter 3. Decomposition method based on the S-method and decomposition of an appropriately formed matrix to the eigenvalues and eigenvectors is theoretically derived. Furthermore, time-frequency based method for nonstationary signal detection in presence of high noise is developed.

The model of radar signals is presented in Chapter 4. Methods described in the third chapter are applied to the simulated and experimental radar signals. Short description of the main results is given in the conclusion.

# Sadržaj

Predgovor . . . . .	1
Izvod teze . . . . .	2
Abstract . . . . .	3
Spisak korišćenih simbola . . . . .	6
<b>1 Uvod</b>	<b>8</b>
1.1 Kontinualni signali . . . . .	9
1.2 Diskretni signali . . . . .	10
1.3 Furijeova transformacija . . . . .	12
1.3.1 Kontinualna Furijeova transformacija . . . . .	12
1.3.2 Furijeova transformacija diskretnih signala . . . . .	14
1.3.3 Diskretna Furijeova transformacija . . . . .	15
<b>2 Vremensko-frekvencijska analiza signala</b>	<b>17</b>
2.1 Osnovni pojmovi . . . . .	18
2.1.1 Trenutna frekvencija i grupno kašnjenje . . . . .	18
2.1.2 Idealna vremensko-frekvencijska distribucija . . . . .	19
2.1.3 Osobine vremensko-frekvencijskih distribucija . . . . .	19
2.2 Vremensko-frekvencijske transformacije I reda . . . . .	24
2.2.1 Kratkotrajna Furijeova transformacija . . . . .	24
2.2.2 Wavelet transformacija . . . . .	25
2.3 Vremensko-frekvencijske transformacije II reda . . . . .	26
2.3.1 Spektrogram . . . . .	28
2.3.2 Wignerova distribucija . . . . .	30
2.3.3 Cohen-ova klasa distribucija . . . . .	34

2.3.4	S-metod . . . . .	36
<b>3</b>	<b>Metodi procjene parametara signala</b>	<b>43</b>
3.1	Procjena amplitude signala . . . . .	44
3.2	Procjena trenutne frekvencije signala . . . . .	45
3.2.1	Problemi vezani za definiciju trenutne frekvencije . . . . .	46
3.2.2	Bias i varijansa trenutne frekvencije . . . . .	49
3.3	Dekompozicija multikomponentnih signala . . . . .	49
3.3.1	Dekompozicija signala bazirana na inverziji Wignerove distribucije .	51
3.3.2	Dekompozicija signala bazirana na S-metodu . . . . .	53
3.3.3	Analiza uticaja šuma na proces dekompozicije signala . . . . .	61
3.4	Procjena egzistencije determinističkog signala . . . . .	66
3.4.1	Detekcija prisustva signala pomoću Furijeove transformacije . . . .	66
3.4.2	Detekcija prisustva signala vremensko-frekvencijskom analizom . . .	69
<b>4</b>	<b>Analiza radarskih signala</b>	<b>73</b>
4.1	Modeliranje radarskih signala . . . . .	74
4.1.1	Model reflektovanog signala . . . . .	74
4.1.2	Model smetnji (clutter-a) . . . . .	83
4.1.3	Dekompozicija simuliranih radarskih signala . . . . .	85
4.2	Analiza realnih radarskih signala . . . . .	90
4.2.1	Kriterijumi izbora sopstvenih vektora . . . . .	91
4.2.2	Primijenjeni algoritam . . . . .	95
4.2.3	Rezultati . . . . .	97
4.3	Detekcija signala mete . . . . .	106
4.3.1	Detekcija stacionarnih signala . . . . .	106
4.3.2	Detekcija nestacionarnih signala . . . . .	107
4.3.3	Primjeri detekcije . . . . .	108
	<b>Zaključak</b>	<b>112</b>
	<b>Literatura</b>	<b>114</b>
	<b>Prilog</b>	<b>120</b>

# Spisak korišćenih simbola

Simbol	Značenje
$t$	kontinualna vremenska varijabla
$\omega$	kontinualna frekvencijska varijabla
$x(t)$	kontinualni signal
$n$	diskretna vremenska varijabla
$*_t$	konvolucija po varijabli $t$
$x(n)$	diskretni signal
$X(\omega)$	Furijeova transformacija signala $x(t)$
$\mathcal{F}[\cdot]$	operator Furijeove transformacije
$X(e^{j\omega})$	Furijeova transformacija diskretnog signala $x(t)$
$\mathcal{F}_{ds}[\cdot]$	operator Furijeove transformacije diskretnih signala
$DFT[\cdot]$	Diskretna Furijeova transformacija
$\mathbb{R}$	skup realnih brojeva
$\mathbb{C}$	skup kompleksnih brojeva
$\mathbb{Z}$	skup cijelih brojeva
$\mathbb{N}$	skup prirodnih brojeva
$E_x$	energija signala $x$
$\otimes_t^T$	cirkularna konvolucija po varijabli $t$ sa periodom $T$
$(\cdot)^*$	konjugovano kompleksna vrijednost $(\cdot)$
$STFT$	kratkotrajna Furijeova transformacija
$WD$	Wignerova distribucija
$SM$	S-metod

Simbol	Značenje
TFD	Vremensko-frekvencijska distribucija
TFR	Vremensko-frekvencijska reprezentacija
HF	Visoko-frekvencijski
SWR	Radar sa površinskim talasom
CIT	Ukupno vrijeme integracije radarskog signala



# Poglavlje 1

## Uvod

U okviru ovog poglavlja, pored osnovnih definicija pojma signala navedeni su i klasični metodi za analizu signala bazirani na Furijeovoj transformaciji, pri čemu je posebna pažnja posvećena osobinama Furijeove transformacije u različitim kontekstima analize kontinualnih, diskretnih aperiodičnih i diskretnih periodičnih signala.

Pod pojmom signala podrazumijevamo fizički proces koji se rasprostire, odnosno mijenja se u prostoru ili u vremenu, a koji se može koristiti za upravljanje drugim fizičkim procesima.

Pojam signala usko je vezan sa pojmom informacije. Od samog opažanje signala u većini slučajeva nema neposredne koristi, potrebno je izdvojiti one karakteristike signala koje nose neku informaciju. Na primjer, kod govornog signala poznavanje zakonitosti promjene vazdušnog pritiska na organ čula sluha ne daje pravu informaciju, već se taj signal obradom u centralnom nervnom sistemu pretvara u korisnu informaciju, drugim riječima mi, razumijemo izgovorenu poruku. Koliko proces izdvajanja informacije iz signala može biti komplikovan najbolje se može ilustrovati govornim signalom. Poznato je da se govorni signal može lako pretvoriti u električni kontinualni, a zatim u diskretni signal sa proizvoljno malim gubitkom u kvalitetu zvuka i sa nikakvim gubitkom informacija koje govorni signal prenosi slušaocu. Obrada tog signala u cilju automatskog prepoznavanja izgovorenog teksta je još uvijek neriješen problem. Dakle, time što raspolažemo sa signalom teorijski imamo mogućnost izvući bilo koju informaciju koju taj signal nosi, ali u konkretnom slučaju to može biti praktično nerješiv problem.

Informacija može biti sadržana u signalu na mnogo različitih načina. U nekim

slučajevima je sasvim jasan postupak kojim se informacija ugrađuje u signal (na primjer radio difuzni signal kod kojeg je primijenjena amplitudska modulacija) i u takvim slučajevima, na relativno jednostavan način, možemo obezbijediti izdvajanje informacije iz signala. Sa druge strane, postoje slučajevi gdje nam nije poznato na koji je način informacija koju želimo dobiti uključena u signal, pa tada moramo analizirati veliki broj karakteristika signala ne bismo li pronašli način za dobijanje informacije. Primjer takvih signala su vibracije automobilskeg motora. Pošto su te vibracije uzrokovane radom motora, bilo kakva nepravilnost u radu utiče i na vibracije, te je teorijski moguće na osnovu signala vibracija u potpunosti kontrolisati ispravnost rada motora. U praksi se susrećemo sa problemom analize komplikovanog signala gdje veliki problem predstavlja određivanje načina za izdvajanje željene informacije [47].

Analiza signala zahtijeva uvođenje modela signala, gdje ćemo na matematički jasan način predstaviti ukupnu informaciju koju signal nosi, ne ulazeći u problem izdvajanja korisne informacije. Ovakav način modeliranja signala u skladu je sa praktičnim iskustvom da primjenom odgovarajućih senzora, proizvoljni signal možemo pretvoriti u oblik pogodan za dalju obradu. U zavisnosti od broja varijabli signala možemo uvesti podjelu na jednodimenzione signale, koji zavise od jedne varijable i višedimenzione signale, koji zavise od više varijabli. Primjer jednodimenzionog signala je govorni signal, koji je funkcija vremena, dok je primjer višedimenzionog signala slika, gdje intenzitet boje zavisi od horizontalne i vertikalne pozicije posmatrane tačke na slici.

## 1.1 Kontinualni signali

Pod matematičkim modelom jednodimenzionalnog kontinualnog signala smatramo funkciju koja preslikava skup realnih brojeva  $\mathbb{R}$  (ili neki njegov povezan podskup) na skup kompleksnih brojeva  $\mathbb{C}$ :  $x : t \rightarrow x(t)$ . Ukoliko je kodomen signala skup realnih brojeva za takav signal kažemo da je realan. Na osnovu analize realnih signala, pojavila se potreba za dodatnim definicijama i klasifikaciji signala, tako da:

- Za signal kod kojeg je  $x(t) = 0$  van nekog konačnog intervala  $[a, b]$  kažemo da je signal sa ograničenim trajanjem.
- Amplitudu signala definišemo kao  $A(t) = |x(t)|$  a trenutnu snagu kao  $P(t) = |x(t)|^2$ .

- Ukoliko postoji vrijednost integrala:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = E_x \quad (1.1)$$

tu vrijednost nazivamo energijom signala, a klasu signala kod kojih je navedeni integral definisan i konačan nazivamo signalima sa konačnom energijom.

- Za signal kod kojeg postoji pozitivan broj  $T$  takav da je  $x(t + T) = x(t)$  za sve vrijednosti argumenta  $t$  kažemo da je periodičan. Minimalna vrijednost za  $T$  za koju navedena osobina važi naziva se osnovni period signala.

Pored ovih osnovnih osobina signala koje možemo izvesti iz matematičkog modela, odnosno vremenske reprezentacije signala ukoliko varijabla  $t$  predstavlja vrijeme, postoji i širok spektar definicija vezanih za specifične slučajeve signala, tako se, na primjer, kod signala kratkog trajanja može definisati vremenska pozicija signala kao:

$$T_x = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} t|x(t)|^2 dt}{\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt} \quad (1.2)$$

i njegovo trajanje kao:

$$D_x = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} t^2|x(t - T_x)|^2 dt}{\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt} \quad (1.3)$$

ukoliko navedeni integrali postoje.

Pod analizom signala u vremenskom domenu podrazumijevamo dobijanje informacije sadržane u signalu posmatranjem njegove vremenske reprezentacije. U slučaju signala koji opisuje promjenu temperature u nekom tehnološkom procesu, sama vrijednost signala predstavlja informaciju, tako da dalja analiza ovakvog signala nije neophodna ukoliko je jedina informacija koju želimo dobiti vrijednost temperature. Posmatrajući vremenski oblik signala elektrokardiograma ljekar može dobiti informacije o funkcionisanju srca. Sa druge strane posmatranjem vremenskog zapisa muzičkog signala, veoma je teško izvući zaključak o kakvoj se muzici radi, a pogotovu dobiti informaciju šta bi naše uho čulo ukoliko bi taj signal bio transformisan u zvučni talas.

## 1.2 Diskretni signali

Za razliku od kontinualnih signala kojima je domen skup realnih brojeva, diskretni signali su definisani na prebrojivim skupovima. Ukoliko je kodomen diskretnog signala

konačan skup takav signal nazivamo digitalnim. U praksi postoji veliki broj signala koji su po svojoj prirodi diskretni ili digitalni. Na primjer, maksimalna dnevna temperatura je primjer diskretnog signala gdje je nezavisna promjenljiva ekvivalentna vremenu, odnosno rednom broju dana. Primjer digitalnog signala je tekst, gdje signal uzima neku vrijednost (slovo) iz konačnog alfabeta, dok je nezavisna promjenljiva pozicija slova u tekstu. Sa pojmom diskretnog signala usko je vezan i pojam kvantizacije kojim od proizvoljnog diskretnog signala dobijamo digitalni signal podjelom skupa mogućih vrijednosti na disjunktne podintervale i dodjeljivanjem konstante vrijednosti svakom podintervalu.

Diskretni signal matematički možemo modelirati kao preslikavanje skupa cijelih brojeva  $\mathbb{Z}$  na skup  $\mathbb{C}$ :  $x : n \rightarrow x(n)$ . Osnovne osobine diskretnog signala definišu se po analogiji sa kontinualnim signalima.

- Za diskretni signal kažemo da je signal konačnog trajanja ukoliko je različit od nule samo na konačnom broju indeksa  $n$ .
- Amplitudu diskretnog signala definišemo kao  $A(n) = |x(n)|$  a trenutnu snagu kao  $P(n) = |x(n)|^2$ .
- Energiju diskretnog signala definišemo sa:

$$E_x = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)|^2 \quad (1.4)$$

i signale kod kojih navedena suma konvergira nazivamo diskretni signali sa konačnom energijom.

- Diskretni signal se naziva periodičnim ukoliko postoji prirodan broj  $N$  takav da vrijedi  $x(n + N) = x(n)$  za sve vrijednosti  $n$ . Minimalni broj  $N$  koji zadovoljava navedenu relaciju naziva se osnovnim periodom diskretnog signala.

Osnovna osobina konačnih diskretnih signala je da se mogu predstaviti konačnim skupom vrijednosti, što omogućuje njihovu analizu digitalnim mikroprocesorskim sistemima. Za razliku od analognih sistema koji se koriste u analizi kontinualnih signala gdje je konfiguracija sistema realizovana korišćenjem fizičkih elemenata, diskretni sistem se realizuje pisanjem odgovarajućeg programskog koda. Stoga su diskretni sistemi jako fleksibilni, izmjena sistema se svodi na izmjenu programskog koda.

Pod postupkom diskretizacije podrazumijevamo dobijanje diskretnog signala ekvivalentnog posmatranom kontinualnom signalu. Pokazano je da, pod određenim uslovima, dobijeni diskretni signal sadrži istu informaciju kao posmatrani kontinualni signal. Primjer diskretizacije je digitalna fotografija, gdje se kontinualni dvodimenzioni signal pretvara u diskretni signal, podjelom slike na konačan broj tačaka konačnih dimenzija.

## 1.3 Furijeova transformacija

Osnovno sredstvo za analizu periodičnih i kvaziperiodičnih signala je Furijeova transformacija. U zavisnosti od karakteristika signala razlikujemo i više tipova Furijeove transformacije. U nastavku ovog dijela biće navedena tri osnovna tipa Furijeove transformacije namijenjena analizi kontinualnih, diskretnih i diskretnih signala konačnog trajanja [4, 7, 8].

### 1.3.1 Kontinualna Furijeova transformacija

Posmatrajmo kontinualni signal  $x(t)$  i pretpostavimo da je njegova energija  $E_x = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt$  konačna. Furijeova transformacija (FT) signala  $x(t)$  definiše se kao:

$$\mathcal{F}_{t \rightarrow \omega}[x(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t} dt \quad (1.5)$$

pri čemu indeks  $t \rightarrow \omega$  tumačimo da se integracija u definicionom integralu vrši po varijabli  $t$  (vremenska varijabla) i da je rezultat funkcija kod koje se pojavljuje nova varijabla  $\omega$  (frekvencijska varijabla). Indeks u oznaci Furijeove transformacije možemo ispustiti ukoliko je u konkretnom slučaju jasno koja je varijabla vremenska a koja frekvencijska.

Za signal  $x(t)$  čija je Furijeova transformacija  $\mathcal{F}[x(t)] = X(\omega)$  inverzna Furijeova transformacija je:

$$\mathcal{F}_{\omega \rightarrow t}^{-1}[X(\omega)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)e^{j\omega t} d\omega \quad (1.6)$$

Osnovne osobine Furijeove transformacije su:

**FT0 Linearost:** Ako je  $\mathcal{F}[x(t)] = X(\omega)$  i  $\mathcal{F}[y(t)] = Y(\omega)$  tada za  $\forall A, B \in \mathbb{C}$  vrijedi:

$$\mathcal{F}[Ax(t) + By(t)] = AX(\omega) + BY(\omega) \quad (1.7)$$

**FT1 Pomjeranje signala u vremenu:** Ukoliko je  $\mathcal{F}[x(t)] = X(\omega)$  tada za  $\forall T \in \mathbb{R}$  vrijedi:

$$\mathcal{F}[x(t - T)] = e^{-j\omega T} X(\omega) \quad (1.8)$$

**FT2 Modulacija:** Ako je  $\mathcal{F}[x(t)] = X(\omega)$  tada za  $\forall \omega_0 \in \mathbb{R}$  vrijedi:

$$\mathcal{F}[e^{j\omega_0 t} x(t)] = X(\omega - \omega_0) \quad (1.9)$$

**FT3 Konvolucija:** Ako je  $\mathcal{F}[x(t)] = X(\omega)$  i  $\mathcal{F}[y(t)] = Y(\omega)$  tada vrijedi:

$$\mathcal{F}[x(t) *_t y(t)] = X(\omega)Y(\omega) \quad (1.10)$$

gdje operator  $*_t$  označava konvoluciju po varijabli  $t$ .

**FT4 Proizvod:** Ako je  $\mathcal{F}[x(t)] = X(\omega)$  i  $\mathcal{F}[y(t)] = Y(\omega)$  tada vrijedi:

$$\mathcal{F}[x(t)y(t)] = X(\omega) *_\omega Y(\omega) \quad (1.11)$$

gdje  $*_\omega$  označava konvoluciju po varijabli  $\omega$ .

**FT5 Konjugovano kompleksni signal:** Ako je  $\mathcal{F}[x(t)] = X(\omega)$  tada vrijedi:

$$\mathcal{F}[x^*(t)] = X^*(-\omega) \quad (1.12)$$

gdje  $(\cdot)^*$  označava konjugovano kompleksnu veličinu  $(\cdot)$ . Posledica ove osobine je da u slučaju realnog signala  $x(t)$  vrijedi  $X(\omega) = X^*(\omega)$ .

**FT6 Izvod:** Ako je  $\mathcal{F}[x(t)] = X(\omega)$  i ako za  $\forall t \in \mathbb{R}$  postoji prvi izvod signala  $x(t)$  tada vrijedi:

$$\mathcal{F}\left[\frac{dx(t)}{dt}\right] = j\omega X(\omega) \quad (1.13)$$

**FT7 Integral:** Ako je  $\mathcal{F}[x(t)] = X(\omega)$  i ako je  $\int_0^t x(\tau)d\tau$  signal konačne energije tada vrijedi:

$$\mathcal{F}\left[\int_0^t x(\tau)d\tau\right] = \frac{1}{j\omega} X(\omega) \quad (1.14)$$

**FT8 Parsevalova teorema:** Ako je  $\mathcal{F}[x(t)] = X(\omega)$  tada vrijedi:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |X(\omega)|^2 d\omega \quad (1.15)$$

### 1.3.2 Furijeova transformacija diskretnih signala

Posmatrajmo diskretni signal  $x(n)$  konačne energije  $E_x = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)|^2$ . Furijeova transformacija navedenog signala definiše se kao:

$$\mathcal{F}_{ds}[x(n)] = X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\omega n} \quad (1.16)$$

Iz definicije se vidi da je Furijeova transformacija diskretnih signala periodična funkcija frekvencijske varijable sa periodom  $\omega = 2\pi$ . Inverzna transformacija je:

$$\mathcal{F}_{ds}^{-1}[X(e^{j\omega})] = x(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(\omega)e^{j\omega n} d\omega \quad (1.17)$$

Osnovne osobine Furijeove transformacije diskretnih signala su:

**FTds0 Linearnost:** Ako je  $X(e^{j\omega}) = \mathcal{F}_{ds}[x(n)]$  i  $Y(e^{j\omega}) = \mathcal{F}_{ds}[y(n)]$ , tada za  $\forall A, B \in \mathbb{C}$  vrijedi:

$$\mathcal{F}_{ds}[Ax(n) + By(n)] = AX(e^{j\omega}) + BY(e^{j\omega}) \quad (1.18)$$

**FTds1 Periodičnost:** Furijeova transformacija  $X(e^{j\omega})$  diskretnog signala  $x(n)$  je periodična sa periodom  $2\pi$  u odnosu na frekvencijsku varijablu  $\omega$ .

**FTds2 Pomjeranje signala:** Ako je  $X(e^{j\omega}) = \mathcal{F}_{ds}[x(n)]$  tada za  $\forall N \in \mathbb{Z}$  vrijedi:

$$\mathcal{F}_{ds}[x(n - N)] = e^{-Nj\omega} X(e^{j\omega}) \quad (1.19)$$

**FTds3 Modulacija signala:** Ako je  $X(e^{j\omega}) = \mathcal{F}_{ds}[x(n)]$  tada za  $\forall \omega_0 \in \mathbb{R}$  vrijedi:

$$\mathcal{F}_{ds}[x(n)e^{j\omega_0 n}] = X(e^{j(\omega - \omega_0)}) \quad (1.20)$$

**FTds4 Konvolucija:** Ako je  $X(e^{j\omega}) = \mathcal{F}_{ds}[x(n)]$  i  $Y(e^{j\omega}) = \mathcal{F}_{ds}[y(n)]$ , tada vrijedi:

$$\mathcal{F}_{ds}[x(n) *_n y(n)] = X(e^{j\omega})Y(e^{j\omega}) \quad (1.21)$$

gdje  $*_n$  označava konvoluciju u domenu diskretnog vremena  $n$ .

**FTds5 Proizvod:** Ako je  $X(e^{j\omega}) = \mathcal{F}_{ds}[x(n)]$  i  $Y(e^{j\omega}) = \mathcal{F}_{ds}[y(n)]$ , tada vrijedi:

$$\mathcal{F}_{ds}[x(n)y(n)] = \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\theta})Y(e^{j(\omega - \theta)}) d\theta = X(e^{j\omega}) \otimes_{\omega}^{2\pi} Y(e^{j\omega}) \quad (1.22)$$

gdje  $\otimes_{\omega}^{2\pi}$  označava cirkularnu konvoluciju u odnosu na varijablu  $\omega$  sa periodom  $2\pi$ .

**FTds6 Konjugovano kompleksni signal:** Ako je  $X(e^{j\omega}) = \mathcal{F}_{ds}[x(n)]$ , tada vrijedi:

$$\mathcal{F}_{ds}[x^*(n)] = X^*(e^{j\omega}) \quad (1.23)$$

**FTds7 Parsevalova teorema:** Ako je  $X(e^{j\omega}) = \mathcal{F}_{ds}[x(n)]$ , tada vrijedi:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |X(e^{j\omega})|^2 d\omega \quad (1.24)$$

### 1.3.3 Diskretna Furijeova transformacija

Posmatrajmo diskretni signal  $x(n)$  definisan za  $0 \leq n < N$ . Diskretna Furijeova transformacija  $X(k)$  signala  $x(n)$  definiše se kao:

$$X(k) = DFT[x(n)] = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)W_N^{nk} \quad (1.25)$$

gdje je  $W_N = e^{-j\frac{2\pi}{N}}$ . Kako je  $W_N^{nk}$  periodična funkcija po varijabli  $k$ , to će i  $X(k)$  biti periodična funkcija po varijabli  $k$ . Inverzna Diskretna Furijeova transformacija se računa kao:

$$x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k)W_N^{-nk} \quad (1.26)$$

Navedeni izraz vrijedi u opsegu definisanosti polaznog signala  $0 \leq n < N$ .

Osnovne osobine diskretne Furijeove transformacije diskretnih signala su:

**DFT0 Linearost:** Ako je  $X(k) = DFT[x(n)]$  i  $Y(k) = DFT[y(n)]$ , gdje su signali  $x(n)$  i  $y(n)$  definisani na istom vremenskom intervalu  $0 \leq n < N$ , tada za  $\forall A, B \in \mathbb{C}$  vrijedi:

$$DFT[Ax(n) + By(n)] = AX(k) + BY(k) \quad (1.27)$$

Ukoliko su signali  $x(n)$  i  $y(n)$  različitih dužina  $N_x$  i  $N_y$ , tada se u računanju  $DFT$  mora koristiti  $N \geq \max(N_x, N_y)$ , pri čemu kraći signal treba dopuniti potrebnim brojem nula.

**DFT1 Periodičnost:** Furijeova transformacija  $X(k)$  diskretnog signala  $x(n)$  je periodična sa periodom  $N$  u odnosu na frekvencijski indeks  $k$ .



**DFT2 Cirkularno pomjeranje signala:** Ako je  $X(k) = DFT[x(n)]$  tada za  $\forall m \in \mathbb{Z}$  vrijedi:

$$DFT[x(n - m \bmod N)] = W_N^{-km} X(k) \quad (1.28)$$

u signalu  $x(n - m \bmod N)$  indeks se određuje po modulu  $N$ , tako da je dobijeni signal cirkularno pomjeren originalni signal, pri čemu se (za  $m \leq N$ ) vrijednosti signala u trenucima  $m \leq n < N$  transliraju na opseg  $0 \leq n < N - m$ , dok se vrijednosti signala u trenucima  $0 \leq n < m$  transliraju na opseg  $N - m \leq n < N$ .

**DFT3 Modulacija signala:** Ako je  $X(k) = DFT[x(n)]$  tada za  $\forall k_0 \in \mathbb{Z}$  vrijedi:

$$DFT[x(n)e^{j\frac{2\pi}{N}k_0n}] = X(k - k_0) \quad (1.29)$$

**DFT4 Cirkularna konvolucija:** Ako je  $X(k) = DFT[x(n)]$  i  $Y(k) = DFT[y(n)]$ , pri čemu su signali  $x(n)$  i  $y(n)$  jednake dužine tada vrijedi:

$$DFT[x(n) \otimes_n^N y(n)] = X(k)Y(k) \quad (1.30)$$

gdje  $\otimes_n^N$  označava cirkularnu konvoluciju u domenu diskretnog vremena  $n$  sa periodom  $N$ .

**DFT5 Linearna konvolucija:** Ako je  $X(k) = DFT[x(n)]$  i  $Y(k) = DFT[y(n)]$ , pri čemu su dužine signala  $x(n)$  i  $y(n)$  jednake  $N_x$ , odnosno  $N_y$ , tada za  $N \geq N_x + N_y - 1$  vrijedi:

$$DFT[x(n) *_n y(n)] = X(k)Y(k) \quad (1.31)$$

gdje  $*_n$  označava linearnu konvoluciju u odnosu na varijablu  $n$ .

**DFT6 Proizvod:**  $X(k) = DFT[x(n)]$  i  $Y(k) = DFT[y(n)]$ , pri čemu su signali  $x(n)$  i  $y(n)$  jednake dužine tada vrijedi:

$$DFT[x(n)y(n)] = \frac{1}{N} X(k) \otimes_k^N Y(k) \quad (1.32)$$

gdje  $\otimes_k^N$  označava cirkularnu konvoluciju u po varijabli  $k$  sa periodom  $N$ .

**DFT7 Parsevalova teorema:** Ako je  $X(k) = DFT[x(n)]$ , tada vrijedi:

$$\sum_{n=0}^{N-1} |x(n)|^2 = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} |X(k)|^2 \quad (1.33)$$

## Poglavlje 2

# Vremensko-frekvencijska analiza signala

Pod vremensko-frekvencijskom analizom signala [1, 2, 6, 9] podrazumijeva se preslikavanje jednodimenzionog signala, bilo kontinualnog ili diskretnog, u dvodimenzioni domen, gdje se uz zadržavanje vremenske koordinate dodaje frekvencijska koordinata. Jedan od osnovnih ciljeva vremensko-frekvencijske analize je utvrđivanje raspodjele energije signala po frekvencijama za posmatrani vremenski trenutak. Ovakva analiza vodi ka vremensko-frekvencijskim distribucijama (TFD), pri čemu termin distribucija znači da dvodimenziona funkcija opisuje energiju signala. Postoji veliki broj slučajeva gdje nije od interesa tačan iznos energije signala, već želimo analizirati, na primjer, trenutnu frekvenciju signala. U tom slučaju govorimo o vremensko-frekvencijskim reprezentacijama (TFR), kojima je osnovni zadatak jasan prikaz karakteristika signala. S obzirom da je vremensko-frekvencijska reprezentacija signala dvodimenziona funkcija vremena i frekvencije, to se nad njom mogu primjenjivati algoritmi obrade slike [5] kao jedan od načina izdvajanja korisne informacije iz signala. Da bi se govorilo o vremensko-frekvencijskim distribucijama i reprezentacijama neophodno je prethodno definisati osnovne pojmove, kao i poželjne osobine.

Vremensko-frekvencijska analiza se primjenjuje u slučajevima kada analizom signala u jednom od osnovnih domena (vremenskom ili frekvencijskom) ne možemo dobiti željenu informaciju. Takvi signali su najčešće pseudo-periodični, odnosno pokazuju tendenciju promjene spektra signala u vremenu.

Nastavak ovog poglavlja organizovan je u tri sekcije, gdje se u prvoj definišu osnovni pojmovi vremensko-frekvencijske analize, zatim se uvode osnovne vremensko-frekvencijske transformacije I i II reda. Različiti praktični i teorijski problemi doveli su do definisanja velikog broja metoda u vremensko-frekvencijskoj analizi [1, 2, 9, 12, 20, 37, 43]. U okviru ovog poglavlja akcenat je stavljen na kratkotrajnu Furijeovu transformaciju, spektrogram, Wignerovu distribuciju i S-metod.

## 2.1 Osnovni pojmovi

### 2.1.1 Trenutna frekvencija i grupno kašnjenje

Za signal:

$$x(t) = A(t)e^{j\phi(t)} \quad (2.1)$$

kod kojega je amplituda  $A(t)$  sporopromjenjiva funkcija u odnosu na fazu  $\phi(t)$ , može se definisati trenutna frekvencija [6]:

$$\omega_i(t) = \frac{d\phi(t)}{dt} = \frac{d}{dt} \arg[x(t)] \quad (2.2)$$

kao frekvencija signala u trenutku  $t$ . Za slučaj prostoperiodičnih signala dobija se da je njihova trenutna frekvencija jednaka frekvenciji signala u svakom trenutku  $t$ . Treba naglasiti da je ovako definisan pojam jako vezan sa uslovima nametnutim signalu  $x(t)$ , te da ukoliko navedeni uslovi nijesu ispunjeni, pojam trenutne frekvencije postaje čisto matematički pojam lišen svakog fizičkog smisla. Uslov da pojmu trenutne frekvencije dodijelimo fizički smisao se može formulisati tako da zahtijevamo da u trenutku  $t$  vrijedi da je  $\omega'_i(\tau) \ll 1$  za  $\tau \in [t - 2k\pi/\omega_i(t), t + 2k\pi/\omega_i(t)]$ , gdje veličina  $k$  određuje koliko perioda signala želimo da posmatramo da bismo donijeli zaključak o njegovoj frekvenciji. Dualan pojam pojmu trenutne frekvencije je grupno kašnjenje signala. Ono se definiše za signale čija se Furijeova transformacija može napisati u obliku:

$$X(\omega) = A(\omega)e^{j\phi(\omega)} \quad (2.3)$$

gdje je funkcija  $A(\omega)$  sporopromjenjiva u odnosu na funkciju  $\phi(\omega)$ . Tada je:

$$t_g(\omega) = -\frac{d\phi(\omega)}{d\omega} = -\frac{d}{d\omega} \arg[X(\omega)] \quad (2.4)$$

Grupno kašnjenje možemo posmatrati kao lokaciju komponente signala koja ima frekvenciju  $\omega$  na vremenskoj osi.

### 2.1.2 Idealna vremensko-frekvencijska distribucija

Polazeći od pojma trenutne frekvencije  $\omega_i(t)$  signala možemo definisati idealnu vremensko-frekvencijsku distribuciju signala [1, 2, 6]

$$x(t) = A(t)e^{j\phi(t)} \quad (2.5)$$

kao:

$$ITFD_x^\omega = 2\pi |A(t)|^2 \delta(\omega - \omega_i(t)) \quad (2.6)$$

gdje je  $\delta(\cdot)$  Dirakova funkcija, a gornji indeks  $\omega$  ukazuje na to da je idealna TFD izvedena na osnovu trenutne frekvencije signala. Dualno navedenoj definiciji, polazeći od grupnog kašnjenja  $t_g(\omega)$  možemo definisati idealnu TFD za signal kod kojega je

$$X(\omega) = A(\omega)e^{j\phi(\omega)} \quad (2.7)$$

kao:

$$ITFD_x^t(t, \omega) = |A(\omega)|^2 \delta(t - t_g(\omega)). \quad (2.8)$$

Na ovaj način definisane idealne TFD nemaju velikog praktičnog značaja, jer je za određivanje veličine  $\omega_i(t)$  (odnosno  $t_g(\omega)$ ) neophodno vršiti diferenciranje faze signala (odnosno njegove Furijeove transformacije), što možemo koristiti jedino kod sintetičkih signala sa potpuno poznatim talasnim oblikom. Dakle, idealne TFD ne možemo primijeniti na realnim signalima. Značaj idealnih TFD je u tome što one mogu poslužiti kao dobra referenca za ocjenu i poređenje ostalih TFD.

### 2.1.3 Osobine vremensko-frekvencijskih distribucija

U ovom dijelu teze naveden je spisak osobina koje su poželjne kod vremensko-frekvencijskih distribucija. Detaljno objašnjenje pojedinih osobina može se naći u [1, 2, 6, 31]. Nijedna distribucija ne ispunjava sve poželjne osobine, već u zavisnosti od konkretnog slučaja primjene biramo onu TFD koja ima željene karakteristike. U navedenim osobinama  $TFD_x(t, \omega)$  označava vremensko-frekvencijsku

distribuciju signala  $x(t)$ ,  $X(\omega)$  je Furijeova transformacija signala  $x(t)$ ,  $N_0$  je skup prirodnih brojeva zajedno sa nulom, veličine  $t_0, t_1, t_2, \omega_0, \omega_1, \omega_2, a$  i  $c$  su realne.

**P0** TFD treba biti realna funkcija. Ova osobina u direktnoj je vezi sa tumačenjem vremensko-frekvencijskih distribucija kao raspodjela energije signala u vremensko-frekvencijskoj ravni. Sa druge strane, računanje distribucija, kao i njihovo analiziranje i grafičko predstavljanje jednostavnije je ukoliko se radi sa realnim vrijednostima.

**P1** TFD treba biti nenegativna funkcija, iz istih razloga kao i kod osobine P0. Ove dvije osobine su razdvojene, jer za razliku od osobine P0 koja je zadovoljena u velikom broju slučajeva, samo mali broj praktično upotrebljivih TFD zadovoljava osobinu nenegativnosti, naročito u slučajevima analize multikomponentnih signala.

**P2** Pomjeranje po vremenu. Ova osobina ukazuje na očekivanu činjenicu da ako analiziramo dva signala koji su istog oblika, ali pomjereni po vremenskoj osi, odnosno locirani u različitim vremenskim intervalima, dobijamo TFD koje su takođe istog oblika, uz isto pomjeranje po vremenskoj osi. Ukoliko računanje TFD predstavimo sistemom kod kojeg je ulaz signal  $x(t)$  a izlaz TFD tog signala, tada ova osobina zahtijeva da taj sistem bude vremenski invarijantan. Analitički ovu osobinu možemo zapisati kao:

$$TFD_y(t, \omega) = TFD_x(t - t_0, \omega) \quad (2.9)$$

$$\text{za } y(t) = x(t - t_0)$$

**P3** Pomjeranje po frekvenciji. Ova osobina je dualna osobini P2. Naime, ukoliko se posmatraju dva signala pri čemu je spektar drugog signala modulacijom sa  $e^{j\omega_0 t}$  transliran u odnosu na spektar prvog signala, tada se TFD jednog signala može dobiti od TFD drugog signala transliranjem po frekvencijskoj osi. Ova osobina ukazuje na to da TFD treba ravnopravno da tretira sve komponente signala, bez obzira na njihov položaj na frekvencijskoj osi. Analitički ovu osobinu iskazujemo formulom:

$$TFD_y(t, \omega) = TFD_x(t, \omega - \omega_0) \quad (2.10)$$

$$\text{za } y(t) = x(t)e^{j\omega_0 t}$$

**P4** Trenutna snaga signala. Kako TFD predstavlja raspodjelu energije signala po vremenu i po frekvenciji, za očekivati je da suma tih energija na svim frekvencijama u jednom vremenskom trenutku  $t$  bude jednaka energiji signala u tom trenutku, odnosno trenutnoj snagi signala. Analitički ovu osobinu zapisujemo sa:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} TFD_x(t, \omega) = |x(t)|^2 \quad (2.11)$$

**P5** Spektar snage signala. Dualno prethodnoj osobini, možemo očekivati da suma svih energija na jednoj frekvenciji računatih za sve vremenske trenutke  $t$  bude jednaka spektralnoj gustini snage posmatranog signala za posmatranu frekvenciju:

$$\int_{-\infty}^{\infty} TFD_x(t, \omega) dt = |X(\omega)|^2 \quad (2.12)$$

**P6** Vremenski momenti. Ova osobina predstavlja korak dalje u odnosu na osobinu P4. Slučaj  $n = 1$  možemo tumačiti kao računanje pozicije signala na vremenskoj osi. Tada prema ovoj osobini imamo da se pozicija signala na vremenskoj osi može sračunati kao prvi moment TFD u odnosu na vremensku koordinatu. Slučaj  $n = 2$  ima fizikalno tumačenje kod signala koji su centrirani u trenutku  $t = 0$ . Tada prema ovoj osobini dužinu trajanja signala, koju možemo određivati kao drugi moment signala u odnosu na vrijeme  $t$ , možemo odrediti i kao drugi moment TFD računat u odnosu na vremensku koordinatu.

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} t^n TFD_x(t, \omega) dt d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} t^n |x(t)|^2 dt \quad (2.13)$$

za svako  $n \in N_0$ .

**P7** Frekvencijski momenti. Dualno osobini P6 možemo zahtijevati da frekvencijski momenti TFD budu jednaki momentima spektra signala, pri čemu ovu osobinu možemo fizikalno tumačiti za  $n = 1$  (pozicija signala na frekvencijskoj osi) i za  $n = 2$  (procjena frekvencijskog opsega signala).

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \omega^n TFD_x(t, \omega) dt d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} \omega^n |X(\omega)|^2 d\omega \quad (2.14)$$

za svako  $n \in N_0$ .

**P8** Skaliranje signala po vremenu. Ova osobina proistekla je iz odgovarajuće osobine Furijeove transformacije, gdje na jednostavan način možemo odrediti FT skaliranog signala, ukoliko je poznata FT osnovnog signala.

$$TFD_y(t, \omega) = TFD_x(at, \frac{\omega}{a}) \quad (2.15)$$

za  $y(t) = \sqrt{|a|}x(at)$ ,  $a \neq 0$ .

**P9** Trenutna frekvencija signala. Ispunjenje ove osobine od interesa je u analizi monokomponentnih signala, sporopromjenjive frekvencije, kada možemo sa sigurnošću tvrditi šta je trenutna frekvencija signala:

$$\frac{\int_{-\infty}^{\infty} \omega TFD_x(t, \omega) d\omega}{\int_{-\infty}^{\infty} TFD_x(t, \omega) d\omega} = \omega_i(t) = \frac{d}{dt} \arg[x(t)] \quad (2.16)$$

Sa  $\omega_i(t)$  je označena trenutna frekvencija signala  $x(t)$  u trenutku  $t$ , pri čemu se podrazumijeva da se signal  $x(t)$  može napisati u obliku

$$x(t) = A(t)e^{j\phi(t)}, \quad (2.17)$$

gdje je  $A(t)$  sporopromjenljiva funkcija u odnosu na fazu  $\phi(t)$ .

**P10** Grupno kašnjenje (osobina dualna osobini P9):

$$\frac{\int_{-\infty}^{\infty} t TFD_x(t, \omega) dt}{\int_{-\infty}^{\infty} TFD_x(t, \omega) dt} = t_g(\omega) = \frac{d}{d\omega} \arg[X(\omega)] \quad (2.18)$$

Sa  $t_g(\omega)$  je označeno grupno kašnjenje komponente signala na učestanosti  $\omega$ , pri čemu se podrazumijeva da su komponente signala na svim frekvencijama  $\omega$  dobro vremenski lokalizovane.

**P11** Ograničenje po vremenu: Ako je  $x(t) = 0$  van segmenta  $[t_1, t_2]$ , tada je i  $TFD_x(t, \omega) = 0$  za vrijednosti  $t$  van  $[t_1, t_2]$  i za svaku vrijednost  $\omega$ . Ovom osobinom zahtijevamo da TFD dobro prikazuje ponašanje signala u vremenskom domenu.

**P12** Ograničenja po frekvenciji: Ako je  $X(\omega) = 0$  van segmenta  $[\omega_1, \omega_2]$ , tada je i  $TFD_x(t, \omega) = 0$  za vrijednosti  $\omega$  van  $[\omega_1, \omega_2]$  i za svako  $t$ . Ovom osobinom

iskazuje se činjenica da u TFD trebaju biti prisutne samo one komponente signala (u frekvencijskom domenu) koje su prisutne i u spektru signala.

**P13** Konvolucija signala. Ukoliko imamo sistem koji na svom ulazu ima signal  $x(t)$ , a impulsni odziv sistema je  $h(t)$ , ova nam osobina omogućava da na osnovu TFD signala i TFD impulsnog odziva sistema dobijemo TFD izlaznog signala  $y(t)$ .

$$TFD_y(t, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} TFD_h(t - \tau, \omega) TFD_x(\tau, \omega) d\tau \quad (2.19)$$

$$\text{za } y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t - \tau)x(\tau)d\tau.$$

**P14** Proizvod signala. Dualno prethodnoj osobini, po analogiji sa ponašanjem Furijeove transformacije, od TFD zahtijevamo da se TFD proizvoda dva signala dobija kao konvolucija TFD pojedinih signala po frekvencijskoj koordinati.

$$TFD_y(\tau, \omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} TFD_h(t, \omega - \theta) TFD_x(t, \theta) d\theta \quad (2.20)$$

$$\text{za } y(t) = h(t)x(t).$$

**P15** Furijeova transformacija signala. I ova osobina je izvedena po analogiji sa osobinom Furijeove transformacije, da ukoliko nam je poznata Furijeova transformacija signala  $x(t)$ , označimo je sa  $X(\omega)$ , tada lako možemo sračunati i Furijeovu transformaciju signala  $y(t) = X(t)$  dobijenog od  $X(\omega)$  zamjenom frekvencijske promjenljive vremenskom.

$$TFD_y(t, \omega) = TFD_x(-\omega, t) \quad (2.21)$$

$$\text{za } y(t) = X(t).$$

**P16** Čirp konvolucija. Ispunjenje ove osobine, kao i osobine P17 poželjno je u slučajevima kada analiziramo linearno frekvencijski modulirane signale.

$$TFD_y(t, \omega) = TFD_x\left(t - \frac{\omega}{c}, \omega\right) \quad (2.22)$$

$$\text{za } y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t - \tau)\sqrt{|c|}e^{jc\tau^2/2}d\tau.$$

**P17** Čirp proizvod:

$$TFD_y(t, \omega) = TFD_x(t, \omega - ct) \quad (2.23)$$

$$\text{za } y(t) = x(t)e^{jct^2/2}.$$



**P18** Moyal-ova osobina:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} TFD_x(t, \omega) TFD_y(t, \omega) dt d\omega = \left( \int_{-\infty}^{\infty} x(t)y(t) dt \right)^2 \quad (2.24)$$

Vremensko-frekvencijske distribucije, tumačene kao raspodjele energije signala, ne mogu biti linearne, mada je linearnost veoma poželjna osobina svake transformacije. Nemogućnost linearnosti TFD lako možemo dokazati ukoliko posmatramo signale  $x(t)$  i  $-x(t)$ . Oba signala trebaju imati identičnu TFD, dok TFD njihovog zbira treba biti identički jednaka nuli. Znači TFD zbira ova dva signala ne može biti jednaka zbiru TFD pojedinačnih signala. Ovaj primjer pokazuje koliko je zahtjev za linearnošću protivrječan samom pojmu vremensko-frekvencijske distribucije. Treba napomenuti da većina TFD zadovoljava uslov:

$$TFD_y(t, \omega) = |A|^2 TFD_x(t, \omega) \quad (2.25)$$

ukoliko je  $y(t) = Ax(t)$  gdje je  $A$  konstanta.

## 2.2 Vremensko-frekvencijske transformacije I reda

### 2.2.1 Kratkotrajna Furijeova transformacija

Najjednostavniji način proširivanja mogućnosti Furijeove transformacije u smislu vremenske lokalizacije pojedinih komponenti signala je kratkotrajna Furijeova transformacija (STFT). Nju je prvi definisao Gabor [27] četrdesetih godina prošlog vijeka motivisan problemima koji su nastupili u analizi govornog signala metodama klasične spektralne analize. Osnovna ideja je odsjeći dio signala, funkcijom prozora  $w(t)$ , i zatim naći njegovu Furijeovu transformaciju. Pomjeranjem prozora  $w(t)$  po vremenskoj osi dobija se dvodimenziona reprezentacija signala  $x(t)$ , koja se naziva kratkotrajna Furijeova transformacija.

$$STFT(t, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} w^*(\tau - t) \cdot x(\tau) \cdot e^{-j\omega\tau} d\tau \quad (2.26)$$

U navedenoj definiciji parametar  $t$  predstavlja položaj prozora na vremenskoj osi. Da bi STFT signala adekvatno opisivala osobine signala u posmatranom trenutku  $t$  poželjno je da funkcija prozora  $w(\tau)$  bude parna funkcija sa maksimumom u  $\tau = 0$ .

Sa stanovišta numeričke realizacije STFT poželjno je da funkcija prozora ima konačno trajanje, jer se tada integral može aproksimirati konačnom sumom. Posmatrajmo dva slučaja: konstantni signal  $x_1(t) = 1$  i delta impuls  $x_2(t) = \delta(t)$ . STFT ovih signala su:  $STFT_{x_1}(t, \omega) = W(\omega)e^{-j\omega t}$  i  $STFT_{x_2}(t, \omega) = w(t)$ . Idealne distribucije ova dva signala su  $ITFD_{x_1} = 2\pi\delta(\omega)$  i  $ITFD_{x_2} = \delta(t)$ , dakle da bi STFT signala po karakteristikama bila bliska idealnom slučaju potrebno je da prozor bude što bliži delta impulsu, a takođe i da Furijeova transformacija prozora bude bliska delta impulsu. Ova dva zahtjeva su kontradiktorna, pa se stoga traži kompromisni oblik funkcije prozora koji daje zadovoljavajuće rezultate u oba slučaja. Zaključimo da je poželjno da prozor bude funkcija kratkog trajanja u oba domena i vremenskom i frekvencijskom. Kratkotrajna Furijeova transformacija je linearna transformacija. Ona takođe zadovoljava osobine P2, P3, P13 i P14. Pored toga ova transformacija je reverzibilna, odnosno moguće je potpuno rekonstruisati signal na osnovu njegove STFT. Detaljna analiza osobina kratkotrajne Furijeove transformacije može se naći u [4, 31, 11].

## 2.2.2 Wavelet transformacija

Kratkotrajna Furijeova transformacija ima konstantnu rezoluciju po vremenskoj i po frekvencijskoj osi. Za analizu komponenti viših frekvencija nije neophodan širok prozor, dok je kod niskofrekventnih komponenti širok prozor neophodan. Stoga se nameće zaključak da bi dobro bilo koristiti promjenljivu širinu prozora. Najjednostavnija transformacija signala kod koje je primijenjena promjenjiva širina prozora je Wavelet transformacija [31, 40]:

$$WT(t, a) = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \cdot h^*\left(\frac{\tau - t}{a}\right) d\tau \quad (2.27)$$

gdje je  $h(t)$  osnovni wavelet dobro koncentrisan po vremenskoj i po frekvencijskoj osi. Ova transformacija je linearna, a takođe je moguće izvršiti rekonstrukciju signala na osnovu poznate Wavelet transformacije. Drugi parametar ove transformacije nije frekvencija, već skala  $a$ . Wavelet transformacija našla je veliku primjenu u metodama kompresije audio i video podataka. Energetska verzija Wavelet transformacije naziva se skalogram:

$$SCAL(t, a) = |WT(t, a)|^2 \quad (2.28)$$

## 2.3 Vremensko-frekvencijske transformacije II reda

U okviru ovog i narednog poglavlja biće prezentovani najznačajniji alati za vremensko-frekvencijsku analizu signala, u prvom redu Spektrogram, Wignerova distribucija i S-metod. Karakteristike prikazanih transformacija potkrijepljene su primjerima, pri čemu je uzet skup od šest karakterističnih signala. Signali su posmatrani na vremenskom intervalu:  $-128 \leq t < 128$ . Realni i imaginarni dio svakog od navedenih signala prikazani su na slici 2.1, zajedno sa amplitudom Furijeove transformacije posmatranih signala.

Signali korišćeni u primjerima su:

1. Signal sastavljen od četiri kratkotrajna Gausova signala, locirana na različitim mjestima u vremensko-frekvencijskoj ravni. Analitički zapis ovog signala je:

$$x(t) = e^{-\frac{\pi}{384}(t+64)^2} + e^{-\frac{\pi}{384}t^2} e^{j\frac{\pi}{2}t} + e^{-\frac{\pi}{384}(t-64)^2} e^{j\frac{\pi}{2}t} + e^{-\frac{\pi}{384}(t-64)^2} e^{-j\frac{\pi}{2}t} \quad (2.29)$$

odakle se može uočiti da druga i treća komponenta imaju istu frekvenciju ( $\omega_2 = \omega_3 = \frac{\pi}{2}$ ), ali se pojavljuju u različitim vremenskim trenucima ( $t_2 = 0, t_3 = 64$ ), dok se treća i četvrta komponenta pojavljuju istovremeno (u trenutku  $t_3 = t_4 = 64$ ) ali na različitim frekvencijama ( $\omega_4 = -\frac{\pi}{2}$ ). Prva komponenta locirana je u  $t_1 = -64$  i na frekvenciji  $\omega_1 = 0$ . Ovo je tipičan signal gdje jednodimenziona (vremenska ili frekvencijska) analiza signala ne pruža potpunu sliku signala, jer se u vremenskom domenu treća i četvrta komponenta ne mogu razlikovati, dok se u frekvencijskom domenu druga i treća komponenta ne mogu razdvojiti.

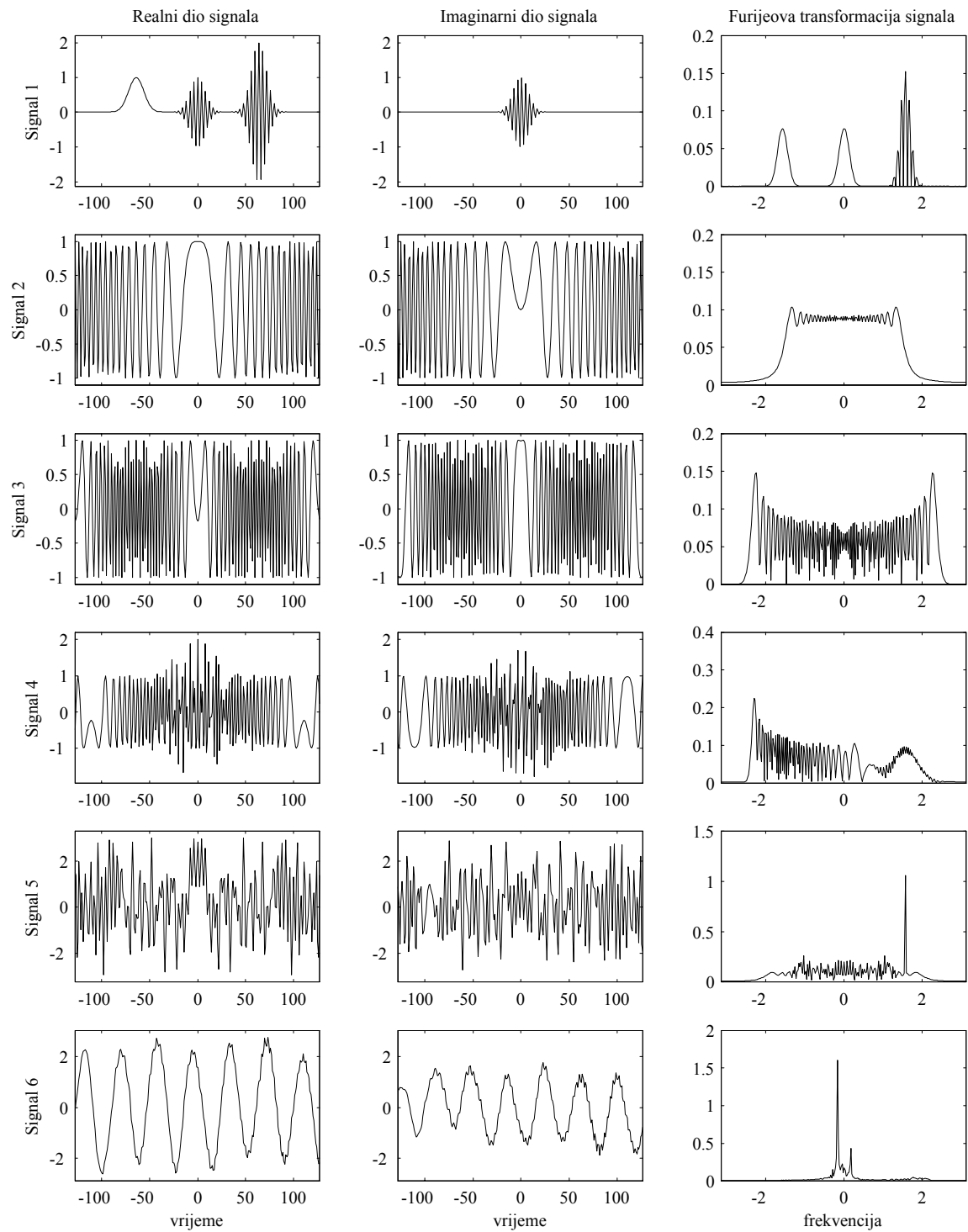
2. Linearno frekvencijski modulisan signal oblika:

$$x(t) = e^{j\frac{\pi}{512}t^2} \quad (2.30)$$

Kod ovog signala frekvencija je linearna funkcija vremena  $\omega(t) = \frac{\pi}{256}t$ , i u posmatranom vremenskom intervalu kreće se u granicama od  $-\frac{\pi}{2} \leq \omega(t) < \frac{\pi}{2}$ . Signal i njegov spektar su prikazani na slici 2.1, odakle se vidi da linearna promjena frekvencije signala nije uočljiva ni u vremenskom ni u frekvencijskom domenu.

3. Sinusoidalno frekvencijski modulisan signal oblika:

$$x(t) = e^{j96 \cos(\frac{\pi}{128}t)} \quad (2.31)$$



Slika 2.1: Realni i imaginarni dio signala i amplituda Furijeove transformacije za šest karakterističnih signala

Frekvencija ovog signala je  $\omega(t) = \frac{3\pi}{4} \sin(\frac{\pi}{128}t)$  tako da se u posmatranom vremenskom intervalu frekvencija kreće u granicama  $-\frac{3\pi}{4} \leq \omega(t) \leq \frac{3\pi}{4}$ .

4. Dvokomponentni signal sastavljen od signala sa parabolichnom promjenom trenutne frekvencije i linearno frekvencijski modulisanog signala kratkog trajanja:

$$x(t) = e^{j\frac{\pi}{3 \cdot 128^2}t^3 - j\frac{3\pi}{4}t} + e^{-(\frac{t}{64})^2} e^{j\frac{\pi}{512}t^2 + j\frac{\pi}{2}t} \quad (2.32)$$

Frekvencija prve komponente signala je  $\omega_1(t) = \frac{\pi}{128^2}t^2 - \frac{3\pi}{4}$  i u posmatranom vremenskom intervalu kreće se u granicama  $-\frac{3\pi}{4} \leq \omega_1(t) \leq \frac{\pi}{4}$ .

5. Signal sastavljen od tri komponente: komponenta konstantne frekvencije, linearno frekvencijski modulisana komponenta i sinusoidalno frekvencijski modulisana komponenta:

$$x(t) = e^{j\frac{\pi}{2}t} + e^{j\frac{\pi}{384}t^2} + e^{j32 \cos(3\pi t/256)} \quad (2.33)$$

6. Realni, eksperimentalno dobijeni, radarski signal.

Signali 1-5 su odabrani tako da na posmatranom vremenskom intervalu mogu biti odabirani sa korakom odabiranja  $T = 1$ , uz ispunjavanje uslova teoreme o odabiranju. Signal 6. je jedan od signala dobijenih na osnovu eksperimenta opisanog u odjeljku 4.2.

### 2.3.1 Spektrogram

Spektrogram je energetska verzija kratkotrajne Furijeove transformacije. Definiše se kao [1, 2, 31]:

$$SPEC(t, \omega) = |STFT(t, \omega)|^2 \quad (2.34)$$

Iz definicije se vidi da spektrogram uzima samo realne nenegativne vrijednosti. Spektrogram zadovoljava osobine P0, P1, P2, P3. Detaljna analiza osobina spektrograma može se naći u [10].

Glavni nedostatak spektrograma u odnosu na kratkotrajnu Furijeovu transformaciju je gubitak osobine linearnosti i nemogućnost rekonstrukcije signala na osnovu njegovog spektrograma. Jednostavno računanje kratkotrajne Furijeove transformacije, a samim tim i spektrograma, čini ovu distribuciju jednom od najčešće korišćenih.

Dobra osobina spektrograma je pored lakoće računanja i odsustvo neželjenih kros-članova što omogućava jednostavnu analizu multikomponentnih signala. Naime, ukoliko analiziramo signal sastavljen od  $n$  komponenti:

$$x(t) = \sum_{i=1}^n A_i(t) e^{j\phi_i(t)} \quad (2.35)$$

gdje su  $A_i(t)$  sporopromjenljive funkcije, tako da možemo smatrati da su konstantne u intervalu jednakom širini prozora koji se koristi za računanje spektrograma, dobijamo da se spektrogram ovog signala može aproksimirati sa:

$$STFT_x(t, \omega) \approx \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n A_i(t) A_j(t) e^{j(\phi_i(t) - \phi_j(t))} W(\omega - \phi'_i(t)) W^*(\omega - \phi'_j(t)) \quad (2.36)$$

pri čemu je pretpostavljeno da su drugi izvodi faza pojedinih komponenti signala zanemarljivi. U prethodnoj formuli  $W(\omega)$  predstavlja Furijeovu transformaciju korišćene funkcije prozora. Članove kod kojih je  $i = j$  nazivamo auto-članovima, dok članove dobijene za  $i \neq j$  nazivamo kros-članovima. Uvođenje ove terminologije zasnovano je na činjenici da za slučaj monokomponentnog signala  $n = 1$  imamo samo auto-član, dok se kros-članovi javljaju kao posledica međusobne interferencije različitih komponenti signala.

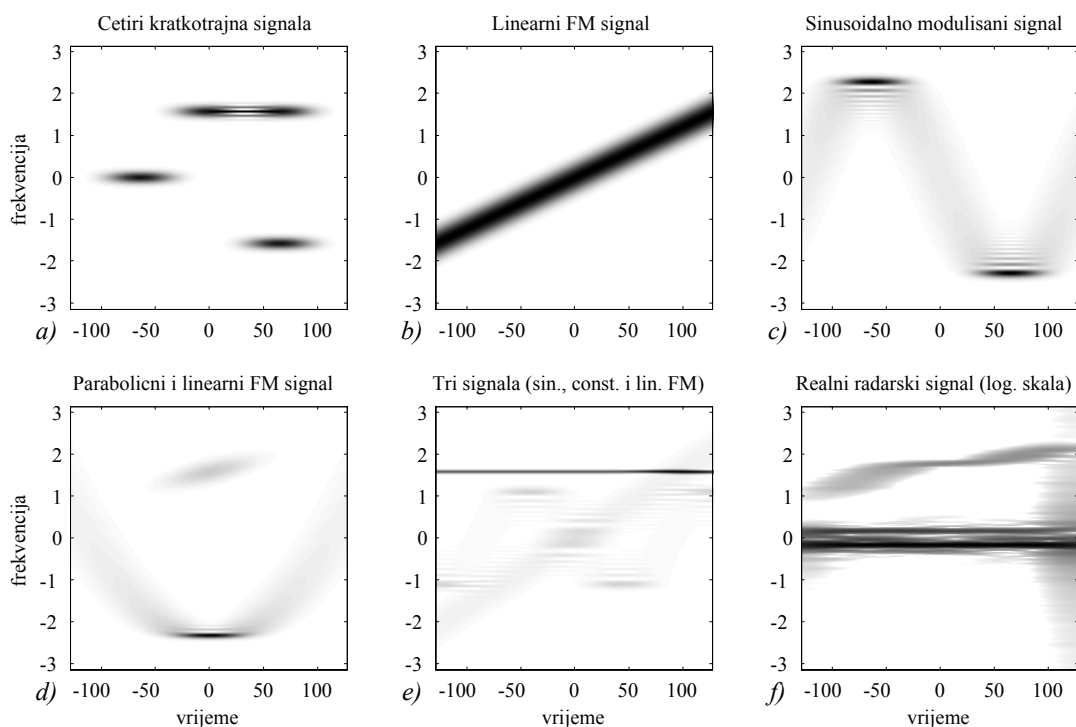
Poželjno je da funkcija prozora i njena Furijeova transformacija budu ograničenog trajanja. Neka je  $W(\omega) = 0$  za  $|\omega| > B$ . Tada za neko  $i$  i neko  $j$ ,  $i \neq j$  kros-član neće postojati ukoliko je:  $|\phi'_i(t) - \phi'_j(t)| > 2B$ , odnosno uslov za nepostojanje kros-članova kod spektrograma je da su komponente signala dovoljno razdvojene u TF ravni. Kros članovi kod spektrograma detaljno su analizirani u [36].

Na slikama 2.2, 2.3 i 2.4 prikazan je spektrogram signala definisanih na početku ovog poglavlja za Hanning-ov prozor širine 128, 32 i 8.

U slučaju veoma širokog prozora jedino je sinusoidalna komponenta na slici 2.2e kvalitetno prikazana, a ostale komponente imaju lošu vremensku i lošu frekvencijsku lokalizaciju.

Sa kraćim prozorom, slika 2.3, sve komponente su relativno dobro lokalizovane, a na grafiku e) mogu se uočiti kros članovi na mjestu presjeka komponenti.

Isuviše kratak prozor, slika 2.4, kvari frekvencijsku lokalizaciju komponenti. Osnovni preduslov za korišćenje spektrograma kao vremensko-frekvencijske reprezentacije signala je određivanje optimalne širine prozora, koja je očigledno zavisna od karakteristika



Slika 2.2: Spektrogrami računati sa Hanning-ovim prozorom širine 128

analiziranog signala [4, 21, 22]. Rezultati dobijeni spektrogramom su nezadovoljavajući ukoliko postoje brze promjene u amplitudi i frekvenciji signala koje se ne mogu umanjiti uzimanjem kratkog prozora usled gubitka rezolucije po frekvencijskoj osi.

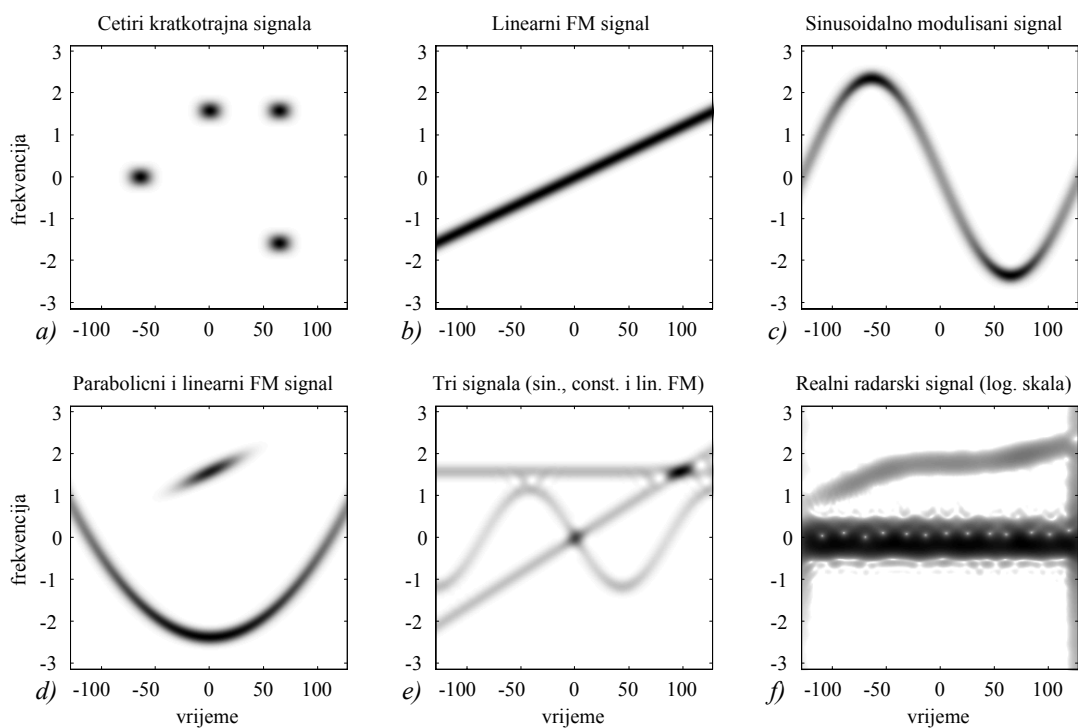
### 2.3.2 Wignerova distribucija

Ovu distribuciju definisao je Wigner [60] 1932. godine, a potreba za njom se pojavila u problemima kvantne mehanike. Na probleme obrade signala primijenjena 1948. godine od strane Ville-a [59], tako da se često referencira kao Wigner-Ville-ova distribucija. Wigner-ova distribucija  $WD(t, \omega)$  definiše se kao Furijeova transformacija lokalne autokorelacione funkcije  $R(t, \tau)$  posmatranog signala, po promjenljivoj  $\tau$ :

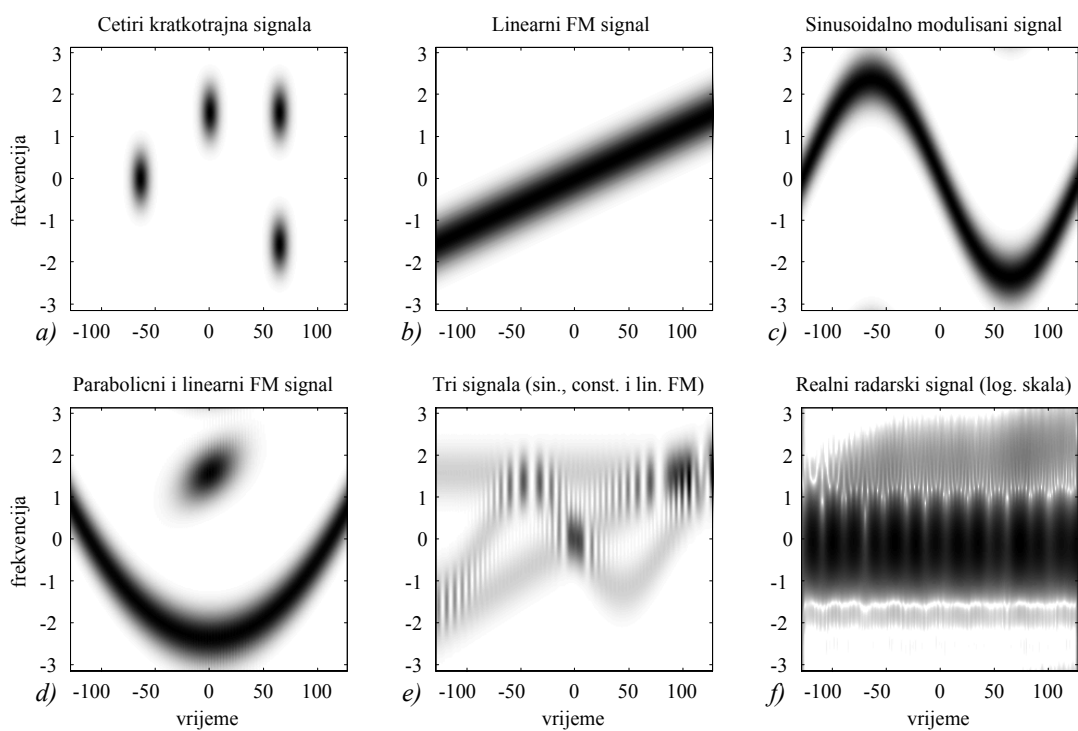
$$R(t, \tau) = x\left(t + \frac{\tau}{2}\right) \cdot x^*\left(t - \frac{\tau}{2}\right) \quad (2.37)$$

$$WD(t, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R(t, \tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \quad (2.38)$$

Wignerova distribucija signala konstantne amplitude, kod kojega se faza može prikazati polinomom drugog stepena poklapa se sa idealnom TFD tog signala. Ova distribucija



Slika 2.3: Spektrogrami računati sa Hanning-ovim prozorom širine 32



Slika 2.4: Spektrogrami računati sa Hanning-ovim prozorom širine 8



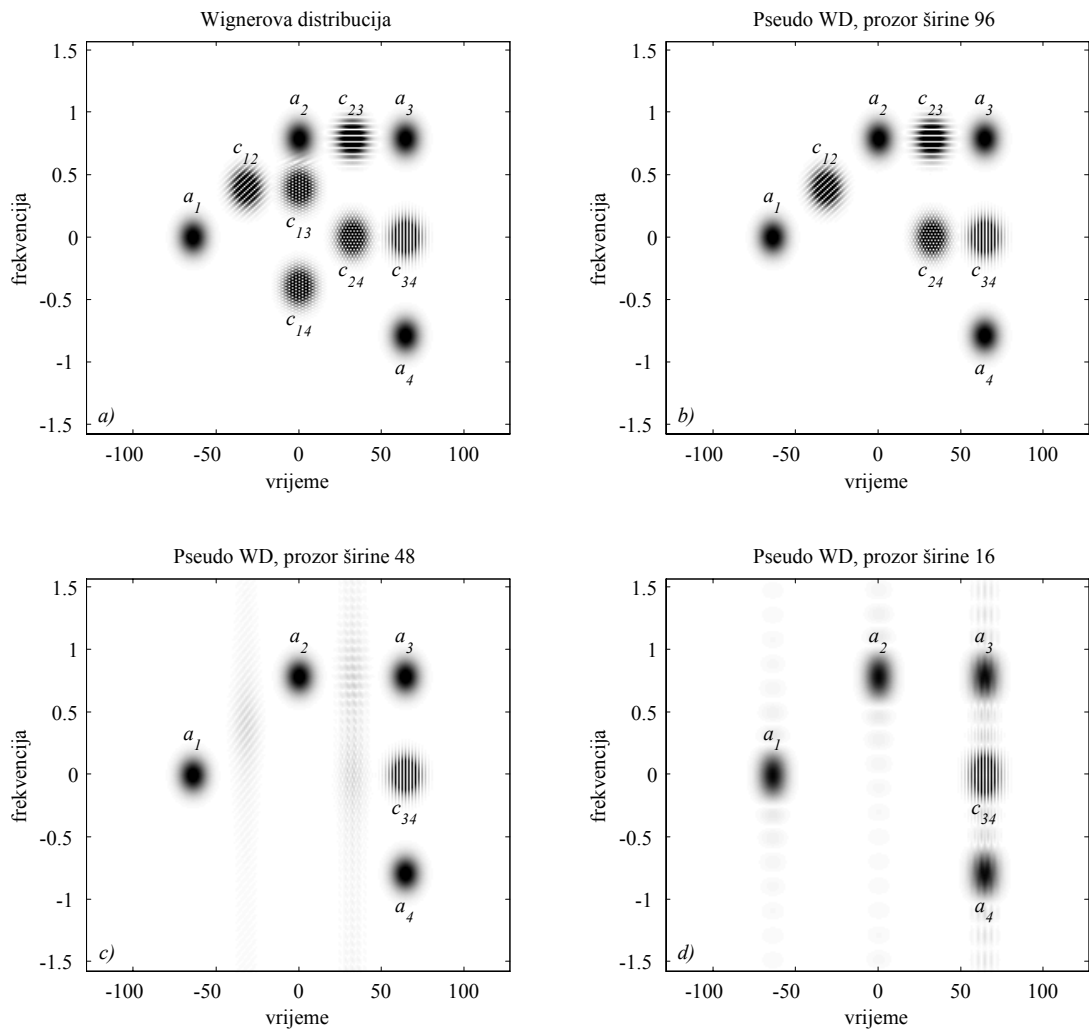
zadovoljava osobine P0-P18, izuzev osobine P1. Stoga ona predstavlja najznačajniju kvadratnu TFD. Najveći nedostatak Wignerove distribucije su izuzetno jako izraženi kros članovi. Posmatrajući Wignerovu distribuciju multikomponentnih signala može se doći do zaključka da se kros član javlja na sredini linije koja povezuje dvije komponente signala u TF ravni [23, 25]. Napomenimo da se ne mora raditi o multikomponentnom signalu, jer i kod monokomponentnog signala dolazi do interferencije komponenti signala lociranih u različitim vremenskim trenucima i na različitim frekvencijama. Praktične realizacije Wignerove distribucije zahtijevaju uvođenje ograničenja po  $\tau$  osi, odnosno množenje autokorelacione funkcije sa prozorom  $w(\tau)$ , te se na taj način dobija pseudo-Wignerova distribucija:

$$PWD(t, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t + \frac{\tau}{2}) \cdot x^*(t - \frac{\tau}{2}) w(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \quad (2.39)$$

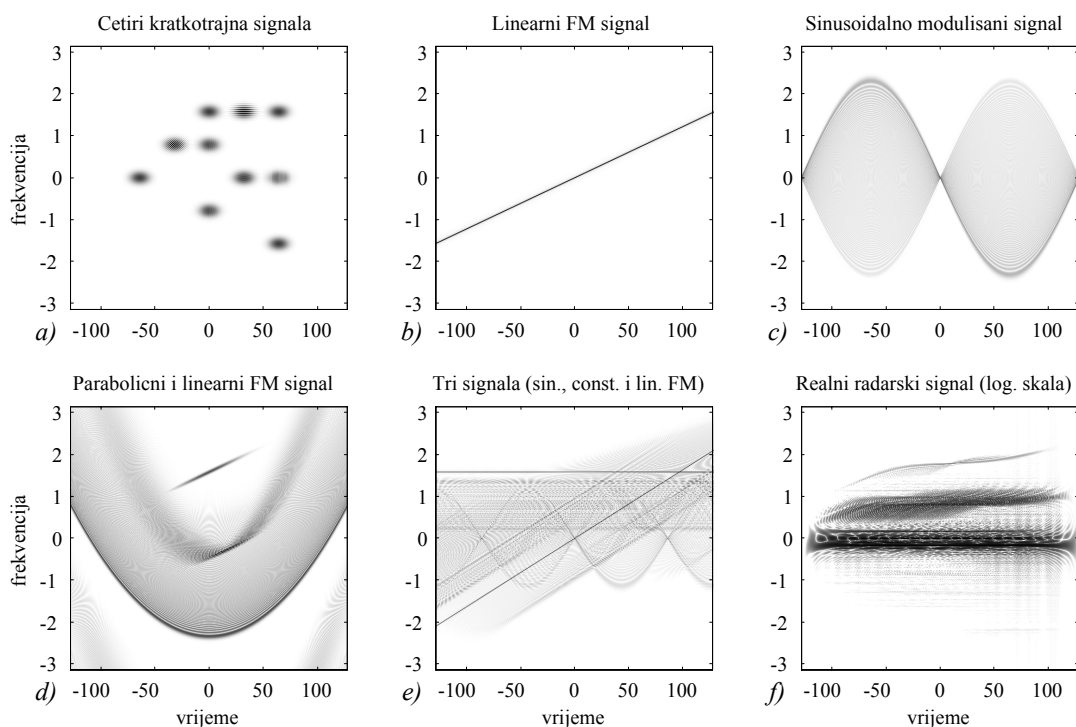
Ponašanje Wignerove i pseudo Wignerove distribucije ilustrujemo primjerom signala sastavljenog od četiri kratka impulsa (2.29). Na slici 2.5a prikazana je Wignerova distribucija navedenog signala. U vremensko-frekvencijskoj ravni su obilježeni auto-članovi ( $a_1, a_2, a_3$  i  $a_4$ ), kao i kros članovi  $c_{ij}$  nastali interferencijom  $i$ -te i  $j$ -te komponente signala. Sa slike se vidi da su kros-članovi locirani na geometrijskoj sredini između dva auto-člana, kao i da je njihova priroda oscilatorna. Na slici 2.5b,c i d prikazana je pseudo Wignerova distribucija posmatranog signala uz korišćenje pravougaonog prozora  $w(t)$  širine 96, 48 i 16, respektivno. Uočava se da smanjenjem širine prozora nestaju kros-članovi između komponenti koje su vremenski dovoljno udaljene jedna od druge, dok kros član komponenti lociranih u istom vremenskom trenutku ( $c_{34}$ ) ostaje neizmijenjen.

Dakle, pseudo Wignerova distribucija predstavlja dobar izbor ukoliko su komponente signala locirane u različitim, dovoljno udaljenim vremenskim intervalima, tako da u tom slučaju možemo dobiti vremensko-frekvencijsku reprezentaciju signala bez neželjenih kros-članova. Sa druge strane, pretjerano sužavanje prozora  $w(\tau)$  može dovesti do degradacije auto-članova. Na slici 2.5d se može uočiti da su auto-članovi prošireni po frekvencijskoj osi, kao posledica korišćenja prozora koji je kraći od dužine analizirane komponente signala.

Karakteristični signali definisani sa (2.29), (2.30), (2.31), (2.32), (2.33) i realni radarski signal analizirani su Wignerovom distribucijom i rezultati su prikazani na slikama 2.6, 2.7 i 2.8, za tri različite širine prozora: 256, 80 i 40. Korišćen je prozor veoma blizak



Slika 2.5: Wignerova distribucija (a) i pseudo Wignerova distribucija (b,c i d) sa različitim širinama prozora četvorokomponentnog signala. Auto-članovi su obilježeni oznakama  $a_i$  a kros-članovi oznakama  $c_{ij}$ .



Slika 2.6: Wignerove distribucije računane sa prozorom širine 256

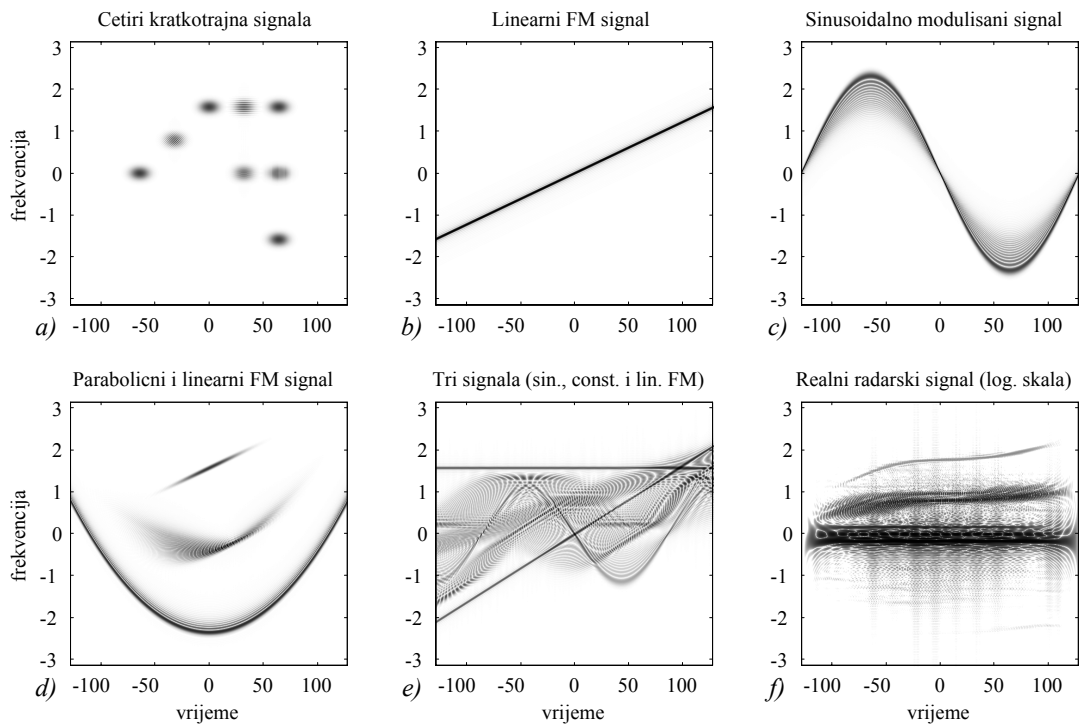
pravougaonom (četvrti korijen Hanning-ovog prozora). Signali sa linearnom promjenom frekvencije, najkvalitetnije su prikazani u slučaju najšireg prozora, dok je kod signala sa nelinearnom frekvencijom potrebno tražiti optimalnu širinu prozora. Smanjivanjem širine prozora smanjuje se interferencija između komponenti signala lociranih u različitim vremenskim trenucima, dok kros-članovi između više komponenti na istoj frekvenciji ostaju. U navedenim primjerima korak odabiranja iznosi  $T = 0.5$ , dvostruko manje nego u slučaju spektrograma i S-metoda.

### 2.3.3 Cohen-ova klasa distribucija

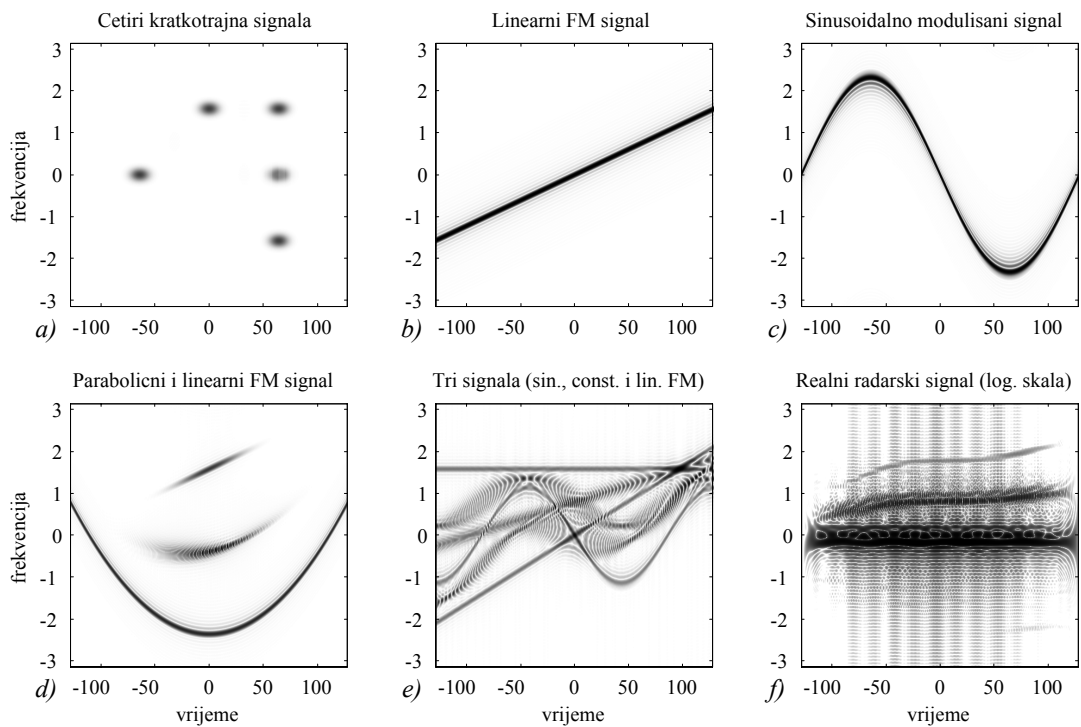
Osnova za definisanje ove klase distribucija su marginalni uslovi. Definicija klase i osnovne osobine se mogu naći u [19]. Cohenova klasa distribucija se definiše sa:

$$CD(t, \omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} c(\theta, \tau) \cdot x(u + \frac{\tau}{2}) \cdot x^*(u - \frac{\tau}{2}) \cdot e^{-j\theta t - j\omega\tau + j\theta u} du d\tau d\theta \quad (2.40)$$

gdje je  $c(\theta, \tau)$  jezgro distribucije na koje se nameću uslovi:  $c(\theta, 0) = 1$  i  $c(0, \tau) = 1$ , koji su neophodni da bi marginalni uslovi bili zadovoljeni. Ova definicija Cohen-ove



Slika 2.7: Wignerove distribucije računane sa prozorom širine 80



Slika 2.8: Wignerove distribucije računane sa prozorom širine 40

klase bazirana je na Wigner-ovoj distribuciji, a može se koristiti bilo koja distribucija koja zadovoljava marginalne uslove. Distribucije, od praktičnog značaja, iz ove klase su: Choi-Williams-ova distribucija [17]:

$$c(\theta, \tau) = e^{-\theta^2 \tau^2 / \sigma^2} \quad (2.41)$$

(parametar  $\sigma$  određuje širinu jezgra).

Born-Jordan-ova distribucija:

$$c(\theta, \tau) = \frac{2}{\theta \tau} \sin\left(\frac{\theta \tau}{2}\right) \quad (2.42)$$

Zao-Atlas-Marks-ova distribucija [12]:

$$c(\theta, \tau) = w(\tau) \left| \tau \right| \frac{2}{\theta \tau} \sin\left(\frac{\theta \tau}{2}\right) \quad (2.43)$$

gdje je  $w(\tau)$  funkcija prozora.

### 2.3.4 S-metod

Među svim vremensko-frekvencijskim distribucijama i reprezentacijama Wignerova distribucija zadovoljava najviše poželjnih osobina, tačnije sve osim druge, a njen najveći nedostatak je pojavljivanje kros-članova u analizi multikomponentnih signala. Kao izuzetno poželjnu osobinu treba naglasiti visoku koncentraciju auto-članova, posebno za slučaj linearno frekvencijski moduliranih signala, kada Wignerova distribucija postiže idealnu koncentraciju. Sa druge strane, kratkotrajna Furijeova transformacija, odnosno spektrogram veoma loše koncentriše komponente signala (sa izuzetkom stacionarnih signala) ali se kros članovi ne pojavljuju (izuzimajući slučajeve kada se komponente signala sijeku u vremensko-frekvencijskoj ravni kada u spektrogramu kros-član postoji na mjestu presjeka komponenti). Polazeći od poželjnih osobina ove dvije vremensko-frekvencijske reprezentacije i istražujući vezu između njih, razvijen je S-metod [1, 6, 44, 45]. S-metod je našao primjenu u velikom broju slučajeva. On je korišćen kao model u izradi "time-scale" reprezentacija, u estimaciji vremensko-promjenjivog spektra, detekciji i realizaciji reprezentacija višeg reda [15, 29, 39, 42, 48]. U [56] je izložena hardverska implementacija S-metoda. S-metod se takođe može koristiti i kao alternativni način za računanje Wignerove distribucije, bez potrebe za preodabiranjem analiziranog signala [50].

Polazna tačka u izvođenju S-metoda je poređenje definicionih izraza kratkotrajne Furijeove transformacije i Wignerove distribucije. Neka je  $f(t)$  kontinualan signal konačne energije na svakom konačnom intervalu  $[t_1, t_2]$ . Tada su kratkotrajna Furijeova transformacija i Wignerova distribucija signala  $f(t)$  date sa:

$$STFT(t, \omega) = \mathcal{F}_{\tau \rightarrow \omega} [w(\tau)f(t + \tau)] = \int_{-\infty}^{\infty} w(\tau)f(t + \tau)e^{-j\omega\tau} d\tau \quad (2.44)$$

$$WD(t, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} w\left(\frac{\tau}{2}\right)w^*\left(-\frac{\tau}{2}\right) \cdot f\left(t + \frac{\tau}{2}\right)f^*\left(t - \frac{\tau}{2}\right)e^{-j\omega\tau} d\tau \quad (2.45)$$

gdje je sa  $w(\tau)$  označen prozor, pri čemu je širina prozora konačna ili je signal  $f(t)$  konačnog trajanja.

Inverzna Furijeova transformacija (2.44) daje:

$$w(\tau)f(t + \tau) = \mathcal{F}_{\omega \rightarrow \tau}^{-1}[STFT(t, \omega)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} STFT(t, \omega)e^{j\omega\tau} d\omega \quad (2.46)$$

stavljajući umjesto varijable  $\tau$  izraze  $\frac{\tau}{2}$  i  $-\frac{\tau}{2}$  i kombinovanjem sa (2.45) dobijamo:

$$WD(t, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} STFT(t, \omega_1)e^{j\omega_1\tau/2} d\omega_1 \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} STFT^*(t, \omega_2)e^{j\omega_2\tau/2} d\omega_2 e^{-j\omega\tau} d\tau$$

mijenjajući redosled integracije, tako da u prvom koraku obavimo integraciju po varijabli  $\tau$  dolazimo do:

$$WD(t, \omega) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} STFT(t, \omega_1)STFT^*(t, \omega_2) \left( \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} - \omega\right)\tau} d\tau \right) d\omega_1 d\omega_2 \quad (2.47)$$

integral u zagradi je jednak  $2\pi\delta\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} - \omega\right)$  tako da dobijamo:

$$WD(t, \omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} STFT(t, \omega_1)STFT^*(t, \omega_2)\delta\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} - \omega\right) d\omega_1 d\omega_2 \quad (2.48)$$

što nakon integracije po  $\omega_2$  daje:

$$WD(t, \omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} STFT(t, \omega_1)STFT^*(t, 2\omega - \omega_1) d\omega_1 \quad (2.49)$$

uvođenjem smjene  $\omega_1 = \omega + \theta/2$  dobijamo:

$$WD(t, \omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} STFT\left(t, \omega + \frac{\theta}{2}\right)STFT^*\left(t, \omega - \frac{\theta}{2}\right) d\theta \quad (2.50)$$

Gornji izraz predstavlja direktnu vezu Wignerove distribucije, za koju smo napomenuli da ima veoma dobru koncentraciju komponenti u vremensko-frekvencijskoj ravni, i kratkotrajne Furijeove transformacije, koja je linearna i bez kros-članova. Analizom jednakosti (2.50) dolazi se do S-metoda:

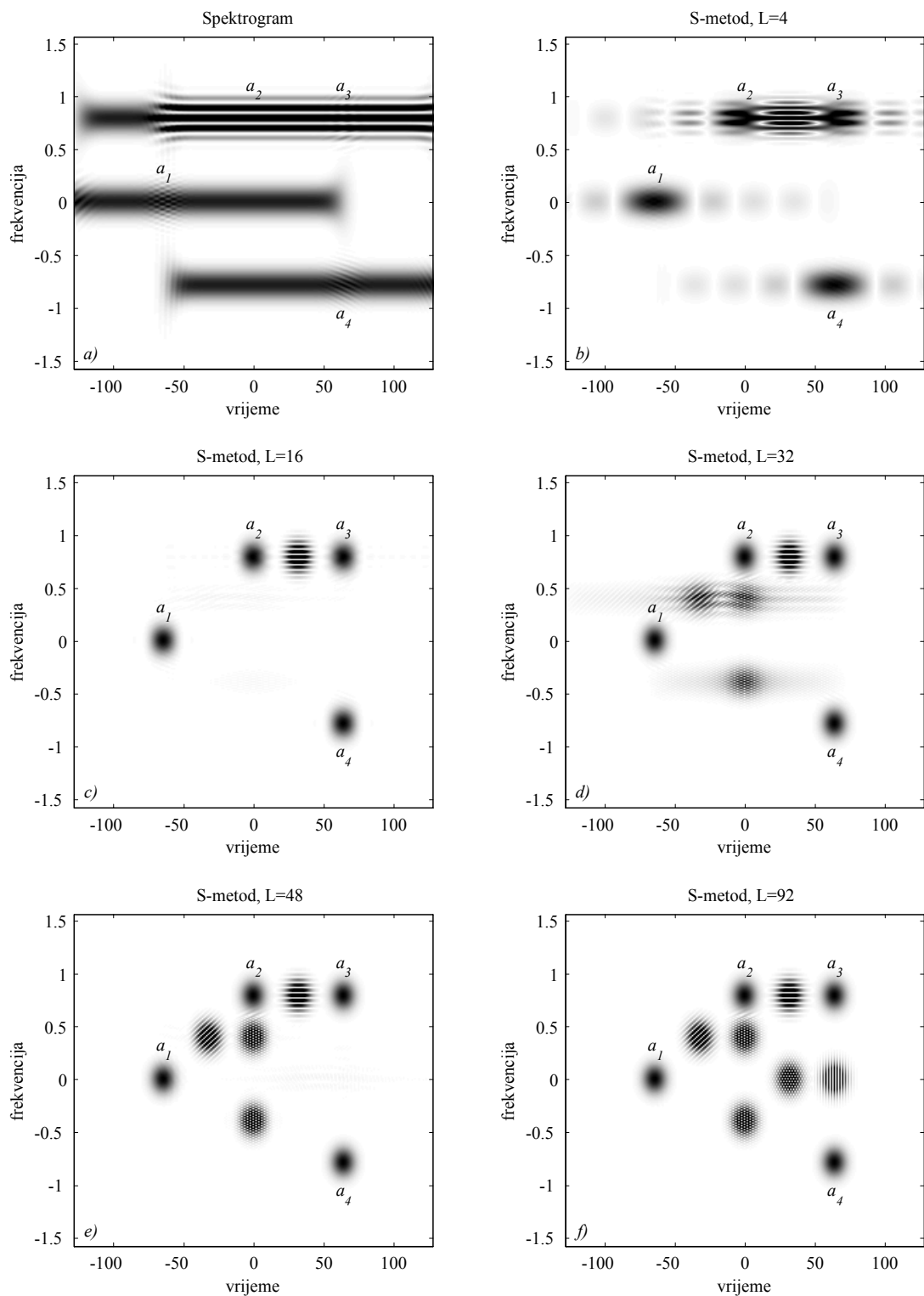
$$SM(t, \omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} P(\theta) STFT(t, \omega + \frac{\theta}{2}) STFT^*(t, \omega - \frac{\theta}{2}) d\theta \quad (2.51)$$

Jedina modifikacija u odnosu na izraz (2.50) je uvođenje prozora po  $\theta$  osi. Pravilno odabran prozor  $P(\theta)$  će koncentrisati komponente signala i neće proizvesti kros-članove.

Analiziranjem izraza (2.51) možemo doći do sledećih zaključaka:

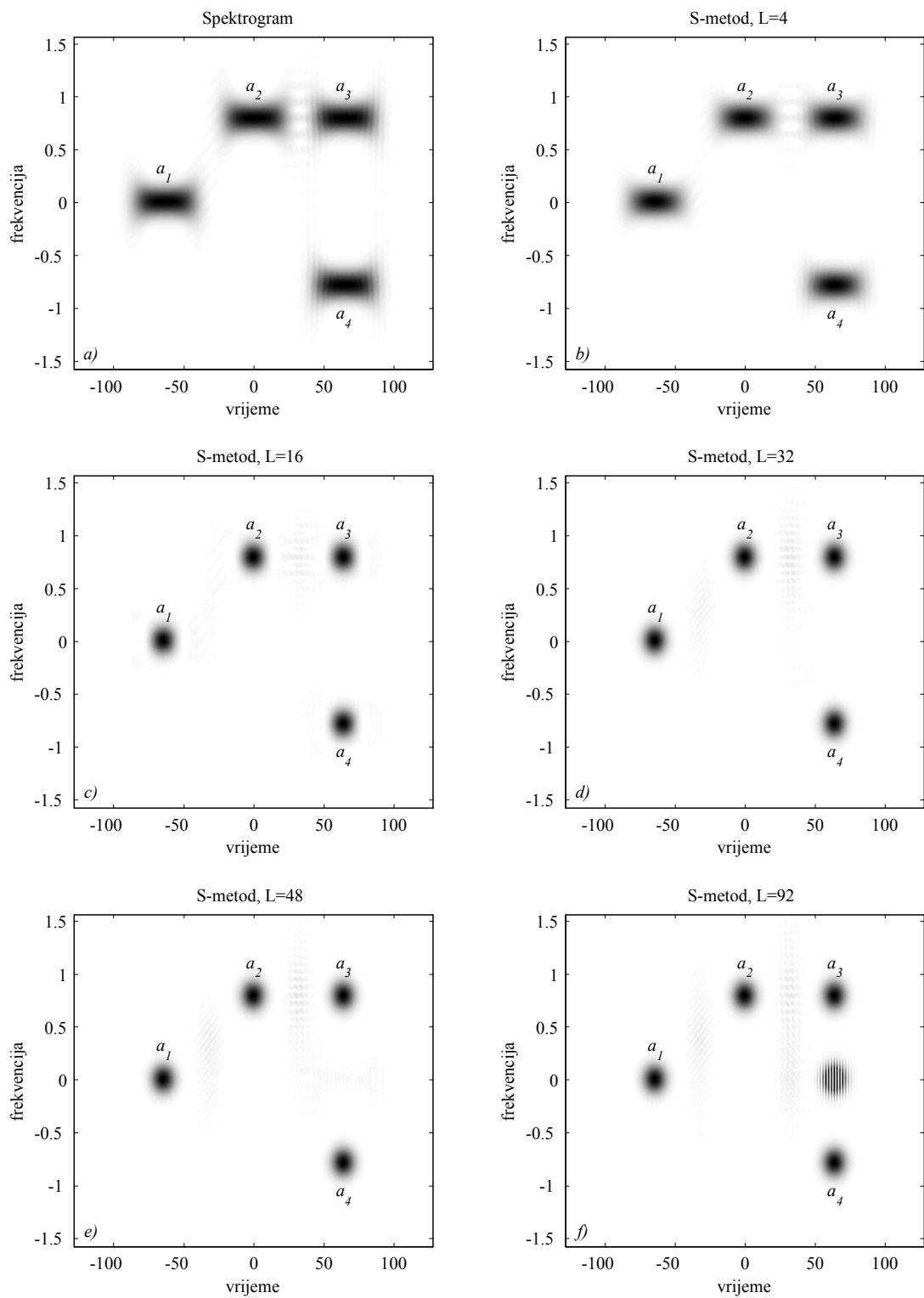
- Ukoliko za neko  $t$  vrijedi  $STFT(t, \omega) = 0$  za  $\omega \notin (\omega_1, \omega_2)$  tada se do Wignerove distribucije može doći i korišćenjem pravougaonog prozora  $P(\theta)$  konačne širine:  $P(\theta) = 1$  za  $|\theta| < \omega_2 - \omega_1$  i  $P(\theta) = 0$  van tog intervala.
- Ukoliko u posmatranom vremenskom trenutku u spektru signala postoji više od jedne komponente, tada se integracijom u izrazu (2.51) poboljšava koncentracija autočlanova, sve do trenutka kada  $\theta$  ne postane dovoljno veliko tako da  $STFT(t, \omega + \frac{\theta}{2})$  pripada jednoj a  $STFT(t, \omega - \frac{\theta}{2})$  drugoj komponenti. U tom slučaju će se pojaviti kros-članovi.
- Prozor  $P(\theta)$  najčešće je pravougaoni prozor, a osnovni razlog za izbor takvog prozora je veoma dobra koncentracija vremensko-frekvencijske reprezentacije signala. Pored pravougaonog, u nekim specifičnim aplikacijama, ima smisla koristiti i druge prozore.
- Širina i oblik prozora  $P(\theta)$  ne moraju biti konstantni, već za svaku tačku  $(t, \omega)$  vremensko-frekvencijske ravni možemo odabrati odgovarajući prozor  $P_{t, \omega}(\theta)$ . Izbor prozora zavisi od oblika kratkotrajne Furijeove transformacije u posmatranom vremenskom trenutku, i u dijapazonu frekvencija  $(\omega - \theta_{\max}, \omega + \theta_{\max})$ , gdje je sa  $\theta_{\max}$  označena maksimalna vrijednost argumenta  $\theta$  za koju je prozor  $P(\theta)$  različit od nule.

Funkcionisanje S-metoda ilustrovaćemo primjerima. Na slikama 2.9 i 2.10 prikazan je S-metod signala (2.29), pri čemu je u prvom slučaju kratkotrajna Furijeova transformacija računata sa Hanning-ovim prozorom širine 128, a u drugom slučaju sa prozorom širine 32.

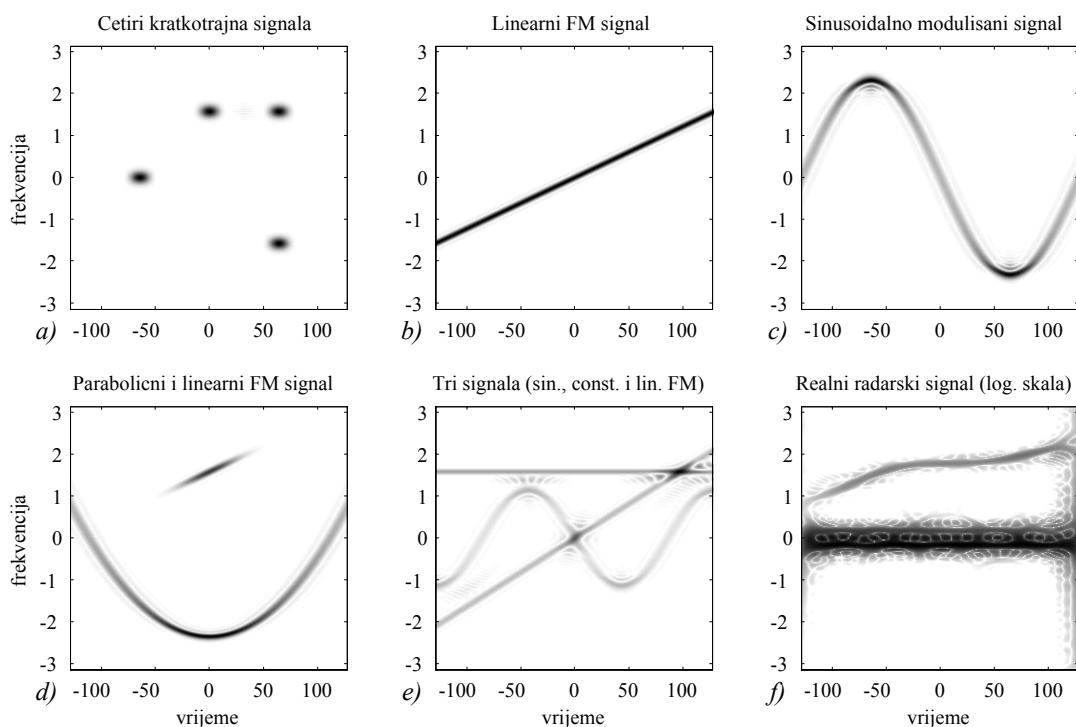


Slika 2.9: S-metod sa različitim vrijednostima parametra  $L$  pri čemu je STFT računata sa Hanning-ovim prozorom širine 128





Slika 2.10: S-metod sa različitim vrijednostima parametra  $L$  pri čemu je STFT računata sa Hanning-ovim prozorom širine 32

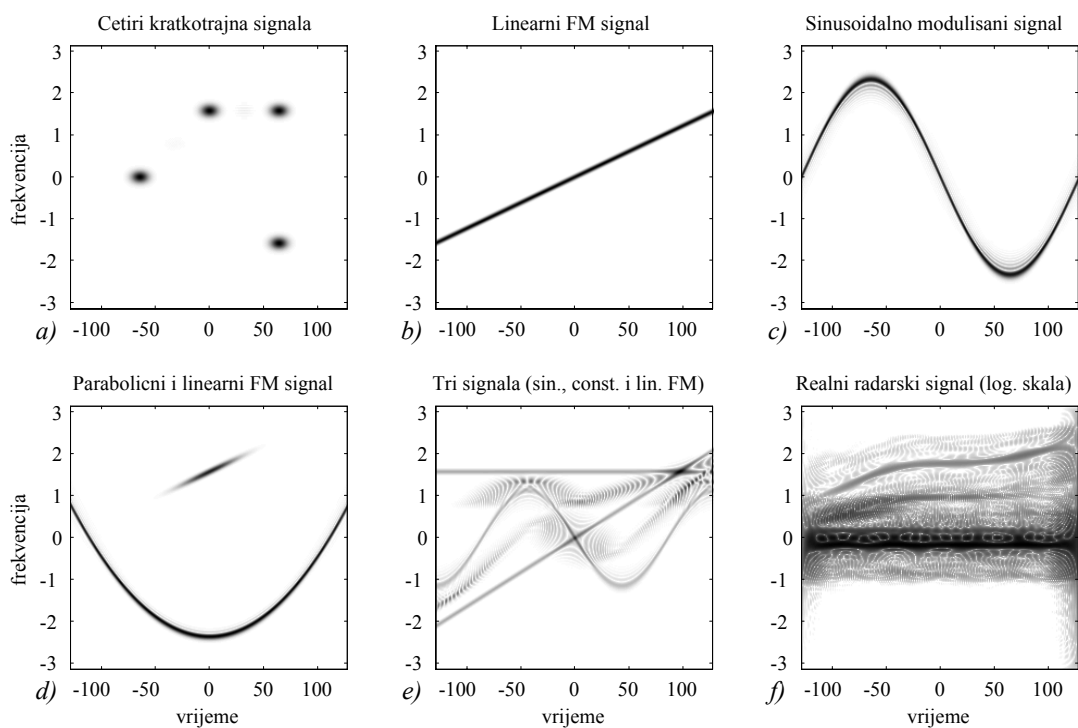


Slika 2.11: S-metod karakterističnih signala, računat sa  $L = 8$

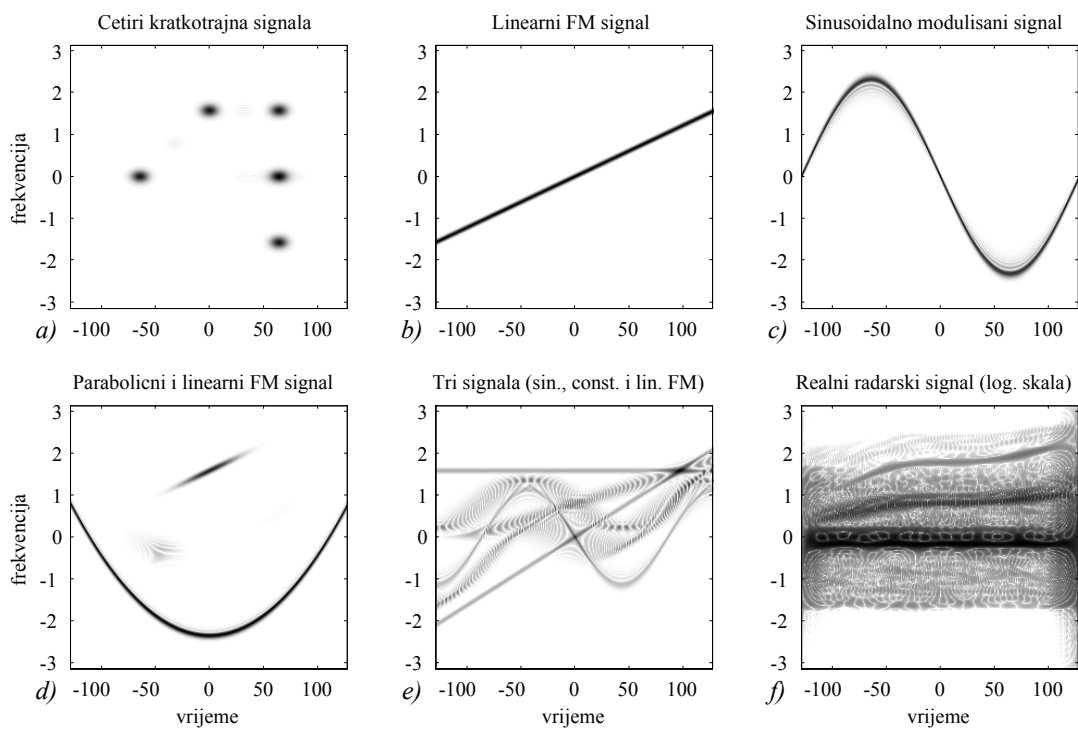
Pozicije auto-članova su obilježene sa  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $a_3$  i  $a_4$ . U oba posmatrana slučaja prikazan je S-metod za vrijednosti  $L = 0$  (spektrogram),  $L = 4, 16, 32, 48$  i  $92$ . Sa slika se može uočiti način eliminisanja kros članova S-metodom. Naime, S-metod je u stanju da, sa dobrim odabirom parametra  $L$ , eliminiše kros-članove među komponentama koje se pojavljuju u istom trenutku na različitim frekvencijama. Granični slučaj spektrograma je Wignerova distribucija, računata sa kvadratom korišćenog prozora, tako da se dobrim odabirom širine prozora kod računanja STFT mogu eliminisati i kros članovi između komponenti na istim frekvencijama koje se javljaju u različitim vremenskim intervalima.

Na slikama 2.11, 2.12 i 2.13 prikazan je S-metod šest karakterističnih signala, definisanih sa (2.29), (2.30), (2.31), (2.32), (2.33) i realnog radarskog signala. Parametar  $L$  uzima vrijednosti  $L = 8, 32$  i  $64$ , pri čemu je Hanningov prozor dužine 120 korišćen za računanje kratkotrajne Furijeove transformacije.

Slika 2.11 predstavlja najkvalitetniju reprezentaciju svih šest signala dobijenu sa jednim skupom parametara vremensko-frekvencijske reprezentacije.



Slika 2.12: S-metod karakterističnih signala, računat sa  $L = 32$



Slika 2.13: S-metod karakterističnih signala, računat sa  $L = 64$

## Poglavlje 3

# Metodi procjene parametara signala

U okviru ovog poglavlja analizirani su metodi za procjenu parametara signala, u prvom redu amplitude i trenutne frekvencije, koje se u slučaju jednokomponentnog signala mogu dobiti na relativno jednostavan način, opisan u prva dva odjeljka ovog poglavlja.

Kada se analizirani signal sastoji od više komponenti, pri čemu su pored komponenti od interesa prisutne i komponente smetnji, od vitalnog je značaja izdvojiti korisnu komponentu signala. Ostvarivanjem tog zadatka procjena parametara korisne komponente složenog signala svodi se na slučaj analize jednokomponentnog signala. U trećem odjeljku je teorijski izveden i na primjerima demonstriran metod dekompozicije složenog signala na pojedinačne komponente. Definisanjem odgovarajućeg kriterijuma, koji je usko vezan za konkretan problem gdje primjenjujemo metod dekompozicije, može se donijeti odluka koje komponente su komponente od interesa, a koje komponente treba zanemariti. Na kraju je analizirano i ponašanje algoritma dekompozicije u prisustvu šuma.

U poslednjem odjeljku ovog poglavlja razmatran je problem procjene da li analizirani signal sadrži determinističku komponentu (nepoznatih karakteristika) što predstavlja preduslov za estimaciju njenih parametara. Analizirani su slučajevi kada standardni metod detekcije zasnovan na Furijeovoj transformaciji ne daje zadovoljavajuće rezultate i u tom slučaju je predložen novi algoritam detekcije zasnovan na vremensko-frekvencijskoj analizi.

### 3.1 Procjena amplitude signala

Posmatrajmo analitički signal oblika:

$$x(t) = A(t)e^{j\varphi(t)} \quad (3.1)$$

gdje su  $A(t)$  i  $\varphi(t)$  realne funkcije i  $A(t)$  je sporopromjenljiva funkcija u odnosu na  $\varphi(t)$ . Funkciju  $A(t)$  nazivamo amplitudom signala (3.1). Ovdje podrazumijevamo da je  $A(t) > 0$  što ne predstavlja dodatno ograničenje na funkciju  $A(t)$  jer u slučaju da amplituda  $A_1(t)$  uzima i negativne vrijednosti možemo amplitudom proglasiti funkciju  $|A_1(t)|$  a fazu modifikovati faktorom:  $\frac{\pi}{2}(1 - \text{sign}(A(t)))$ . Sa druge strane, kvadrat amplitude predstavlja trenutnu snagu signala, tako da umjesto amplitude  $A(t)$  ima smisla estimirati njen kvadrat  $A(t)^2$ , koji predstavlja trenutnu snagu signala i na osnovu kojega možemo jednostavno doći do amplitude signala  $A(t)$ .

Na osnovu definicije (3.1) vidimo da se amplituda signala može estimirati kao:

$$\hat{A}(t)^2 = |x(t)|^2 = x(t)x^*(t) \quad (3.2)$$

Ovakav način estimacije amplitude je sasvim zadovoljavajući u slučaju monokomponentnog signala bez prisustva šuma. Ukoliko se posmatrani signal sastoji od više komponenti (ne umajujući opštost ograničimo se na dvije komponente oblika (3.1)):

$$x(t) = A_1(t)e^{j\varphi_1(t)} + A_2(t)e^{j\varphi_2(t)} \quad (3.3)$$

tada je estimator (3.2) neupotrebljiv jer on nema mogućnost da analizira zasebne komponente. Rezultat estimacije bi bio:

$$\hat{A}(t)^2 = A_1(t)^2 + A_2(t)^2 + 2A_1(t)A_2(t)\cos(\varphi_1(t) - \varphi_2(t)) \quad (3.4)$$

a mi u ovom slučaju od estimatora očekujemo kao rezultat dvije funkcije  $A_1(t)^2$  i  $A_2(t)^2$ .

Ukoliko je signal kontaminiran šumom:

$$x(t) = A(t)e^{j\varphi(t)} + \varepsilon(t) \quad (3.5)$$

pri čemu  $\varepsilon(t)$  ima srednju vrijednost 0 i varijansu  $\sigma_\varepsilon^2$  tada je očekivana vrijednost estimacije (3.2):

$$E[\hat{A}(t)^2] = A(t)^2 + \sigma_\varepsilon^2 \quad (3.6)$$

dok je varijansa estimacije:

$$\text{var}_{A(t)^2} = 2A(t)^2\sigma_\varepsilon^2 + \sigma_\varepsilon^4 \quad (3.7)$$

Sa druge strane, u specijalnom slučaju signala konstantne amplitude i konstantne frekvencije  $A(t) = A$ ,  $\varphi(t) = \omega_0 t + \varphi_0$  amplitudu možemo estimirati Furijeovom transformacijom, uzimajući  $N$  odbiraka signala raspoređenih oko trenutka  $t$ , računajući Furijeovu transformaciju i određivanjem maksimuma. Dakle, estimator amplitude baziran na Furijeovoj transformaciji ima oblik:

$$\hat{A}(t)^2 = \left| \frac{1}{N} \max_{\omega} \sum_{n=-N/2}^{N/2-1} x(t+nT) e^{-j\omega nT} \right|^2 \quad (3.8)$$

U posmatranom, specijalnom, slučaju Furijeova transformacija signala dostiže maksimum na frekvenciji  $\omega = \omega_0$ , i on iznosi:

$$\hat{A}(t)^2 = A^2 \quad (3.9)$$

Ukoliko se radi o višekomponentnom signalu, tada će estimator (3.8) dati amplitudu najjače komponente signala, pri čemu se ostale amplitude mogu pronaći traženjem lokalnih maksimuma Furijeove transformacije.

Za slučaj signala kontaminiranog sa šumom (3.5), očekivana vrijednost estimacije (3.8) je:

$$E[\hat{A}(t)^2] = A^2 + \frac{\sigma_\varepsilon^2}{N} \quad (3.10)$$

a varijansa estimacije:

$$\text{var}_{A(t)^2} = 2A^2 \frac{\sigma_\varepsilon^2}{N} + \frac{\sigma_\varepsilon^4}{N^2} \quad (3.11)$$

Definišemo li bias estimatora kao razliku između očekivane vrijednosti i tačne vrijednosti, vidimo da je estimator amplitude baziran na Furijeovoj transformaciji kvalitetniji estimator ( $N$  puta je manji bias), a i varijansa estimatora je približno  $N$  puta manja. Naravno, radi se o specijalnom slučaju signala konstante amplitude i konstantne frekvencije.

## 3.2 Procjena trenutne frekvencije signala

Osnovna definicija trenutne frekvencije signala, na osnovu [1, 2, 14] data je u dijelu 2.1.1. U okviru ovog poglavlja pojam trenutne frekvencije će biti detaljno obrađen,

kao i metode procjene trenutne frekvencije signala sa naglaskom na metode bazirane na vremensko-frekvencijskoj analizi signala.

### 3.2.1 Problemi vezani za definiciju trenutne frekvencije

Posmatrajmo periodični signal  $x(t)$ , periodičan sa periodom  $T_0$  ( $x(t + T_0) = x(t)$  za svako  $t$ ). Frekvencija signala  $x(t)$  definiše se kao broj perioda signala u jedinici vremena, odnosno  $f_0 = 1/T_0$ . Sa druge strane, poznato je da spektar signala  $x(t)$ , označimo ga sa  $X(j\omega)$ , predstavlja linijski spektar, pri čemu može biti različit od nule samo na učestanostima koje su jednake cjelobrojnom umnošku osnovne frekvencije signala, odnosno na frekvencijama  $f_k = kf_0$  gdje je  $k \in \mathbb{Z}$  cio broj. Ukoliko je posmatrani signal prostoperiodični kompleksni signal oblika

$$x(t) = Ae^{j\frac{2\pi}{T_0}t} \quad (3.12)$$

tada je spektar signala različit od nule samo na jednoj frekvenciji  $\omega_0 = 2\pi/T_0$ .

Možemo smatrati da signal u cijelom svom trajanju (posmatrani signal je definisan za  $t \in (-\infty, \infty)$ ) ima frekvenciju  $\omega_0$ . Osnovni problem u ovakvom definisanju pojma frekvencije je u tome što podrazumijeva da je signal periodičan, što nijedan realni signal nije (strogo govoreći). Direktno proširenje pojma frekvencije možemo izvršiti za slučaj signala oblika (3.12) čije je trajanje ograničeno na konačni vremenski interval  $t \in (t_1, t_2)$ , pri čemu je  $t_1 < t_2$ , u slučaju kada je trajanje vremenskog intervala znatno veće od perioda posmatranog signala. U tom slučaju može se kazati da posmatrani signal na vremenskom intervalu  $t \in (t_1, t_2)$  ima trenutnu frekvenciju  $\omega_0$ . Ovakvo proširivanje pojma frekvencije signala i njegovo lokalizovanje na posmatrani vremenski interval sadrži nedosljednost u tome što se u pokušaju definisanja i lokalizacije pojma frekvencije na posmatrani vremenski interval govori o periodu signala, pri čemu je pojam period definisan jedino za slučaj neograničenih signala. Druga nepreciznost je u određivanju potrebne dužine vremenskog intervala kada možemo reći da signal na tom intervalu ima frekvenciju  $\omega_0$ . Kada je  $t_2 - t_1 \gg T_0$  tada ima smisla govoriti o frekvenciji signala na posmatranom intervalu, a kada je  $t_2 - t_1 \ll T_0$  ne možemo govoriti o pojmu frekvencije. Ako posmatramo realni signal koji je jednak jednoj poluperiodi sinusne funkcije, da li možemo govoriti o frekvenciji tog signala? Ovo pitanje je pitanje bez odgovora, ali ukazuje na osnovni

problem u korišćenju termina "trenutna frekvencija" signala, jer termin frekvencije ima jasan fizički smisao samo kada se signal posmatra na dugom vremenskom intervalu, a tada termin "trenutna" gubi smisao. Sa druge strane, u telekomunikacijama je već duže poznata i praktično korišćena u velikom broju primjena, frekvencijska modulacija, kod koje se informacija prenosi u obliku promjene frekvencije osnovnog signala (nosioca). Kod takvih sklopova, jasno se može definisati, izmjeriti i praktično upotrebiti frekvencija složenog signala, kao funkcija vremena. Da bi detaljnije opisali pojave navedenog tipa frekvencija signala se može definisati i na drugi način, preko izvoda faze signala, tako da za signal oblika

$$x(t) = Ae^{j\varphi(t)} \quad (3.13)$$

možemo reći da u svakom vremenskom trenutku ima frekvenciju

$$\omega(t) = \frac{d\varphi(t)}{dt} \quad (3.14)$$

odnosno

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\omega(t) = \frac{1}{2\pi}\frac{d\varphi(t)}{dt}$$

Ovakva definicija frekvencije u potpunom je skladu sa prethodno navedenom za slučaj prostoperiodičnih signala.

Ukoliko pretpostavimo da amplituda signala nije konstantna već da se i ona mijenja sa vremenom, tada možemo definisati uslove pod kojima je navedena definicija trenutne frekvencije validna. Dakle, ako posmatramo signal

$$x(t) = A(t)e^{j\phi(t)} \quad (3.15)$$

tada se možemo koristiti definicijom (3.14), pod uslovom da je amplituda signala sporopromjenjiva funkcija u odnosu na fazu signala, odnosno ako promjeni faze signala za  $2\pi$  odgovara "neznatna" promjena amplitude signala ( $A'(t) \ll \varphi'(t)$ ).

Drugi problem koji se javlja u korišćenju prethodno navedenih definicija javlja se u slučaju višekomponentnog signala. Posmatrajmo najjednostavniji slučaj zbira dva signala  $x_1(t) = e^{j98\pi t}$  i  $x_2(t) = e^{j102\pi t}$ . Njihove osnovne frekvencije su  $f_1 = 49$  i  $f_2 = 51$ . Ukoliko formiramo složeni signal  $x_0(t) = x_1(t) + x_2(t) = e^{j100\pi t}(e^{-2\pi t} + e^{2\pi t}) = 2\cos(2\pi t)e^{j100\pi t}$  možemo doći do sledećih zaključaka:

- signal  $x_0(t)$  je periodičan sa osnovnim periodom  $T_0 = 1$ , dakle njegova frekvencija je  $f_0 = 1$



- signal  $x_0(t)$  ima sporopromjenjivu amplitudu  $2 \cos(2\pi t)$  u odnosu na fazu  $100\pi t$ , te je njegova trenutna frekvencija  $f_0 = \frac{1}{2\pi} \frac{d}{dt} 100\pi t = 50$

Navedeni zaključci su očigledno kontradiktorni. Situacija je nešto povoljnija kod drugog zaključka gdje je frekvencija zbirnog signala bliža frekvencijama pojedinih komponenti, ali ako signal  $x_0(t)$  propustimo kroz filter propusnik uskog opsega učestanosti oko osnovne frekvencije, na primjer od 49.5 do 50.5, na izlazu filtra će se očigledno dobiti nula, što navodi na zaključak da frekvencija  $f_0$  ne postoji u posmatranom signalu. Jedini ispravan zaključak u posmatranom slučaju je taj da je signal  $x_0(t)$  višekomponentni signal, te da se on sastoji od dvije komponente, pri čemu su njihove frekvencije različite. Dakle, pojam trenutne frekvencije nije dovoljno dobro definisan da bi se opisalo ponašanje signala u posmatranom primjeru.

Alternativni način definisanja trenutne frekvencije signala je korišćenje vremensko-frekvencijske reprezentacije posmatranog signala. Trenutnu frekvenciju tada možemo definisati kao poziciju lokalnog maksimuma (na frekvencijskoj osi) vremensko-frekvencijske reprezentacije  $TFR(t, \omega)$  signala,  $x(t)$  u posmatranom vremenskom trenutku  $t$ . Trenutna frekvencija (ili frekvencije) se tada može dobiti rješavanjem jednačine

$$\frac{d}{d\omega} TFR(t, \omega) = 0 \quad (3.16)$$

pod uslovom

$$\frac{d^2}{d\omega^2} TFR(t, \omega) < 0 \quad (3.17)$$

za svaki posmatrani trenutak  $t$ .

Za slučaj monokomponentnog signala, umjesto rješavanja navedenog sistema, možemo se koristiti jednostavnijim zapisom

$$\omega(t) = \arg \max_{\omega} TFR(t, \omega) \quad (3.18)$$

pri čemu je sa  $\max_{\omega}$  označen maksimum funkcije po varijabli  $\omega$ , dok je  $\arg$  argument, odnosno vrijednost  $\omega$  za koju  $TFR(t, \omega)$  ima maksimum. Ukoliko se radi o višekomponentnom signalu formula (3.18) će dati trenutnu frekvenciju jedne komponente signala, dok ostale komponente možemo analizirati posmatrajući lokalne maksimume funkcije  $TFR(t, \omega)$  u posmatranom vremenskom trenutku  $t$ .

### 3.2.2 Bias i varijansa trenutne frekvencije

Pri procjeni (estimaciji) trenutne frekvencije signala, uvijek se postavlja i pitanje vjerodostojnosti dobijenih rezultata. Vodeći računa o tome da je i sama definicija pojma "trenutna frekvencija" nepotpuna, ograničimo se na, relativno usku, klasu signala gdje je pojam "trenutne frekvencije" dobro definisan, odnosno gdje su sve definicije navedene u prethodnom izlaganju saglasne. Prilikom procjene trenutne frekvencije takvih signala od interesa je analizirati moguće uzroke dobijanja pogrešne procjene. Označimo stvarnu trenutnu frekvenciju signala sa  $\omega(t)$ , procijenjenu trenutnu frekvenciju sa  $\hat{\omega}(t)$  i učinjenu grešku sa  $\Delta\omega = \hat{\omega}(t) - \omega(t)$ . Posmatrajući učinjenu grešku kao slučajnu veličinu, njenu očekivanu vrijednost nazivamo bias-om, a njenu varijansu varijansom estimacije trenutne frekvencije.

Uzroke pojavljivanja greške pri estimaciji trenutne frekvencije možemo podijeliti u dvije kategorije:

- sistematska greška primijenjenog metoda procjene (bias)
- greška usled prisustva šuma koju opisujemo varijansom estimacije.

Od interesa je posmatrati i ukupnu grešku estimacije - srednju kvadratnu grešku (MSE) koju možemo računati kao očekivanu vrijednost kvadrata greške estimacije:

$$MSE_{\omega} = E[(\hat{\omega}(t) - \omega(t))^2] = bias_{\omega}^2 + var_{\omega} \quad (3.19)$$

Detaljna analiza biasa i varijanse za slučaj Cohenove klase distribucija može se naći u [32, 46, 33, 34, 35].

## 3.3 Dekompozicija multikomponentnih signala

Često se javlja potreba da se iz signala sastavljenog od većeg broja komponenti izdvoji jedna ili više komponenti u cilju pojedinačne analize. Ukoliko su sve komponente konačnog trajanja i ukoliko se intervali trajanja komponenti ne preklapaju, tada komponente možemo razdvojiti analizirajući multikomponentni signal u vremenskom domenu i procjenjujući intervale pojavljivanja komponenti. Dualno, ako komponente zauzimaju različite frekvencijske opsege, tada se propuštanjem signala kroz odgovarajući

filtrar može proizvoljna komponenta izdvojiti i zasebno analizirati. U slučajevima kada se intervali pojavljivanja komponenti preklapaju, a takođe i njihovi frekvencijski opsezi, nijedan od navedena dva pristupa ne može dati zadovoljavajući rezultat. U tom slučaju prirodno je očekivati da će se metodama vremensko-frekvencijske analize pod određenim uslovima dobiti zadovoljavajući rezultati.

Posmatrajmo multikomponentni signal sa  $M$  komponenti:

$$f(t) = \sum_{p=1}^M f_i(p) \quad (3.20)$$

pretpostavimo da komponente  $f_i(p)$  zauzimaju međusobno disjunktne djelove vremensko-frekvencijske ravni, odnosno da se u svakom vremenskom trenutku  $t$  trenutne frekvencije komponenti  $\omega_i(t)$  međusobno razlikuju. Tada se primjenom vremensko-frekvencijske analize može dobiti reprezentacija signala gdje su prikazi svih  $M$  komponenti vizuelno razdvojeni. Dobijanje samih komponenti može predstavljati problem, jer veliki broj vremensko-frekvencijskih reprezentacija nije moguće invertovati. Sve kvadratne vremensko-frekvencijske distribucije nepovratno gube fazu signala, i jedino kratkotrajna Furijeova transformacija nudi mogućnost potpune rekonstrukcije analiziranog signala. Sa druge strane, kratkotrajna Furijeova transformacija u malom broju slučajeva može dati vremensko-frekvencijsku reprezentaciju signala gdje su komponente u vremensko-frekvencijskoj ravni međusobno razdvojene, iz razloga loše koncentracije nestacionarnih signala.

Poznate metode vremensko-frekvencijskog filtriranja polaze od kratkotrajne Furijeove transformacije i dodatnog metoda za reprezentovanje signala u vremensko-frekvencijskoj ravni. Princip se svodi na to da se na osnovu reprezentacije signala odrede regioni od interesa, gdje leže pojedine komponente signala, i da se odabirom regiona u kratkotrajnoj Furijeovoj transformaciji izdvoji korisna komponenta (ili komponente). Očigledan nedostatak ove metode je što se za određivanje regiona koristi metod različit od metoda korišćenog za rekonstrukciju komponenti, tako da nemamo nikakvu garanciju da će definisani region obuhvatiti čitavu oblast kratkotrajne Furijeove transformacije u kojoj se posmatrana komponenta nalazi.

### 3.3.1 Dekompozicija signala bazirana na inverziji Wignerove distribucije

Inverzija Wignerove distribucije i sinteza signala na osnovu njegove vremensko-frekvencijske reprezentacije je izučavana u [16, 26, 30, 38, 18].

Posmatrajmo signal  $f(t)$  i njegovu Wignerovu distribuciju  $WD(t, \omega)$ :

$$WD(t, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t + \frac{\tau}{2})f^*(t - \frac{\tau}{2})e^{-j\omega\tau} d\tau \quad (3.21)$$

odavde je:

$$f(t + \frac{\tau}{2})f^*(t - \frac{\tau}{2}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} WD(t, \omega)e^{j\omega\tau} d\omega \quad (3.22)$$

odnosno uvodeći smjenu  $t + \tau/2 = t_1$ ,  $t - \tau/2 = t_2$

$$f(t_1)f^*(t_2) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} WD(\frac{t_1 + t_2}{2}, \omega)e^{j\omega(t_1 - t_2)} d\omega \quad (3.23)$$

Izraz  $f(t_1)f^*(t_2)$  predstavlja autokorelacionu funkciju signala  $f(t)$ . U diskretnom domenu umjesto autokorelacione funkcije imaćemo autokorelacionu matricu.

Posmatrajmo diskretni signal  $f(n)$  definisan za  $|n| \leq N/2$ . Sa  $\mathbf{f}$  obilježimo vektor kolonu formiranu od odbiraka signala:

$$\mathbf{f} = [f(-N/2), f(-N/2 - 1), \dots, f(-1), f(0), f(1), \dots, f(N/2)]^T \quad (3.24)$$

Diskretna Wignerova distribucija signala  $f(n)$  je:

$$WD(n, k) = \sum_{m=-N/2}^{N/2} f(n + m)f^*(n - m)e^{-\frac{4\pi}{N+1}mk} \quad (3.25)$$

Inverzna DFT prethodnog izraza daje:

$$f(n + m)f^*(n - m) = \frac{1}{N + 1} \sum_{k=-N/2}^{N/2} WD(n, k)e^{\frac{4\pi}{N+1}mk} \quad (3.26)$$

u ovom izrazu definišimo nove varijable  $n_1$  i  $n_2$  kao:  $n + m = n_1$  i  $n - m = n_2$ . Dobijamo:

$$f(n_1)f^*(n_2) = \frac{1}{N + 1} \sum_{k=-N/2}^{N/2} WD(\frac{n_1 + n_2}{2}, k)e^{\frac{2\pi}{N+1}(n_1 - n_2)k} \quad (3.27)$$

Od veličina  $f(n_1)f^*(n_2)$  možemo formirati matricu:  $\mathbf{R}_{n_1, n_2} = f(n_1)f^*(n_2)$ ,  $n_1, n_2 = -N/2, \dots, N/2$ . Ova matrica se očigledno može predstaviti i kao:

$$\mathbf{R} = \mathbf{f} \cdot \mathbf{f}^H \quad (3.28)$$

gdje je  $\mathbf{f}^H$  transponovani, konjugovano kompleksni vektor  $\mathbf{f}$ .

Dekompozicijom matrice  $\mathbf{R}$  na sopstvene vektore i sopstvene brojeve dobijamo:

$$\mathbf{R} = \mathbf{Q}\mathbf{\Lambda}\mathbf{Q}^H = \sum_{i=1}^{N+1} \lambda_i \mathbf{u}_i \mathbf{u}_i^H \quad (3.29)$$

gdje su  $\lambda_i$  sopstveni brojevi,  $\mathbf{u}_i$  sopstveni vektori,  $\mathbf{\Lambda}$  matrica sopstvenih brojeva i  $\mathbf{Q}$  matrica sopstvenih vektora matrice  $\mathbf{R}$ . Poredeći jednakosti (3.28) i (3.29) i imajući u vidu da su sopstveni vektori jedinični, zaključujemo da matrica  $\mathbf{R}$  ima samo jednu sopstvenu vrijednost različitu od nule i da je ta sopstvena vrijednost jednaka energiji signala  $f$   $\lambda_1 = E_f = \sum_{n=-N/2}^{N/2} |f(n)|^2$ ,  $\lambda_2 = \lambda_3 = \dots = \lambda_{N+1} = 0$ . Dalje je:

$$\mathbf{f} = e^{j\varphi} \sqrt{\lambda_1} \mathbf{u}_1 \quad (3.30)$$

gdje je  $\varphi$  proizvoljna fazna konstanta. Treba uočiti da je razvoj matrice na sopstvene vektore (3.29) jedinstven, ukoliko ne postoje višestruki sopstveni brojevi različiti od nule, odnosno ako su svi nenulti sopstveni brojevi međusobno različiti, što je ovdje slučaj jer imamo samo jedan sopstveni broj različit od nule.

Dobijeni rezultat omogućava:

- da osnovu poznate Wignerove distribucije signala rekonstruišemo odbirke signala sa tačnošću do fazne konstante,
- ukoliko je data neka matrica  $\mathbf{WD}$ , provjerimo da li ta matrica može predstavljati Wignerovu distribuciju nekog signala i
- da za datu matricu pronađemo njoj najbližu matricu koja predstavlja Wignerovu distribuciju nekog signala, tako što u (3.29) uzmemo samo prvi član sume [30].

Navedeni metod nije u stanju da odvoji pojedinačne komponente multikomponentnog signala.

### 3.3.2 Dekompozicija signala bazirana na S-metodu

S-metod je vremensko-frekvencijska distribucija koja pod određenim uslovima u slučaju multikomponentnog signala, može biti jednaka zbiru Wignerovih distribucija pojedinačnih komponenti signala. Ova osobina S-metoda u kombinaciji sa metodom inverzije Wignerove distribucije putem razvoja na sopstvene vektore i sopstvene brojeve daje efikasan metod za razdvajanje komponenti multikomponentnog signala.

Posmatrajmo multikomponentni signal sa  $M$  komponenti:

$$f(n) = \sum_{p=1}^M f_p(n) \quad (3.31)$$

gdje ćemo podrazumijevati da su komponente signala dovoljno razdvojene u vremensko-frekvencijskoj ravni, tako da je za neko  $L_{opt}$  S-metod  $SM(n, k)$  jednak zbiru Wignerovih distribucija  $WD_p(n, k)$  pojedinačnih komponenti  $f_p(n)$ :

$$SM(n, k) = \sum_{p=1}^M WD_p(n, k) \quad (3.32)$$

Za svaku komponentu  $f_p(n)$  vrijedi, na osnovu (3.27):

$$f_p(n_1)f_p^*(n_2) = \frac{1}{N+1} \sum_{k=-N/2}^{N/2} WD_p\left(\frac{n_1+n_2}{2}, k\right) e^{\frac{2\pi}{N+1}(n_1-n_2)k} \quad (3.33)$$

sumiranjem prethodnog izraza za  $p = 1, 2, \dots, M$  dobijamo:

$$\begin{aligned} \sum_{p=1}^M f_p(n_1)f_p^*(n_2) &= \frac{1}{N+1} \sum_{k=-N/2}^{N/2} \sum_{p=1}^M WD_p\left(\frac{n_1+n_2}{2}, k\right) e^{\frac{2\pi}{N+1}(n_1-n_2)k} \\ &= \frac{1}{N+1} \sum_{k=-N/2}^{N/2} SM\left(\frac{n_1+n_2}{2}, k\right) e^{\frac{2\pi}{N+1}(n_1-n_2)k} \end{aligned} \quad (3.34)$$

Formirajmo sada matricu  $\mathbf{R}$  sa elementima  $\sum_{p=1}^M f_p(n_1)f_p^*(n_2)$  za  $n_1, n_2 = -N/2, \dots, N/2$ :

$$R_{n_1, n_2} = \sum_{p=1}^M f_p(n_1)f_p^*(n_2) \quad (3.35)$$

ili u matricnoj formi:

$$\mathbf{R} = \sum_{p=1}^M \mathbf{f}_p \mathbf{f}_p^H \quad (3.36)$$

Razvoj matrice  $\mathbf{R}$  na sopstvene vektore glasi:

$$\mathbf{R} = \mathbf{Q}\mathbf{\Lambda}\mathbf{Q}^H = \sum_{k=1}^{N+1} \lambda_k \mathbf{u}_k \mathbf{u}_k^H \quad (3.37)$$

Uporedimo sada izraze (3.36) i (3.37). Ukoliko sa  $E_p$  označimo energiju komponente  $f_p$  odnosno normu vektora  $\mathbf{f}_p$  tada izraz (3.36) možemo napisati u obliku:

$$\mathbf{R} = \sum_{p=1}^M E_p \left( \frac{1}{\sqrt{E_p}} \mathbf{f}_p \right) \left( \frac{1}{\sqrt{E_p}} \mathbf{f}_p \right)^H \quad (3.38)$$

gdje su vektori  $\frac{1}{\sqrt{E_p}} \mathbf{f}_p$  jedinični vektori, međusobno linearno nezavisni, te je stoga zapis (3.38) ekvivalentan zapisu (3.37). Poznato je da je razvoj (3.37) jedinstven, sa tačnošću do faze konstante u vektorima  $\mathbf{u}_i$  ukoliko među nenultim sopstvenim vrijednostima nema višestrukih sopstvenih vrijednosti, odnosno ako  $\lambda_{i_1} = \lambda_{i_2}$  i  $i_1 \neq i_2$  povlači da su obje sopstvene vrijednosti jednake nuli. Koristeći se ovim zaključkom i činjenicom da je forma izraza (3.38) identična formi izraza (3.37) zaključujemo da:

- matrica  $\mathbf{R}$  ima  $M$  nenultih sopstvenih vrijednosti, pri čemu su one jednake energijama pojedinih komponenti signala:  $\lambda_p = E_p$  za  $p = 1, 2, \dots, M$  i  $\lambda_p = 0$  za  $p = M + 1, M + 2, \dots, N + 1$
- ukoliko su sopstvene vrijednosti međusobno različite, tada vrijedi:

$$f_p(n) = e^{j\varphi_p} \sqrt{\lambda_p} u_p(n) \quad (3.39)$$

Opisanim metodom došli smo do pojedinačnih komponenti signala, sa nepoznatom faznom konstantom u svakoj komponenti, odnosno izvršili smo dekompoziciju složenog signala na komponente.

Pri numeričkoj realizaciji procesa dekompozicije multikomponentnih signala treba voditi računa o tome da indeksi u izrazu (3.34) budu cijeli brojevi. Taj uslov će biti ispunjen ukoliko su  $n_1$  i  $n_2$  parni brojevi ili ukoliko su oba navedena indeksa neparni. Varijanta računanja izraza (3.34) kada je jedan od indeksa paran a drugi neparan predstavlja problem jer se javlja indeks na desnoj strani koji nije cijeli broj. Dakle, neki vid interpolacije je neophodan, jer za uspješno izvođenje procesa dekompozicije jednako su važni svi elementi matrice  $\mathbf{R}$ .

Moguće rješenje navedenog problema je, da se prije procesa dekompozicije izvrši interpolacija polaznog signala, tako da od signala dužine  $N$  dobijemo signal dužine  $2N$  odbiraka. Tada se u izrazu (3.34) možemo ograničiti samo na parne (ili samo na neparne) indekse  $n_1$  i  $n_2$  i dobiti sve potrebne vrijednosti matrice  $\mathbf{R}$ . Dakle, tip matrice  $\mathbf{R}$  je  $N \times N$ , ona ima  $N$  sopstvenih brojeva i  $N$  sopstvenih vektora sa po  $N$  odbiraka. Na ovaj način smo dobili jednaku dužinu komponenti signala i polaznog signala.

Napomenimo i da se na osnovu broja sopstvenih vrijednosti različitih od nule može odrediti i broj komponenti u polaznom signalu.

Opisani proces dekompozicije ilustrovaćemo primjerima.

**Primjer 1** *Posmatrajmo monokomponentni linearno frekvencijski modulirani signal konačnog trajanja*

$$x(n) = e^{jn^2 \frac{\pi}{512}} e^{-\left(\frac{n}{32}\right)^2} \quad (3.40)$$

na vremenskom intervalu  $-128 \leq n < 128$ .

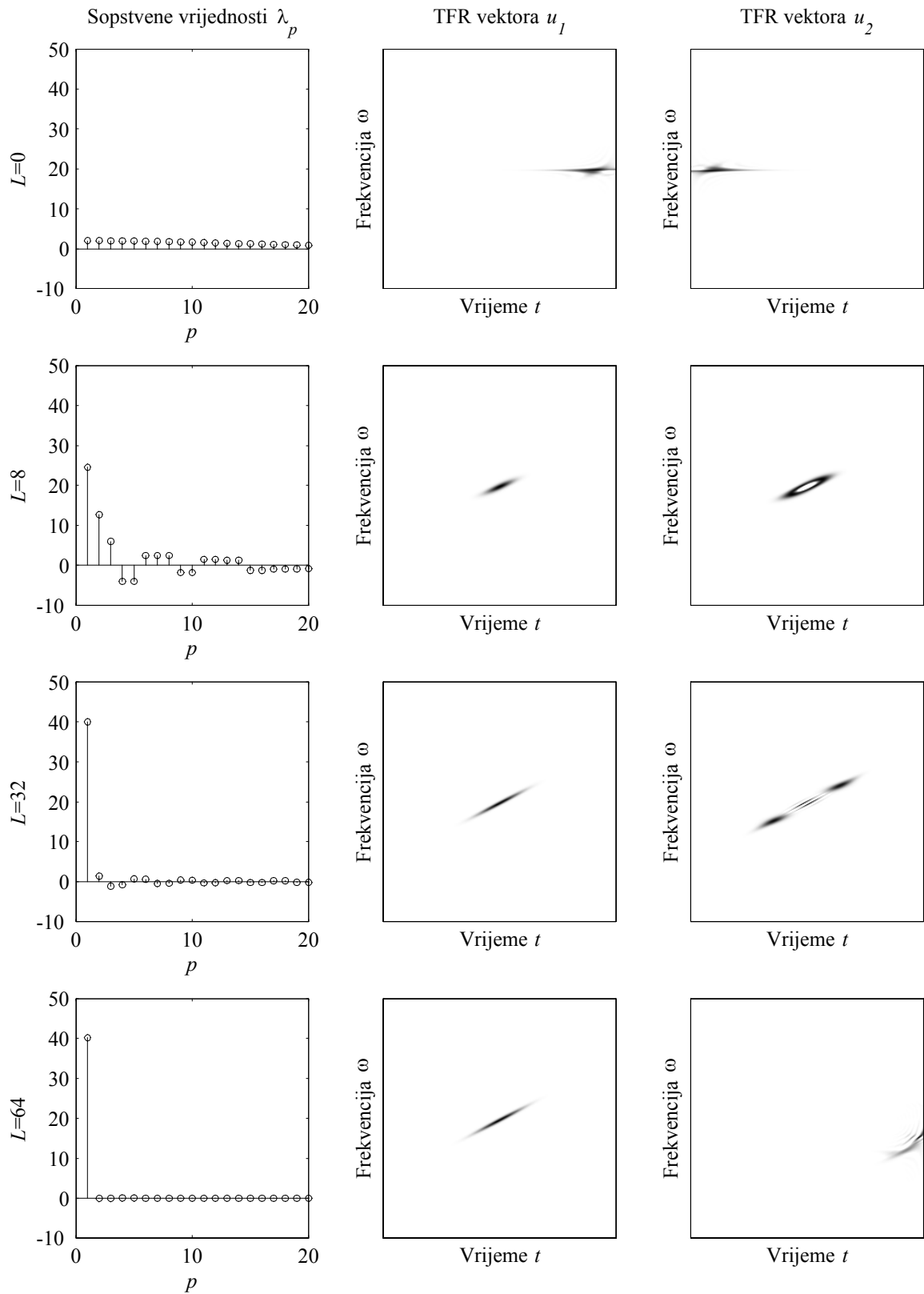
Procedura dekompozicije je odrađena za različite vrijednosti parametra  $L$  u S-metodu. Dio rezultata je prikazan na slici 3.1. Prikazane su vrijednosti prvih 20 sopstvenih brojeva matrice  $\mathbf{R}$  kao i vremensko-frekvencijske reprezentacije prva dva sopstvena vektora. Podrazumijeva se da su sopstveni brojevi uređeni po amplitudi od najvećeg prema najmanjem, tako da prvi sopstveni vektor možemo tumačiti kao dominantnu komponentu signala, dok bi drugi sopstveni vektor trebao sadržati ostatak signala.

U računanju S-metoda, prilikom određivanja kratkotrajne Furijeove transformacije signala korišćen je pravougaoni prozor, dužine jednake dužini signala, pri čemu je signal sa obadvije strane dopunjen potrebnim brojem nula.

Za  $L = 0$  imamo spektrogram posmatranog signala čijom se dekompozicijom ne dobijaju zadovoljavajući rezultati. To možemo vidjeti u prvom redu slike 3.1 gdje je očigledno da dobijeni sopstveni vektori ne odgovaraju željenoj komponenti signala. Dodatni zaključak može biti da se spektrogram mnogo razlikuje od Wignerove distribucije posmatranog signala. Slična situacija će se pojaviti i u slučajevima  $L = 1, 2, 3$ .

U drugom redu su prikazani rezultati dobijeni za  $L = 8$ . Integracija auto-članova nije dovedena do kraja, ali u ovom slučaju je primjetan trend grupisanja glavnog dijela signala u prvom sopstvenom vektoru, dok drugi, treći i ostali sadrže ostatak signala. Isti zaključak se može izvesti i iz posmatranja sopstvenih brojeva.





Slika 3.1: Vrijednosti 20 najvećih sopstvenih brojeva - prva kolona, i vremensko-frekvencijske reprezentacije sopstvenih vektora - druga i treća kolona za različite vrijednosti parametra  $L$

Grafici u trećem redu predstavljaju rezultate dobijene za  $L = 32$ . U ovom slučaju je integracija auto-članova u S-metodu dovedena gotovo do kraja što se može vidjeti iz amplituda sopstvenih brojeva kao i iz vremensko-frekvencijskih reprezentacija sopstvenih vektora.

U posljednjem redu su prikazani rezultati dobijeni za  $L = 64$  kada je završena integracija auto-člana, S-metod je postao potpuno jednak Wignerovoj distribuciji, imamo samo jedan nenulti sopstveni broj, a drugi sopstveni vektor je potpuno nevezan sa posmatranim signalom. Energija posmatranog signala je  $E_x = 40,1061$ , dok je sopstvena vrijednost  $\lambda_1 = 40,1646$ .

Iako tek za  $L = 64$  imamo teorijski slučaj podudaranja S-metoda sa Wignerovom distribucijom, treba konstatovati da za  $L = 32$  imamo gotovo iste rezultate, ukoliko kao parametar uzmemo procijenjenu energiju signala u procesu dekompozicije i vremensko-frekvencijsku reprezentaciju prvog sopstvenog vektora. Čak i slučaj  $L = 8$  može biti koristan, jer iako ni energija signala ( $\lambda_1$ ), ni njegova vremensko-frekvencijska reprezentacija nijesu identične originalnom signalu, imamo jasnu identifikaciju komponente, njene trenutne frekvencije i vremenskog položaja. U ovom i u narednom primjeru, S-metod je iskorišćen i za generisanje vremensko-frekvencijske reprezentacije sopstvenih vektora, pri čemu je za računanje kratkotrajne Furijeove transformacije uzet Hanning-ov prozor dužine 256 odbiraka, i vrijednost  $L = 32$  u S-metodu. Na graficima je prikazan nenegativni dio S-metoda.

**Primjer 2** *Posmatrajmo sada dvokomponentni signal*

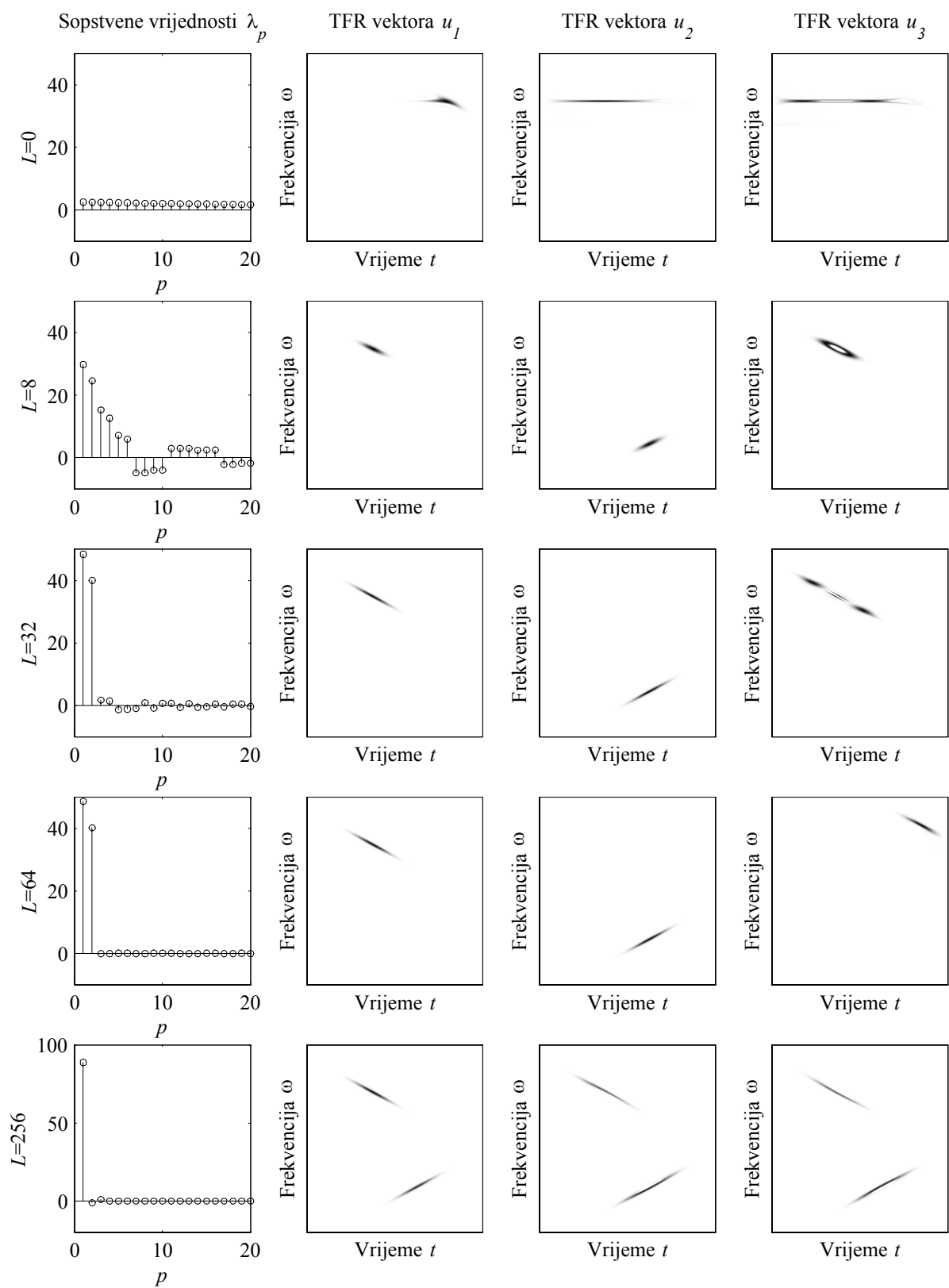
$$x(n) = x_1(n) + x_2(n) \quad (3.41)$$

definisan za  $-128 \leq n < 128$  gdje je:

$$x_1(n) = e^{j(n-32)^2 \frac{\pi}{512} - jn \frac{\pi}{2}} e^{-\left(\frac{n-32}{32}\right)^2} \quad (3.42)$$

$$x_2(n) = 1.1 e^{-j(n+32)^2 \frac{\pi}{512} + jn \frac{\pi}{2}} e^{-\left(\frac{n+32}{32}\right)^2} \quad (3.43)$$

Dekompozicija signala (3.41) je prikazana na slici 3.2 za vrijednosti  $L = 0, 8, 32, 64$  i 256. Pored sopstvenih vrijednosti, u svakom redu su prikazane i vremensko-frekvencijske



Slika 3.2: Dekompozicija dvikomponentnog signala. Prikazane su sopstvene vrijednosti i TFR prva tri sopstvena vektora za različite vrijednosti parametra  $L$

reprezentacije prva tri sopstvena vektora. Komponente signala imaju različite energije da bi bio ispunjen uslov jedinstvenosti razvoja (3.37), odnosno da u procesu dekompozicije dobijemo sopstvene vektore koji odgovaraju komponentama signala  $x_1(n)$  i  $x_2(n)$ . Energija komponente  $x_1(n)$  je 40.1061, energija komponente  $x_2(n)$  je 48.5283, dok je energija signala  $x(n)$  jednaka 88.6344. U tabeli su prikazane prvih 5 sopstvenih vrijednosti za svaku razmatranu vrijednost  $L$ .

$L$	$\lambda_1$	$\lambda_2$	$\lambda_3$	$\lambda_4$	$\lambda_5$
0	2.4557	2.3797	2.3568	2.3200	2.2707
8	29.6821	24.5306	15.2892	12.6357	7.1869
32	48.3888	39.9908	1.6777	1.3866	-1.3941
64	48.5992	40.1646	-0.0502	-0.0477	0.0450
256	88.7503	-1.1203	1.0800	-0.0203	-0.0184

Tabela 3.1: Sopstvene vrijednosti u zavisnosti od  $L$

Karakteristično je da već za  $L = 32$  imamo veoma dobre rezultate i da ti rezultati ostaju dobri do najmanje  $L = 64$ . To znači da postoji širok region vrijednosti parametra  $L$  u kojem su rezultati procesa dekompozicije zadovoljavajući, odnosno da izbor parametra  $L$  u ovom slučaju nije kritičan.

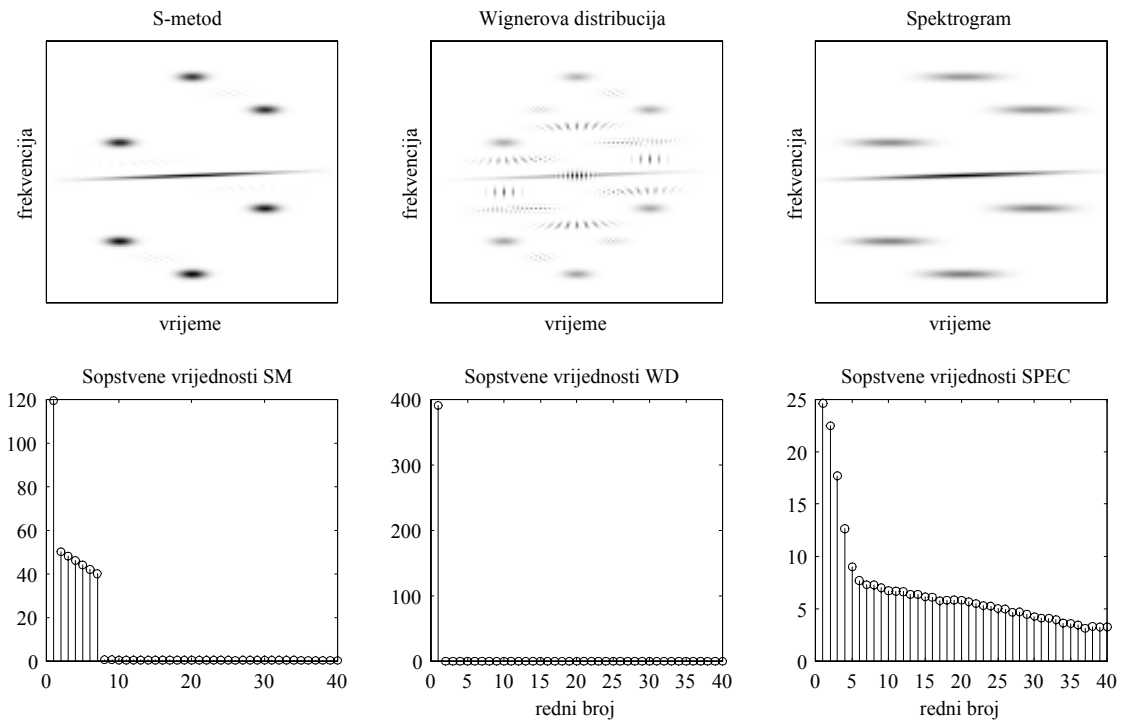
U slučaju  $L = 256$  S-metod postaje jednak Wignerovoj distribuciji, imamo samo jedan sopstveni broj (bitno) različit od nule i njegova vrijednost predstavlja energiju čitavog signala. Prvi sopstveni vektor sadrži obje komponente signala, tako da u ovom slučaju, sasvim očekivano, ne možemo izvršiti dekompoziciju.

**Primjer 3** *Posmatrajmo signal sastavljen od sedam komponenti:*

$$x(n) = e^{j\frac{\pi}{6400}n^2} e^{-\left(\frac{n}{96}\right)^2} + \sum_{k=2}^7 \sqrt{\frac{27-k}{10}} e^{j\omega_k n} e^{-\left(\frac{n-d_k}{16}\right)^2} \quad (3.44)$$

u intervalu  $-128 \leq n \leq 127$ , uz  $\omega_2 = -\frac{3\pi}{4}$ ,  $\omega_3 = -\frac{\pi}{2}$ ,  $\omega_4 = -\frac{\pi}{4}$ ,  $\omega_5 = \frac{\pi}{4}$ ,  $\omega_6 = \frac{\pi}{2}$ ,  $\omega_7 = \frac{3\pi}{4}$ ,  $d_2 = d_7 = 0$ ,  $d_3 = d_5 = -64$  i  $d_4 = d_6 = 64$ .

Na slici 3.3 prikazan je S-metod, Wignerova distribucija i spektrogram analiziranog signala zajedno sa 40 najznačajnijih sopstvenih vrijednosti. Energije komponenti signala su:  $E_1 = 119.40$ ,  $E_2 = 50.13$ ,  $E_3 = 48.13$ ,  $E_4 = 46.12$ ,  $E_5 = 44.12$ ,  $E_6 = 42.11$  i  $E_7 =$



Slika 3.3: S-metod, Wignerova distribucija i spektrogram zajedno sa pripadajućim sopstvenim vrijednostima dobijenim postupkom dekompozicije.

40.11, pri čemu su u postupku dekompozicije S-metoda dobijene sopstvene vrijednosti:  $\lambda_1 = 119.40$ ,  $\lambda_2 = 50.18$ ,  $\lambda_3 = 48.19$ ,  $\lambda_4 = 46.19$ ,  $\lambda_5 = 44.18$ ,  $\lambda_6 = 42.17$ ,  $\lambda_7 = 40.15$ ,  $\lambda_8 = 0.68$ , ...

Prvih 7 sopstvenih vrijednosti u ovom slučaju u potpunosti odgovaraju energijama odgovarajućih komponenti u signalu.

U slučaju Wignerove distribucije, samo jedna sopstvena vrijednost je različita od nule  $\lambda_1 = 390.92$  ( $\lambda_2 = 0.00$ ,  $\lambda_3 = 0.00$ , ...) i ona odgovara ukupnoj energiji signala  $E_x = 390.14$ .

U slučaju spektrograma veza između sopstvenih vrijednosti i energija odgovarajućih komponenti ne može biti uspostavljena.

Pri dekompoziciji S-metoda korišćeno je  $L = 12$ , pri čemu je za opseg vrijednosti  $10 \leq L \leq 20$  odstupanje sopstvenih vrijednosti od energija komponenti signala u granicama od  $\pm 0.25\%$ .

### 3.3.3 Analiza uticaja šuma na proces dekompozicije signala

Posmatrajmo četvero-komponentni signal, gdje svaka komponenta predstavlja Gausov čirp. Neka je signal kontaminiran bijelim Gausovim kompleksnim šumom sa nezavisnim realnim i imaginarnim dijelom, srednje vrijednosti 0 i varijanse  $\sigma_\varepsilon^2$ :

$$x(n) = \sum_{k=1}^4 A_k e^{j\omega_k(n-d_k) + ja_k \frac{(n-d_k)^2}{2}} e^{-\frac{(n-d_k)^2}{256}} + \varepsilon(n) \quad (3.45)$$

gdje je  $d_1 = d_2 = -64$ ,  $d_3 = 0$ ,  $d_4 = 64$ ,  $\omega_1 = \omega_4 = 0$ ,  $\omega_2 = -\frac{3\pi}{4}$ ,  $\omega_3 = \frac{3\pi}{4}$ ,  $a_1 = a_3 = \frac{1}{256\pi}$ ,  $a_2 = a_4 = -\frac{1}{256\pi}$ . Signal će biti posmatran na vremenskom intervalu  $-128 \leq n \leq 127$ . Parametri signala su odabrani tako da su sve komponente signala razdvojene u vremensko-frekvencijskoj ravni. Prva i četvrta komponenta zauzimaju isti frekvencijski opseg, ali su locirane u različitim vremenskim intervalima, dok se prva i druga komponenta istovremeno pojavljuju zauzimajući različite frekvencijske opsege.

Na ovako definisanom signalu primijenjen je algoritam dekompozicije:

- Korak 1. Odabir prozora za računanje kratkotrajne Furijeove transformacije  $w(n)$ .
- Korak 2. Računanje kratkotrajne Furijeove transformacije signala koji je preodabran sa faktorom 2 i dopunjen potrebnim brojem nula.
- Korak 3. Odabir parametra  $L$  u S-metodu, takvog da S-metod bude jednak zbiru Wignerovih distribucija pojedinačnih komponenti.
- Korak 4. Računanje S-metoda.
- Korak 5. Računanje matrice  $\mathbf{R}_{SM}$  prema (3.34).
- Korak 6. Dekompozicija matrice  $\mathbf{R}_{SM}$  na sopstvene vektore i sopstvene brojeve.

Prva 4 sopstvena vektora su tretirani kao komponente signala.

U slučaju nepostojanja šuma ( $\varepsilon(n) = 0$ ) uzećemo da su amplitude komponenti  $A_1 = 1.3$ ,  $A_2 = 1.2$ ,  $A_3 = 1.1$  i  $A_4 = 1.0$ . Pravougaoni prozor dužine 64 odbirka omogućiće nam da razdvojimo komponente koje zauzimaju isti frekvencijski opseg, a pojavljuju se u različitim vremenskim trenucima, dok vrijednost  $L = 36$  osigurava punu integraciju svake komponente u procesu računanja S-metoda. Rezultati dekompozicije su prikazani u tabeli

3.2. Tabela sadrži energiju svake od četiri komponente signala, odgovarajuću sopstvenu vrijednost, kao i procentualnu grešku. Iz tabele se vidi da je greška u estimaciji veoma mala (manja od 0.5% u svim slučajevima).

Komponenta broj	1	2	3	4
Energija komponente	67.8	57.7	48.5	40.1
Sopstvena vrijednost	67.5	57.5	48.3	39.9
Greška (%)	-0.44%	-0.35%	-0.41%	-0.50%

Tabela 3.2: Tačne vrijednosti energija komponenti, odgovarajući sopstveni brojevi i procentualna greška

U nastavku je algoritam dekompozicije primijenjen na posmatrani signal kontaminiran šumom. U ovom slučaju uzeto je da su sve četiri komponente jedinične amplitude  $A_1 = A_2 = A_3 = A_4 = 1$ . Razmatran je odnos signal-šum 0 dB i rezultat dobijen u jednoj realizaciji šuma prikazan na slici 3.4). Na slici 3.5 prikazan je rezultat dekompozicije u slučaju odnosa signal-šum od -4 dB. Na slikama 3.6 i 3.7 algoritam je primjenjivan sa odnosom signal-šum -8 dB. Korišćen je Hanningov prozor dužine 128 odbiraka i vrijednost  $L = 16$ . U slučajevima na slikama 3.4, 3.5 i 3.6 sve komponente signala su uspješno detektovane a rekonstruisani signal ne sadrži komponente šuma u dijelu vremensko-frekvencijske ravni gdje ne postoje komponente signala. U slučaju prikazanom na slici 3.7 jedna komponenta nije detektovana.

Kada je signal kontaminiran šumom, pretpostavka da su samo prvih  $M$  sopstvenih vrijednosti različite od nule nije ispunjena. Komponente šuma utiču kako na sopstvene vektore tako i na sopstvene vrijednosti u procesu dekompozicije, s tom razlikom što su one distribuirane na velikom broju sopstvenih vektora i sopstvenih vrijednosti, tako da odvajanjem sopstvenih vektora koji predstavljaju komponente signala, ujedno se eliminiše i najveći dio šuma iz signala.

Postupak dekompozicije je ponovljen za razne vrijednosti odnosa signal-šum i za razne vrijednosti parametara (širina prozora i vrijednost  $L$ ). Rezultati su prikazani u tabelama 3.3 i 3.4. Za svaku kombinaciju odnosa signal-šum, širine prozora i za svaku vrijednost parametra  $L$  odrađeno je 100 simulacija sa različitim realizacijama šuma, tako da je u

procesu detekcije učestvovalo ukupno 400 komponenti. U tabelama je prikazani procenat nedetektovanih komponenti koji je dobar pokazatelj robustnosti analiziranog algoritma detekcije. U slučajevima prikazanim u tabeli 3.3 korišćen je prozor dužine 128 odbiraka, dok su podaci u tabeli 3.4 računati za  $L = 32$ .

<b>SNR</b>	$L = 8$	$L = 16$	$L = 32$	$L = 64$
0dB	3.50%	0.00%	0.00%	0.00%
-2dB	6.50%	0.00%	0.50%	0.00%
-4dB	10.00%	3.25%	2.50%	3.50%
-6dB	20.25%	14.75%	11.50%	7.50%
-8dB	35.50%	29.50%	22.75%	21.00%

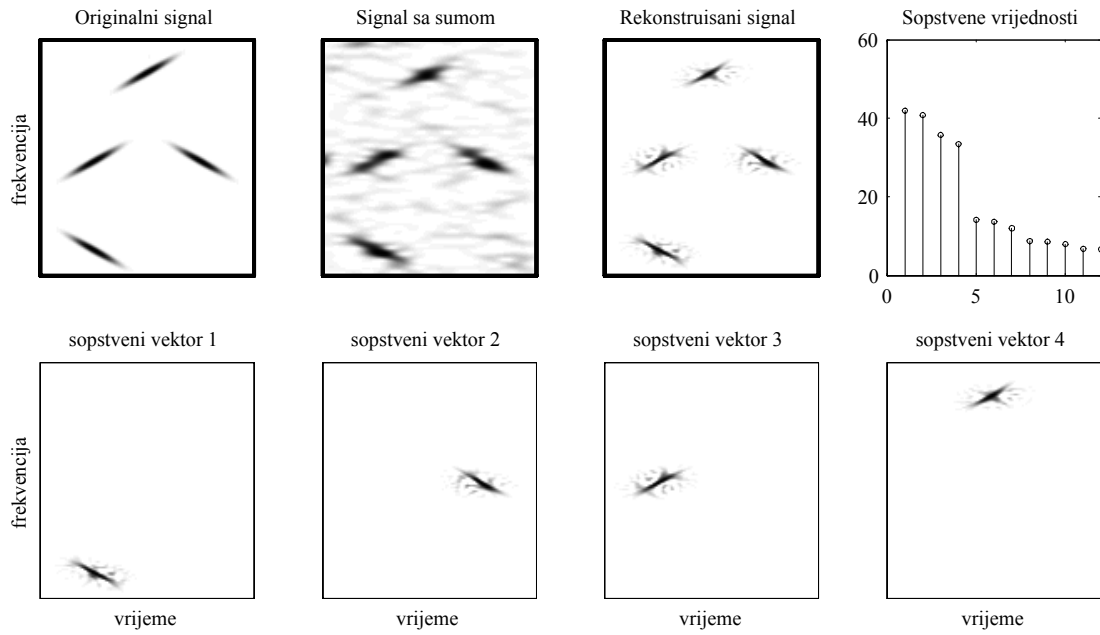
Tabela 3.3: Osjetljivost algoritma dekompozicije na izbor parametra  $L$  za različite odnose signal-šum

<b>SNR</b>	$h = 160$	$h = 128$	$h = 64$
0dB	0.25%	0.00%	0.50%
-2dB	0.50%	0.50%	0.75%
-4dB	3.50%	2.50%	4.50%
-6dB	16.25%	11.50%	14.00%
-8dB	28.00%	22.75%	33.25%

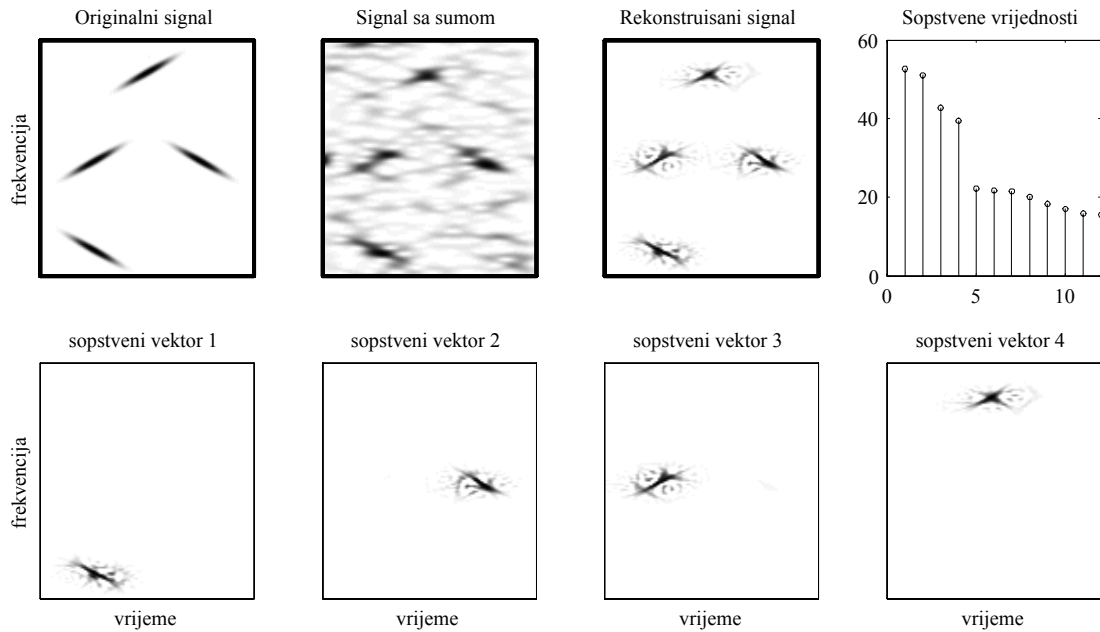
Tabela 3.4: Osjetljivost algoritma dekompozicije na izbor širine prozora za različite odnose signal-šum

Kao što se vidi iz priloženih primjera i tabela, algoritam dekompozicije je malo osjetljiv na izbor parametara. Stoga se u konkretnim primjenama možemo osloniti na heurističku procjenu parametara, pri čemu širina prozora za računanje kratkotrajne Furijeove transformacije treba da bude najviše tolika da ne dođe do objedinjavanja komponenti koje se pojavljuju u različitim vremenskim trenucima na istim frekvencijama. Na izbor parametra  $L$  najveći uticaj ima frekventijski opseg pojedinih komponenti, tako da bi optimalan izbor bila vrijednost koja nije veća od polovine frekventijskog opsega komponenti signala.

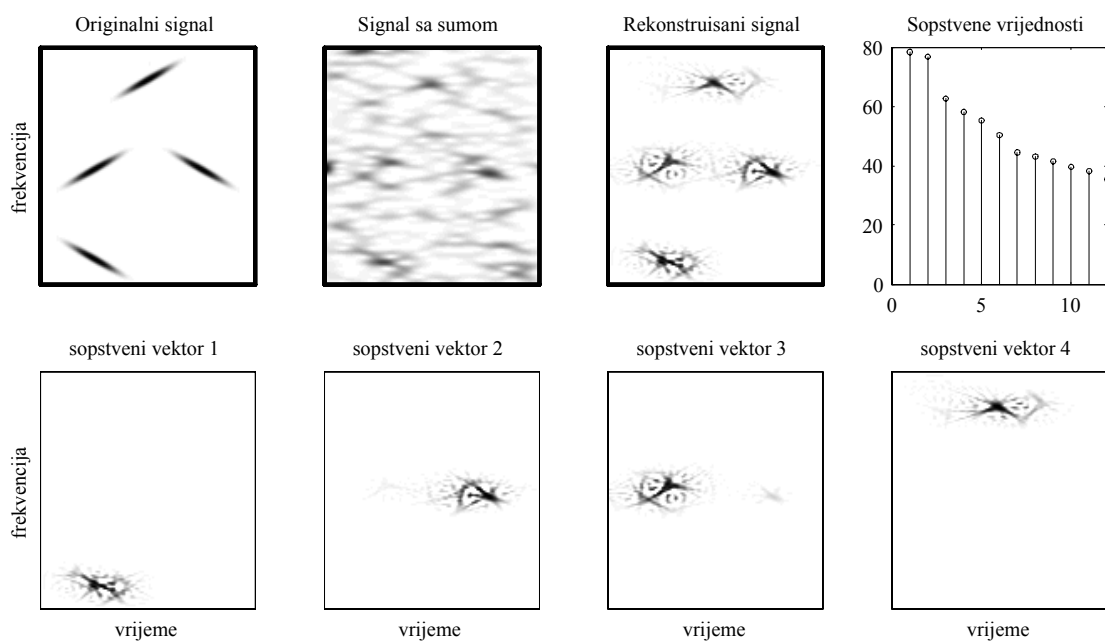




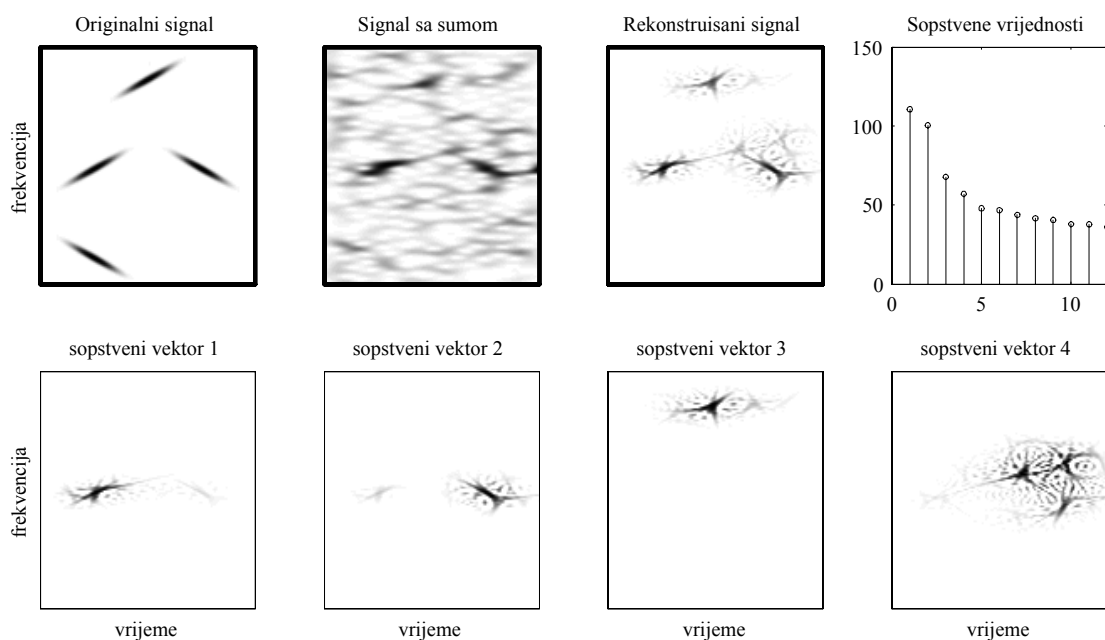
Slika 3.4: Dekompozicija pri  $SNR = 0$  dB. U prvom redu: originalni signal, signal sa šumom i rekonstruisani signal. U drugom redu su vremensko-frekvencijske reprezentacije četiri sopstvena vektora.



Slika 3.5: Dekompozicija pri  $SNR = -4$  dB.



Slika 3.6: Dekompozicija pri  $SNR = -8$  dB. U prvom redu: originalni signal, signal sa šumom i rekonstruisani signal. U drugom redu su vremensko-frekvencijske reprezentacije četiri sopstvena vektora.



Slika 3.7: Dekompozicija pri  $SNR = -8$  dB, slučaj kada jedna komponenta nije detektovana.

### 3.4 Procjena egzistencije determinističkog signala

U velikom broju slučajeva od interesa je utvrditi da li u analiziranom signalu postoji deterministička komponenta. U okviru ovog dijela teze biće izložen metod za detekciju signala u prisustvu jakog šuma zasnovan na vremensko-frekvencijskoj analizi signala. Metod će biti upoređen sa detektorom zasnovanim na Furijeovoj transformaciji.

Posmatrajmo procjenu egzistencije determinističkog signala oblika:

$$x(t) = Ae^{j\varphi(t)} \quad (3.46)$$

u slučaju prisustva jakog aditivnog šuma  $\varepsilon(t)$ . Razmatraće se dva slučaja: stacionarni deterministički signal ( $\varphi(t)$  je linearna funkcija vremena) i nestacionarni deterministički signal ( $\varphi(t)$  je nelinearna funkcija vremena). U prvom slučaju optimalna detekcija postiže se primjenom detektora zasnovanog na Furijeovoj transformaciji, dok je u drugom slučaju logičan izbor detektor zasnovan na vremensko-frekvencijskoj analizi posmatranog signala.

#### 3.4.1 Detekcija prisustva signala pomoću Furijeove transformacije

Pretpostavimo da raspolažemo sa  $N$  odbiraka diskretnog signala  $s(n)$ , i da su moguća dva slučaja:

$$s(n) = s_x(n) = x(n) + \varepsilon(n) \quad (3.47)$$

$$s(n) = s_\varepsilon(n) = \varepsilon(n) \quad (3.48)$$

gdje je  $x(n)$  deterministički signal oblika:

$$x(n) = Ae^{j\omega_0 n} \quad (3.49)$$

pri čemu je diskretna frekvencija  $\omega_0 = 2\pi k_0/N$ , gdje je  $k_0$  cio broj takav da je  $|\omega_0| < \pi$ .

U izrazima (3.47) i (3.48)  $\varepsilon(n)$  je šum za koji ćemo pretpostaviti da je bijeli, Gausov, sa srednjom vrijednošću 0 i varijansom  $\sigma_\varepsilon^2$  sa nezavisnim realnim i imaginarnim dijelom jednakih varijansi.

Diskretna Furijeova transformacija signala  $s(n)$  je:

$$S(k) = \xi NA\delta(k - k_0) + \varepsilon_F(k) \quad (3.50)$$

gdje je  $\varepsilon_X(k)$  takođe Gausov bijeli šum srednje vrijednosti 0 i varijanse  $\sigma_F^2 = N\sigma_\varepsilon^2$ . Veličina  $\xi$  u izrazu (3.50) uzima vrijednost 1 ako je signal  $s(n)$  oblika (3.47) i 0 ukoliko je  $s(n)$  oblika (3.48).

Posmatrajmo spektar signala  $s(n)$ :

$$\begin{aligned} |S(k)|^2 &= S(k)S^*(k) = & (3.51) \\ &= \xi(N^2|A|^2 + NA\varepsilon_F^*(k) + NA^*\varepsilon_F(k))\delta(k - k_0) + |\varepsilon_F(k)|^2 \end{aligned}$$

i njegovu očekivanu vrijednost:

$$E[|S(k)|^2] = N^2|A|^2\delta(k - k_0) + E[|\varepsilon_F(k)|^2] \text{ za } \xi = 1 \quad (3.52)$$

$$E[|S(k)|^2] = E[|\varepsilon_F(k)|^2] \text{ za } \xi = 0 \quad (3.53)$$

Metod detekcije prisustva signala primjenom Furijeove transformacije možemo svesti na određivanje maksimuma spektra signala i ispitivanje da li je taj maksimum veći od nekog referentnog nivoa  $R_{S^2}$ . Dakle, kriterijum postojanja signala u šumu može se definisati kao:

$$\hat{\xi} = \begin{cases} 1 & \text{za } \max[|S(k)|^2] > R_{S^2} \\ 0 & \text{za } \max[|S(k)|^2] \leq R_{S^2} \end{cases} \quad (3.54)$$

Posmatrajmo četiri karakteristična slučaja:

1. U signalu  $s(n)$  postoji deterministička komponenta  $x(n)$ , odnosno  $\xi = 1$ . Detekcijom je utvrđeno da je  $\max[|S(k)|^2] > R_{S^2}$ , odnosno  $\hat{\xi} = 1$ .
2. U signalu  $s(n)$  postoji deterministička komponenta  $x(n)$ , odnosno  $\xi = 1$ . Detekcijom je utvrđeno da je  $\max[|S(k)|^2] \leq R_{S^2}$ , odnosno  $\hat{\xi} = 0$ . U ovom slučaju detektor nije detektovao postojeći signal.
3. U signalu  $s(n)$  ne postoji deterministička komponenta  $x(n)$ , odnosno  $\xi = 0$ . Detekcijom je utvrđeno da je  $\max[|S(k)|^2] \leq R_{S^2}$ , odnosno  $\hat{\xi} = 0$ .
4. U signalu  $s(n)$  ne postoji deterministička komponenta  $x(n)$ , odnosno  $\xi = 0$ . Detekcijom je utvrđeno da je  $\max[|S(k)|^2] > R_{S^2}$ , odnosno  $\hat{\xi} = 1$ . U ovom slučaju detektor je prouzrokovao lažni alarm (false alarm).

Prvi i treći slučaj predstavljaju tačnu detekciju, dok se u drugom i četvrtom slučaju prilikom detekcije prisustva signala čini greška. Označimo vjerovatnoću drugog slučaja sa  $P_{ND}$  a vjerovatnoću četvrtog slučaja sa  $P_{FA}$ . Posmatrajmo ponašanje vjerovatnoća  $P_{ND}$  i  $P_{FA}$  u odnosu na odabrani nivo  $R_{S^2}$ . Povećavanjem nivoa  $R_{S^2}$  smanjuje se vjerovatnoća  $P_{FA}$ , a povećava se vjerovatnoća  $P_{ND}$ . Smanjivanje nivoa  $R_{S^2}$  izaziva se smanjivanje vjerovatnoće  $P_{ND}$  i povećanje vjerovatnoće  $P_{FA}$ . Optimalni nivo se određuje analiziranjem navedenih vjerovatnoća, kao i posledica drugog i četvrtog slučaja detekcije.

Vjerovatnoća  $P_{FA}$  se može odrediti posmatranjem statističkih osobina šuma, dok je za određivanje vjerovatnoće  $P_{ND}$  potrebno poznavati amplitudu signala  $x(n)$ . Često primjenjivani metod određivanja nivoa  $R_{S^2}$  je utvrđivanje konstantne vjerovatnoće lažnih alarma  $P_{FA}$  (Constant False Alarm rate - CFAR). U posmatranom slučaju imamo da je:

$$\begin{aligned} P_{FA} &= P[|\varepsilon_F(k)|^2 > R_{S^2} \text{ za bar jedno } k] \\ &= 1 - \prod_{k=0}^{N-1} P[|\varepsilon_F(k)|^2 < R_{S^2}] \end{aligned} \quad (3.55)$$

Poznato je da je kvadrat apsolutne vrijednosti slučajne varijable sa Gausovom raspodjelom vjerovatnoća slučajna varijabla sa Rejljevom raspodjelom vjerovatnoća tako da je:

$$P[|\varepsilon_F(k)|^2 < R_{S^2}] = 1 - \exp\left(-\frac{R_{S^2}}{\sigma_F^2}\right) = 1 - \exp\left(-\frac{R_{S^2}}{N\sigma_\varepsilon^2}\right) \quad (3.56)$$

tako da je:

$$P_{FA} = 1 - \left(1 - \exp\left(-\frac{R_{S^2}}{N\sigma_\varepsilon^2}\right)\right)^N \quad (3.57)$$

odakle možemo odrediti zavisnost nivoa  $R_{S^2}$  od vjerovatnoće  $P_{FA}$ :

$$R_{S^2} = -\ln(1 - \sqrt[N]{1 - P_{FA}})N\sigma_\varepsilon^2 \quad (3.58)$$

Ukoliko je  $N$  dovoljno veliko, a  $P_{FA}$  dovoljno malo, tada se gornji izraz može aproksimirati sa:

$$R_{S^2} = -\ln(P_{FA}/N)N\sigma_\varepsilon^2 \quad (3.59)$$

Vidi se da je za određivanje referentnog nivoa potrebno poznavati varijansu šuma  $\varepsilon(n)$ . Ovu varijansu možemo procijeniti na osnovu odbiraka signala  $s(n)$  po formuli:

$$\sigma_\varepsilon^2 \approx 1.1 \left( \underset{1 \leq i < N}{\text{median}}(|\text{Re}[s(i) - s(i-1)]|)^2 + \underset{1 \leq i < N}{\text{median}}(|\text{Im}[s(i) - s(i-1)]|)^2 \right) \quad (3.60)$$

Ovakva detekcija predstavlja najbolji mogući detektor za posmatrani oblik determinističkog signala.

U velikom broju slučajeva, uslov da je diskretna frekvencija determinističkog signala  $\omega_0 = 2\pi k_0/N$ , gdje je  $k_0$  cio broj ne može biti zadovoljen. U slučajevima kada je  $\omega_0 \neq 2\pi k_0/N$ , rezultat detekcije se može popraviti (vjerovatnoća  $P_{ND}$  smanjiti) dodavanjem nula signalu  $s(n)$ , prije računanja Furijeove transformacije.

Ukoliko je deterministički signal  $x(n)$  nestacionaran:

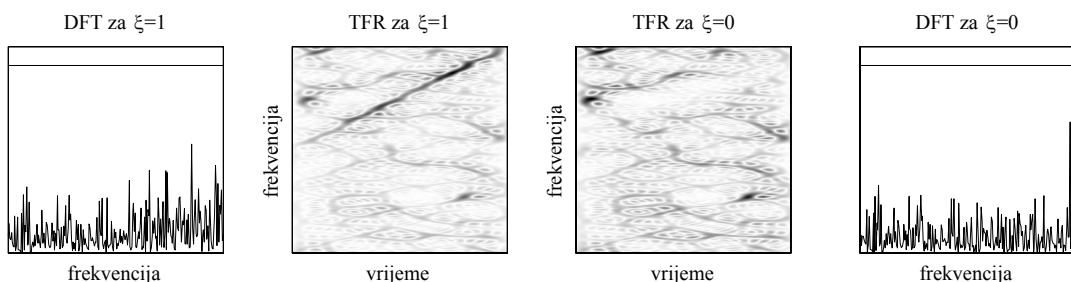
$$x(n) = A(t)e^{j\varphi(t)} \quad (3.61)$$

gdje je  $\varphi(t)$  nelinearna funkcija, tada detektor baziran na Furijeovoj transformaciji nije optimalan. Kao i u svim ostalim slučajevima gdje nestacionarnost signala ograničava upotrebu Furijeove transformacije, tako se i ovdje problem može riješiti primjenom vremensko-frekvencijske analize signala  $s(n)$ .

### 3.4.2 Detekcija prisustva signala vremensko-frekvencijskom analizom

Posmatrajmo primjer signala  $x(n)$  oblika  $x(n) = Ae^{jan^2}$ . Neka je sa  $S(k, n)$  označena vremensko-frekvencijska reprezentacija signala  $s(n)$ . Na slici 3.8 prikazana je Furijeova transformacija signala  $s(n)$  u slučajevima  $\xi = 1$  (prvi grafik) i  $\xi = 0$ , četvrti grafik, kao i vremensko-frekvencijska reprezentacija signala  $s(n)$  za oba slučaja. Kao vremensko-frekvencijska reprezentacija korišćen je S-metod sa pravougaonim prozorom i  $L = 12$ . Korišćeno je  $N = 256$  odbiraka signala  $s(n)$ , pri čemu je varijansa šuma  $\sigma_\varepsilon^2 = 4$ , a amplituda  $A = 1$ , tako da je odnos signal-šum približno  $-6$  dB. Na prvom i četvrtom grafiku prikazan je i referentni nivo detektora baziranog na Furijeovoj transformaciji, sračunat sa vjerovatnoćom lažnog alarma  $P_{FA} = 0.01$ . Za dobijanje sva četiri grafika korišćena je ista realizacija šuma. Sa grafika se jasno vidi da je detektor zasnovan na Furijeovoj transformaciji neupotrebljiv u posmatranom slučaju. Sa druge strane, vizuelnim putem se lako da zaključiti da li u vremensko-frekvencijskoj reprezentaciji signala  $s(n)$  postoji ili ne postoji deterministička komponenta  $x(n)$ .

Na osnovu navedenog primjera može se zaključiti da vremensko-frekvencijska analiza može biti primijenjena na problem detekcije nestacionarnih signala u prisustvu jakog



Slika 3.8: Furijeova transformacija i vremensko-frekvencijska reprezentacija signala  $s(n)$  u slučajevima postojanja i nepostojanja determinističkog signala  $x(n)$

šuma. Osnovni problem je automatizovano donošenje odluke da li u posmatranom signalu postoji ili ne postoji deterministička komponenta. U nastavku će biti opisan algoritam detekcije signala kod proizvoljne vremensko-frekvencijske reprezentacije.

Posmatrajmo vremensko-frekvencijsku reprezentaciju  $S(k, n)$  signala  $s(n)$ , pri čemu je  $k = 0, 1, \dots, M - 1$  i  $n = 0, 1, \dots, N - 1$ . Za signal  $x(n)$  pretpostavimo da nema naglih skokova u trenutnoj frekvenciji. Definišimo putanju u vremensko-frekvencijskoj ravni kao niz od  $n$  frekvencijskih indeksa  $\pi(n)$ , pri čemu je  $0 \leq \pi(n) < N$  za svako  $n$ . Posmatrajmo skup takvih putanja koje imaju osobinu da je  $|\pi(n) - \pi(n - 1)| \leq D$  za neku zadatu vrijednost  $D$  i za  $n = 1, 2, \dots, N - 1$ . Označimo posmatrani skup sa  $\Pi_D$ . Posmatrajmo sada jednu putanju  $\pi_m(n) \in \Pi_D$  i zbir svih vrijednosti vremensko-frekvencijske reprezentacije po posmatranoj putanji:

$$J_m = \sum_{n=0}^{N-1} S(\pi(n), n) \quad (3.62)$$

Maksimum posmatranog zbira na skupu  $\Pi_D$  označimo sa  $\bar{J}$ .

Ovako definisana veličina predstavlja dobar kriterijum za određivanje da li u vremensko-frekvencijskoj reprezentaciji signala  $S(k, n)$  postoji deterministička komponenta  $x(n)$ . Naime, ako je  $\bar{J} > R_J$  gdje je sa  $R_J$  označen nivo praga detekcije, možemo zaključiti da u signalu  $s(n)$  postoji deterministička komponenta, odnosno da je  $\xi = 1$ .

Osnovni problem u realizaciji ovakvog detektora predstavlja određivanje referentnog nivoa  $R_J$ . Ukoliko se radi o vremensko-frekvencijskoj reprezentaciji II reda, odnosno o aproksimaciji distribucije snage signala u vremensko-frekvencijskoj ravni, logično je

pretpostaviti da nivo  $R_J$  treba biti proporcionalan sa  $N\sigma_\varepsilon^2$ . Za određivanje nivoa kod konkretne vremensko-frekvencijske reprezentacije, pored definisanja vjerovatnoće  $P_{FA}$  dovoljno je eksperimentalno utvrditi granicu  $R_J$  kod koje će vjerovatnoća lažnog alarma biti jednaka  $P_{FA}$ , za jednu varijansu šuma. Ovako određen nivo  $R_J = R_0 N \sigma_\varepsilon^2$  zahtijeva obradu velikog broja realizacija šuma, ukoliko je  $P_{FA}$  dosta malo, ali ga je potrebno odrediti samo jednom za posmatranu vremensko-frekvencijsku reprezentaciju i za zadato  $P_{FA}$ .

Drugi problem je određivanje skupa putanja  $\Pi_D$  na kojem ćemo vršiti maksimizaciju zbira  $J_m$ . Da bi smanjili ukupni broj putanja koji je reda veličine  $N^M$  možemo primijeniti sledeći pristup.

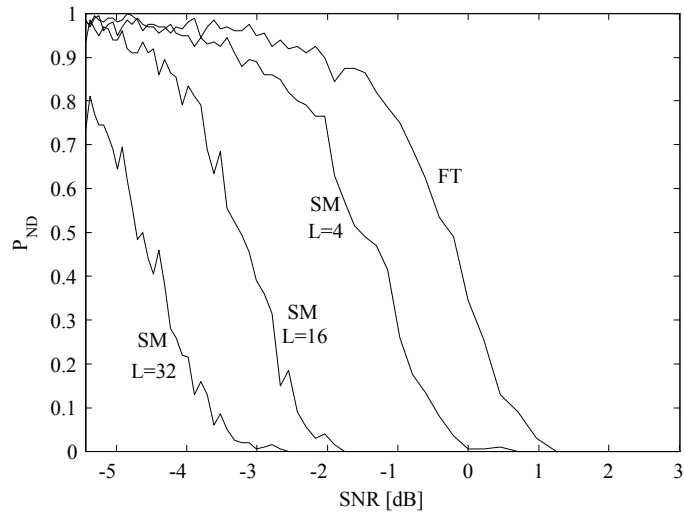
Odaberimo slučajno tačku u vremensko-frekvencijskoj ravni i pronađimo njen najbliži lokalni maksimum. Putanju započnimo iz lokalnog maksimuma, krećući se lijevo i desno od njega po indeksu  $n$ , vodeći računa da u svakom koraku uzimamo tačku sa maksimalnom vrijednošću  $S(k, n)$  u opsegu frekvencijskih indeksa  $|k - k_p| \leq D$ , gdje je sa  $k_p$  označen frekvencijski indeks prethodne tačke putanje. Na taj način favorizujemo visoke vrijednosti  $J_m$  koje su nam od interesa u postupku maksimizacije.

Nakon  $N_\pi$  pokušaja proglasimo maksimalnu dobijenu vrijednost  $J_{\max}$  maksimumom čitavog skupa  $\Pi_D$ . Navedeni postupak možemo da primijenimo i bez slučajnog izbora početne tačke, uzimajući svaku tačku vremensko-frekvencijske ravni kao mogućeg kandidata za početak putanje. Na taj način bi dobijeni maksimum bio tačno određen  $J_{\max} = \bar{J}$ , a broj putanja bi bio  $NM$ . Uzimajući  $N_\pi < NM$  putanja dobijamo stvarni maksimum  $\bar{J}$  sa nekom vjerovatnoćom  $P_{N_\pi}$ . Sa druge strane, logičan izbor za početnu tačku putanje u  $n$ -tom trenutku može biti frekvencijski indeks pozicije maksimuma  $\max_k S(k, n)$  čime broj mogućih putanja smanjujemo na  $N$ .

Broj analiziranih putanja se dodatno može smanjiti ako vodimo računa da li putanja  $\pi_m(n)$  koja je krenula od tačke  $(n_0, k_0)$  u nekom od narednih koraka prolazi kroz tačku  $(n_1, k_1)$  pri čemu je  $k_1$  frekvencijski indeks maksimuma  $\max_k S(k, n_1)$ . U tom slučaju nema potrebe za kasnijim posmatranjem putanje koja startuje iz tačke  $(n_1, k_1)$ , jer će se ona poklopiti sa analiziranom putanjom.

Performanse detektora signala zasnovanog na vremensko-frekvencijskoj analizi i poređenje sa detektorom zasnovanim na Furijeovoj transformaciji prikazane su na slici





Slika 3.9: Vjerovatnoća nedetekcije signala za slučaj detektora zasnovanog na Furijeovoj transformaciji (FT) i S-metodu (SM) za tri vrijednosti parametra  $L$ .

3.9. Posmatran je slučaj linearno frekvencijski modulisanog signala:

$$x(n) = e^{j\frac{\pi}{128}n^2} \quad (3.63)$$

za  $-128 \leq n \leq 127$  u prisustvu šuma promjenljive varijanse  $\sigma_\epsilon^2$ . Za svaku varijansu šuma posmatrano je 200 realizacija i vršena je detekcija primjenom Furijeove transformacije i S-metoda sa  $L = 4$ ,  $L = 16$  i  $L = 32$ . Na slici 3.9 prikazana je zavisnost vjerovatnoće nedetektovanja signala od odnosa signal-šum. Kao što se i moglo očekivati, S-metod sa dovoljno velikim parametrom  $L$  kvalitetno detektuje signal, čak i pri malom odnosu signal-šum. Vjerovatnoća lažnog alarma kod svih analiziranih detektora je  $P_{FA} = 0.0027$ .

## Poglavlje 4

# Analiza radarskih signala

Radarski signali su primjer jako nestacionarnih signala gdje prednosti primjene vremensko-frekvencijske analize u potpunosti dolaze do izražaja. Klasični metodi analize u vremenskom ili u frekvencijskom domenu u velikom broju slučajeva ne mogu dati zadovoljavajuće rezultate, ili se dobijeni rezultati mogu značajno poboljšati, uzimajući u obzir nestacionarni karakter ovih signala [57, 3, 9, 58].

Osnovni problem u analizi radarskih signala je detekcija i izdvajanje korisnog signala u prisustvu jakih smetnji. Inherentna osobina svih aktivnih radara je da pored signala reflektovanog od mete na prijemni dio radara dolaze i signali reflektovani od okolnih objekata. Ovi signali predstavljaju signal smetnji (clutter), dok signal reflektovan od mete predstavlja koristan signal. Jedan od osnovnih zadataka u obradi radarskih signala je odvajanje korisnog signala od signala smetnji.

U okviru ovog poglavlja biće analitički izveden i analiziran model radarskog signala, kao i signala smetnji. Na signalima dobijenim korišćenjem modela primijenjen je algoritam dekompozicije zasnovan na S-metodu.

Realni radarski signali analizirani su u nastavku poglavlja, pri čemu su definisani kriterijumi odabira komponenti od interesa u procesu dekompozicije. Definisan je algoritam analize radarskih signala i primijenjen na eksperimentalno dobijenim signalima. Karakteristični rezultati su analizirani i grafički prikazani.

## 4.1 Modeliranje radarskih signala

U nastavku će biti naveden i analiziran model radarskog signala, za slučaj radara sa neprekidnim talasom (CW). Osnovni cilj modela je da objasni mehanizam dobijanja radarskih signala, te da se na teorijskoj osnovi izvedu zaključci vezani za detekciju željenih veličina (udaljenosti mete i njene brzine) iz reflektovanog signala.

### 4.1.1 Model reflektovanog signala

Posmatrajmo radar koji emituje seriju od  $M$  impulsa:

$$v_M(t) = \sum_{m=0}^{M-1} v_0(t - mT_r) \quad (4.1)$$

gdje je osnovni impuls  $v_0(t)$  ograničen na vremenski interval  $0 \leq t < T_r$  i linearno frekvencijski modulisan:

$$v_0(t) = e^{j\pi B t^2 / T_r} \quad (4.2)$$

Trajanje ovoga impulsa  $T_r$  naziva se interval ponavljanja impulsa (Pulse Repetition Time). Ukupno trajanje signala  $v_M(t)$  naziva se vremenom integracije (Coherent Integration Time).

Trenutna frekvencija signala  $v_0(t)$  je

$$\omega_{v_0}(t) = 2\pi B \frac{t}{T_r} \quad (4.3)$$

i na posmatranom vremenskom intervalu mijenja se od 0 do  $2\pi B$ . Parametar  $B$  određuje frekvencijski opseg osnovnog signala. Na slici 4.1 prikazan je primjer signala  $v_M(t)$  za slučaj  $M = 3$ .

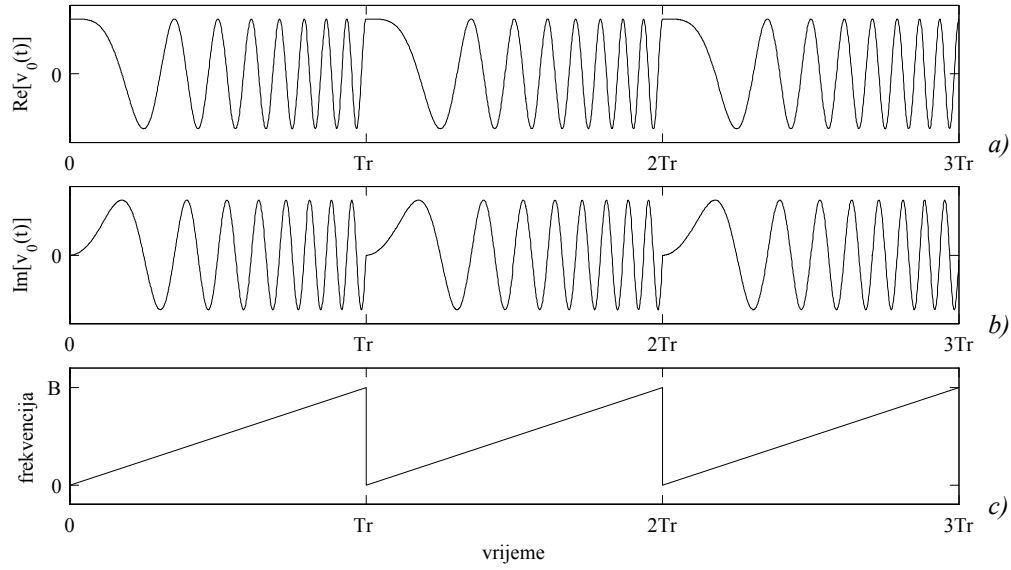
Označimo li osnovnu frekvenciju radara sa  $\omega_0$ , emitovani signal možemo zapisati u obliku:

$$u(t) = e^{j\omega_0 t} v_M(t) \quad (4.4)$$

Signal se reflektuje od mete koja se nalazi na udaljenosti  $r$  i vraća nazad gdje biva registrovan kao:

$$u_R(t) = A \cdot u\left(t - \frac{2r}{c}\right) + \varepsilon(t) \quad (4.5)$$

gdje je sa  $c$  obilježena brzina prostiranja elektromagnetnog talasa u posmatranoj sredini, u parametru  $A$  sadržano je slabljenje reflektovanog talasa, a sa  $\varepsilon(t)$  šum. Demodulacija



Slika 4.1: Radarski signal  $v_M(t)$  za slučaj  $M = 3$ : a) realni dio signala, b) imaginarni dio signala, c) trenutna frekvencija signala.

primljenog signala vrši se množenjem sa poslatim signalom  $u(t)$ , tako da se na izlazu demodulatora dobija signal:

$$\begin{aligned}
 q(t) &= A \cdot u^*\left(t - \frac{2r}{c}\right) \cdot u(t) \\
 &= A e^{-j\omega_0\left(t - \frac{2r}{c}\right)} v_M^*\left(t - \frac{2r}{c}\right) e^{-j\omega_0 t} v_M(t) \\
 &= A e^{j\omega_0 \frac{2r}{c}} \sum_{m=0}^{M-1} v_0^*\left(t - \frac{2r}{c} - mT_r\right) \sum_{m=0}^{M-1} v_0(t - mT_r)
 \end{aligned} \tag{4.6}$$

Pretpostavimo da je interval ponavljanja impulsa  $T_r$  mnogo veći od kašnjenja impulsa  $\frac{2r}{c}$ . U tom slučaju možemo smatrati da se  $m$ -ta komponenta u prvoj sumi poklapa sa  $m$ -tom komponentom u drugoj sumi, tako da je:

$$q(t) \approx A e^{j\omega_0 \frac{2r}{c}} \sum_{m=0}^{M-1} v_0^*\left(t - \frac{2r}{c} - mT_r\right) v_0(t - mT_r) \tag{4.7}$$

Ukoliko uslov  $T_r \gg \frac{2r}{c}$  nije ispunjen tada se može estimirati kašnjenje  $T_0 \approx \frac{2r}{c}$ , i signal  $u(t)$  zakasniti za  $T_0$  prije demodulacije primljenog signala.

Posmatrajmo  $m$ -tu komponentu signala  $q(t)$ :

$$q_m(t) = A e^{j\omega_0 \frac{2r}{c}} v_0^*\left(t - \frac{2r}{c} - mT_r\right) v_0(t - mT_r) \tag{4.8}$$

Na osnovu definicije signala  $v_0(t)$  vidi se da je signal  $q_m(t)$  lociran u vremenskom intervalu  $mT_r \leq t < T_r + mT_r$  tako da se na posmatranom intervalu može izraziti kao:

$$\begin{aligned}
q_m(t) &= Ae^{j\omega_0 \frac{2r}{c}} e^{-j\pi B(t - \frac{2r}{c} - mT_r)^2 / T_r} e^{j\pi B(t - mT_r)^2 / T_r} \\
&= Ae^{j\omega_0 \frac{2r}{c}} e^{-j\pi B(t - mT_r)^2 / T_r + 2j\pi B \frac{2r}{c} (t - mT_r) / T_r - j\pi B (\frac{2r}{c})^2 / T_r} e^{j\pi B(t - mT_r)^2 / T_r} \\
&= Ae^{j\omega_0 \frac{2r}{c}} e^{2j\pi B \frac{2r}{c} (t - mT_r) / T_r} e^{-j\pi B (\frac{2r}{c})^2 / T_r}
\end{aligned} \tag{4.9}$$

Pretpostavimo da meta miruje, odnosno da je rastojanje radara od mete  $r$  konstantno. U ovom slučaju signal  $q_m(t)$  se može napisati u obliku:

$$q_m(t) = Ae^{j\varphi} e^{2j\pi B \frac{2r}{c} t / T_r} \tag{4.10}$$

gdje je uticaj svih članova koji ne zavise od vremena u (4.9) sveden na promjenu faze  $\varphi$ . Vidimo da je u ovom slučaju signal  $q_m(t)$  prostoperiodični signal sa frekvencijom:

$$f_{q_m} = \frac{2B}{cT_r} r \tag{4.11}$$

Dakle, frekvencija signala  $q_m(t)$  je proporcionalna sa rastojanjem radara i mete  $r$ . U realnim sistemima signal  $q_m(t)$  se diskretizuje sa korakom odabiranja  $T_s$ , tako da dobijemo  $N = T_r / T_s$  odbiraka u vremenskom intervalu  $mT_r \leq t < T_r + mT_r$ . Frekvencija  $f_{q_m}$  se određuje kao pozicija maksimuma diskretne Furijeove transformacije dobijenog signala. Kako je dužina signala  $N$  odbiraka, to i odgovarajuća DFT ima takođe  $N$  odbiraka, tako da je frekvencijski opseg  $0 \leq f < \frac{1}{T_s}$  podijeljen na  $N$  diskretnih frekvencija koje se međusobno razlikuju za  $\Delta f = \frac{1}{NT_s} = \frac{1}{T_r}$ . To znači da je udaljenost  $r$  dobijena na ovaj način diskretna, sa korakom diskretizacije:

$$\Delta r = \frac{c}{2B} \tag{4.12}$$

Ovaj korak diskretizacije predstavlja rezoluciju radara u određivanju udaljenosti do mete. Iz navedene relacije može se zaključiti da rezolucija radara zavisi isključivo od širine frekvencijskog opsega emitovanog signala  $B$ . Na ovaj način se udaljenost radara i mete može dobiti u obliku  $r = k\Delta r$  pri čemu je  $k = 0, 1, \dots, N - 1$ . Dakle, maksimalni domet radara je:

$$r_{\max} = (N - 1) \frac{c}{2B} \tag{4.13}$$

Ukoliko se meta nalazi na većem rastojanju, tada se u računanju DFT signala  $q_m(t)$  pojavljuju frekvencije veće od frekvencije odabiranja, koje se, kao što je poznato,

transliraju na osnovni frekvencijski opseg, te dobijamo pogrešnu informaciju o udaljenosti. Greška koja može nastati je jednaka  $kN\Delta r$ , gdje je  $k$  prirodan broj.

Rastojanje  $r$  za slučaj pokretne mete je funkcija vremena. Ukoliko se meta kreće konstantnom brzinom u odnosu na radar tada je:

$$r(t) = r_0 + V_0 t \quad (4.14)$$

gdje je  $r_0$  rastojanje od radara do mete u početnom trenutku posmatranja  $t = 0$ , a  $V_0$  projekcija brzine mete na pravac određen pozicijom mete i radara. Posmatrajmo signale  $q_m(t)$  diskretizovane sa korakom odabiranja  $T_s$  ( $T_r = NT_s$ ) tako da je  $t = nT_s + mT_r$ . Ovakovom diskretizacijom postizemo da je u diskretnom domenu svaki od signala  $q_m(t)$  definisan za vrijednosti indeksa  $0 \leq n < N - 1$  za svako  $0 \leq m < M$ .

$$q(m, n) = A e^{j\omega_0 \frac{2r(nT_s + mT_r)}{c}} e^{2j\pi B \frac{2r(nT_s + mT_r)}{c} (nT_s)/T_r} e^{-j\pi B \frac{4r(nT_s + mT_r)^2}{c^2}/T_r} = A e^{j\varphi(m, n)} \quad (4.15)$$

gdje je:

$$\varphi(m, n) = \omega_0 \frac{2r(nT_s + mT_r)}{c} + \frac{2\pi B T_s}{T_r} \frac{2r(nT_s + mT_r)}{c} n - \frac{\pi B}{T_r} \frac{4r(nT_s + mT_r)^2}{c^2} \quad (4.16)$$

odakle korišćenjem (4.14) i uz  $NT_s = T_r$  dobijamo:

$$\begin{aligned} \varphi(m, n) = & 2 \frac{r_0 \omega_0}{c} - \frac{4\pi B r_0^2}{T_r c^2} + \\ & + \frac{2\pi}{cN} \left( \frac{\omega_0}{\pi} V_0 T_r + 2B r_0 \frac{c - 2V_0}{c} \right) n - \frac{4\pi B V_0 T_r (c - V_0)}{c^2 N^2} n^2 + \\ & + \frac{2\pi B V_0 T_r (c - 2V_0)}{c^2 N} mn - \\ & - 4\pi B T_r \frac{V_0^2}{c^2} m^2 - \left( \frac{8\pi B r_0 V_0}{c^2} - \frac{2\omega_0 V_0 T_r}{c} \right) m \end{aligned} \quad (4.17)$$

bez umanjenja opštosti možemo smatrati da je brzina mete  $V_0$  mnogo manja od brzine svjetlosti, odnosno  $c - 2V_0 \approx c$ , tako da uz označavanje konstantnog dijela faze sa  $\varphi_0$  dobijamo:

$$\begin{aligned} \varphi(m, n) = & \varphi_0 + \frac{2\pi}{cN} \left( \frac{\omega_0}{\pi} V_0 T_r + 2B r_0 \right) n - \frac{4\pi B V_0 T_r}{cN^2} n^2 + \\ & + \frac{2\pi B V_0 T_r}{cN} mn - 4\pi B T_r \frac{V_0^2}{c^2} m^2 - \left( \frac{8\pi B r_0 V_0}{c^2} - \frac{2\omega_0 V_0 T_r}{c} \right) m \end{aligned} \quad (4.18)$$

Izvršimo analizu varijacija faze u odnosu na diskretne varijable  $n$  i  $m$ . Posmatrajmo prvo varijablu  $n$ . Faza  $\varphi(m, n)$  je polinom drugog reda po varijabli  $n$ .

Posmatramo li analogni signal sa kvadratnom promjenom faze  $q_a(t) = e^{j\varphi_0 + \alpha t + \beta t^2/2}$ , njegova trenutna frekvencija računata kao izvod faze po vremenu je  $\omega(t) = \alpha + \beta t$ . Ukoliko se posmatraju odbirci signala  $q_a(t)$  sa korakom odabiranja  $T$ , tada se dobija diskretni signal  $q_a(nT) = e^{j\varphi_0 + \alpha nT + \beta n^2 T^2/2}$ . Ekvivalent analognoj trenutnoj frekvenciji je diskretna trenutna frekvencija  $\omega_d(n) = T(\alpha + \beta nT) = \alpha T + \beta nT^2$ . Dakle, konstantni član trenutne frekvencije  $\omega_d(n)$  dobijamo kao koeficijent uz  $n$  u fazi signala  $q_a(nT)$ , dok koeficijent uz  $n$  u trenutnoj frekvenciji dobijamo kao dvostruki koeficijent uz  $n^2$  u fazi signala.

Posmatrajmo trenutnu frekvenciju diskretnog signala  $q(n, m)$  u odnosu na varijablu  $n$ :

$$\omega_{dn}(n) = \frac{4\pi B}{cN}(r_0 + V_0 m T_r) + \frac{2\omega_0}{cN} V_0 T_r - \frac{8\pi B V_0 T_r}{cN^2} n \quad (4.19)$$

Prvi član u izrazu (4.19) je proporcionalan sa udaljenošću mete od radara u posmatranom vremenskom trenutku  $t = mT_r$ , ali za razliku od slučaja nepokretne mete ovdje imamo i dodatne članove proporcionalne sa brzinom kretanja mete. Ukoliko frekvenciju diskretnog signala  $q(m, n)$  u odnosu na varijablu  $n$  određujemo primjenom diskretne Furijeove transformacije, tada njen maksimum može biti na frekvencijskim indeksima:

$$\begin{aligned} k_n &= \left[ \omega_{dn}(n) \frac{N}{2\pi} \right] = \\ &= \left[ \frac{2B}{c}(r_0 + V_0 m T_r) + \frac{\omega_0}{c\pi} V_0 T_r - \frac{4B V_0 T_r}{cN} n \right] \end{aligned} \quad (4.20)$$

gdje je sa  $[\cdot]$  označen najbliži cio broj izrazu u zagradi. Pod uslovom da je:

$$\left| \frac{\omega_0}{c\pi} V_0 T_r - \frac{4B}{c} V_0 T_r \frac{n}{N} \right| < 0.5 \quad (4.21)$$

za svako  $n = 0, 1, \dots, N$  dobijamo samo jedan indeks  $k_n$  pa će procjena rastojanja radara od mete

$$\hat{r} = k_n \Delta r \quad (4.22)$$

biti jednako dobra kao i u slučaju nepokretne mete. Kako je frekvencijski opseg radarskog signala  $B$  u svim slučajevima od interesa dosta manji od radne frekvencije radara  $\frac{\omega_0}{2\pi}$  uslov se može svesti na:

$$V_0 T_r < \frac{\pi c}{2\omega_0} = \frac{\lambda}{4} \quad (4.23)$$

gdje je  $\lambda$  talasna dužina radarskog signala a  $V_0 T_r$  udaljenost koju meta pređe za vrijeme trajanja jednog radarskog impulsa.

Posmatrajmo sada trenutnu frekvenciju diskretnog signala  $q(m, n)$  u odnosu na varijablu  $m$ :

$$\omega_{dm}(m) = \frac{2\omega_0 V_0 T_r}{c} - \frac{8\pi B r_0 V_0}{c^2} + \frac{2\pi B V_0 T_r}{cN} n - 8\pi B T_r \frac{V_0^2}{c^2} m \quad (4.24)$$

Prva tri člana su proporcionalna sa brzinom kretanja mete  $V_0$ . Dakle, određivanjem frekvencije signala  $q(m, n)$  u odnosu na varijablu  $m$  možemo doći do informacije o brzini mete. Neka se frekvencija određuje korišćenjem diskretne Furijeove transformacije. Imajući u vidu da je  $0 \leq m < M$ , mogući indeksi maksimuma DFT će biti:

$$\begin{aligned} k_m &= \left[ \omega_{dm}(m) \frac{M}{2\pi} \right] = \\ &= \left[ M \frac{\omega_0 V_0 T_r}{c\pi} + M \frac{B V_0 T_r}{cN} n - M \frac{4B r_0 V_0}{c^2} - 4M B T_r \frac{V_0^2}{c^2} m \right] \end{aligned} \quad (4.25)$$

Ukoliko je:

$$\left| M \frac{B V_0 T_r}{cN} n - M \frac{4B r_0 V_0}{c^2} - 4M B T_r \frac{V_0^2}{c^2} m \right| < 0.5 \quad (4.26)$$

izraz (4.25) se svodi na:

$$k_m = \left[ M \frac{\omega_0 V_0 T_r}{c\pi} \right] \quad (4.27)$$

tako da brzinu mete možemo estimirati kao:

$$\hat{V}_0 = k_m \Delta V = k_m \frac{c\pi}{\omega_0 M T_r} \quad (4.28)$$

gdje je sa  $\Delta V$  označena rezolucija radara u određivanju brzine mete. Član  $M T_r$  u imeniocu izraza (4.28) predstavlja ukupno vrijeme trajanja povorke radarskih impulsa (CIT). Indeks  $k_m$  uzima i pozitivne i negativne vrijednosti, tako da je maksimalna brzina mete koju radar može da detektuje:

$$V_{\max} = \frac{M}{2} \Delta V = \frac{c\pi}{\omega_0 T_r} \quad (4.29)$$

Vidimo da ona zavisi od radne frekvencije radara i od trajanja jednog radarskog impulsa. Povećavanjem broja impulsa u povorci  $M$  dobijamo manju rezoluciju  $\Delta V$ , dok maksimalna brzina  $V_{\max}$  ostaje nepromijenjena.

Navedene analize možemo objediniti u algoritam detekcije udaljenosti i brzine mete primjenom radara sa kontinualnim talasom (Continuous Wave Radar). Neka je osnovna frekvencija radara  $\omega_0$ , frekvijski opseg emitovanog signala  $B$  i trajanje jednog impulsa  $T_r$ . Funkcionisanje radara možemo opisati algoritmom:

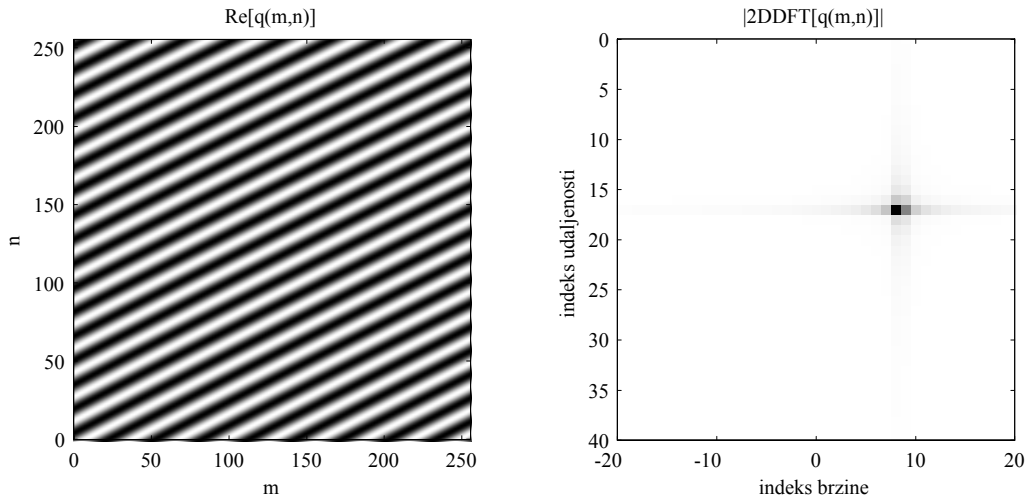


1. Formira se radarski impuls (4.1) sastavljen od  $M$  uzastopnih linearno frekvencijski moduliranih signala.
2. Signal se moduliše i emituje u formi (4.4).
3. Vršiti se demodulacija primljenog signala i dobija se signal (4.7).
4. Demodulisani signal se diskretizuje i dobija se dvodimenzioni signal  $q(m, n)$ ,  $m = 0, 1, \dots, M - 1$ ,  $n = 0, 1, \dots, N$  (4.15).
5. Vršiti se računanje diskretne Furijeove transformacije, po obje dimenzije, i određuje se pozicija maksimuma  $(m_q, n_q)$ , pri čemu je  $0 \leq n_q < N$  i  $-\frac{M}{2} \leq m_q < \frac{M}{2} - 1$  za  $M$  parno odnosno  $-\frac{M-1}{2} \leq m_q \leq \frac{M-1}{2}$  za  $M$  neparno. U ovom koraku su granice frekvencijskih indeksa optimalno odabrane, jer indeks  $n_q$  određuje udaljenost mete od radara koja po prirodi mora biti pozitivna veličina, dok indeks  $m_q$  determiniše relativnu brzinu mete u odnosu na radar, te stoga može biti i negativna veličina.
6. Određuje se rastojanje do mete kao  $\hat{r} = n_q \Delta r = n_q \frac{c}{2B}$ .
7. Određuje se brzina mete  $\hat{V} = m_q \Delta V = m_q \frac{\pi c}{\omega_0 M T_r}$ .

Pri provođenju navedenog postupka treba voditi računa o neodređenosti rastojanja  $r = \hat{r} + kN\Delta r$ , gdje je  $k$  prirodan broj i neodređenosti brzine  $V = \hat{V} + pM\Delta V$ , gdje je  $p$  cio broj. Takođe treba voditi računa o svim pretpostavkama navedenim u analizi.

**Primjer 1:** *Posmatrajmo radar čija je osnovna frekvencija  $f_0 = 10$  MHz, širina frekvencijskog opsega signala  $B = 500$  kHz, vrijeme trajanja jednog impulsa  $T_r = 0.1$  s i broj impulsa  $M = 256$ . Neka je radarski snop reflektovan od mete koja se kreće konstantnom brzinom  $V_0 = 5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$  i u početnom trenutku se nalazi na udaljenosti  $r_0 = 5000$  m od radara.*

U ovom primjeru je vrijeme integracije:  $CIT = MT_r = 25.6$  s. U toku vremena integracije meta je povećala udaljenost za 128 m što je zanemarljivo malo u odnosu na udaljenost  $r_0$ . Rezultat analitičkog modela radarskog signala je prikazan na slici (4.2). Na lijevom grafiku je realni dio demodulisanog signala  $q(m, n)$ . Uočava se periodičnost signala po obje ose. Na desnom grafiku je dvodimenziona Furijeova transformacija signala  $q(m, n)$  na kojoj se uočava veoma oštar maksimum lociran na indeksima  $n_q = 17$  i  $m_q = 8$ .



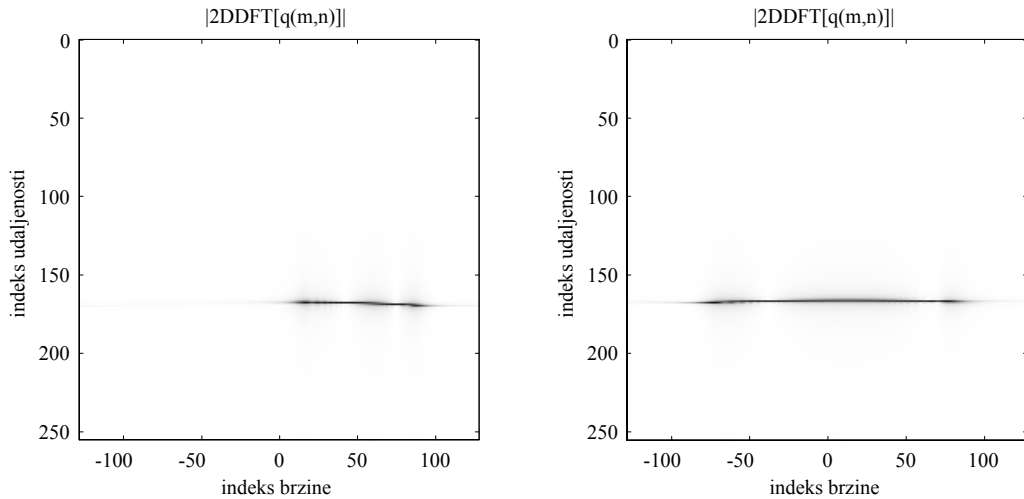
Slika 4.2: Realni dio demodulisanog signala  $q(m, n)$  - lijevo i njegova dvodimenziona DFT - desno (prikazan je samo dio DFT gdje se nalaze veličine od interesa).

Rezolucije radara su:  $\Delta r = \frac{c}{2B} = 300 \text{ m}$  i  $\Delta V = \frac{\pi c}{\omega_0 M T_r} = 0.5859 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ , tako da je detektovana pozicija mete  $\hat{r} = n_q \Delta r = 5100$ , a detektovana brzina  $\hat{V} = m_q \Delta V = 4.6875 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ .

Analiza određivanja brzine mete vrijedi pod uslovom da je brzina mete u toku vremena integracije (CIT) približno konstantna. Sa druge strane, kod određivanja rastojanja mete od radara negativan uticaj na estimaciju ima velika promjena položaja mete u vremenu trajanja jednog radarskog impulsa. Pretpostavimo da se meta kreće dosta velikom brzinom ( $1000 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ ). S obzirom da je maksimalna brzina koju radar naveden u primjeru može tačno da detektuje  $V_{\max} = \frac{M}{2} \Delta V = 75 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ , brzina posmatrane mete ne može biti tačno određena (rezultat estimacije će biti:  $(24.6 + 150k) \frac{\text{m}}{\text{s}}$  gdje je  $k$  cio broj). Sa druge strane, promjena udaljenosti mete i radara u toku trajanja jednog radarskog impulsa je  $1000 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 0.1 \text{ s} = 100 \text{ m}$ , manja od rezolucije u određivanju udaljenosti.

**Primjer 2:** Posmatrajmo radar iz prethodnog primjera, pri čemu se meta nalazi na početnom rastojanju  $r_0 = 50000 \text{ m}$ , kreće se sa konstantnim ubrzanjem  $a_0$ , tako da je brzina mete  $V(t) = V_0 + a_0 t$ .

Na slici 4.3 je prikazana dvodimenziona Furijeova transformacija signala  $q(m, n)$  za slučajeve:  $V_0 = 5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ ,  $a_0 = 2 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$  i  $V_0 = -50 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ ,  $a_0 = 4 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ . Sa slike se vidi da se u oba slučaja udaljenost mete od radara može dosta tačno odrediti (posmatrajući poziciju maksimuma



Slika 4.3: Dvodimenziona DFT radarskog signala. Slučaj  $V_0 = 5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ ,  $a_0 = 2 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ , lijevo i  $V_0 = -50 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ ,  $a_0 = 4 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$  desno.

po vertikalnoj osi), dok se brzina mete ne može odrediti jer po horizontalnoj osi ne postoji jasno izražen maksimum. Razlog ovakvom ponašanju radara je u tome što se u vremenu trajanja povorke radarskih impulsa (CIT) položaj mete, u prvom analiziranom slučaju, mijenja od inicijalnih 50000 m do 50783 m, dok se brzina mete mijenja od početne brzine  $5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$  do  $56.2 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ . Ove promjene rezultuju u "širenju" DFT preko susjednih indeksa, pri čemu je opseg širenja, kod indeksa udaljenosti  $\lceil \frac{783}{\Delta r} \rceil = 3$ , a kod indeksa frekvencije  $\lceil \frac{51.2}{\Delta V} \rceil = 87$ .

Na osnovu izvedene analize, i prikazanih primjera može se zaključiti:

- Određivanje rastojanja mete od radara se, pod jednostavno ostvarljivim uslovima, može odrediti na osnovu diskretne Furijeove transformacije signala  $q(m, n)$  po varijabli  $n$ .
- Za određivanje brzine mete, osim u slučajevima zanemarljive nestacionarnosti brzine, nije dovoljno posmatrati maksimum diskretne Furijeove transformacije signala  $q(m, n)$  po varijabli  $m$ .

Jedno od rješenja problema određivanja brzine je upotreba vremensko-frekvencijske analize radarskog signala. Prethodno opisani algoritam modifikujemo na sledeći način:

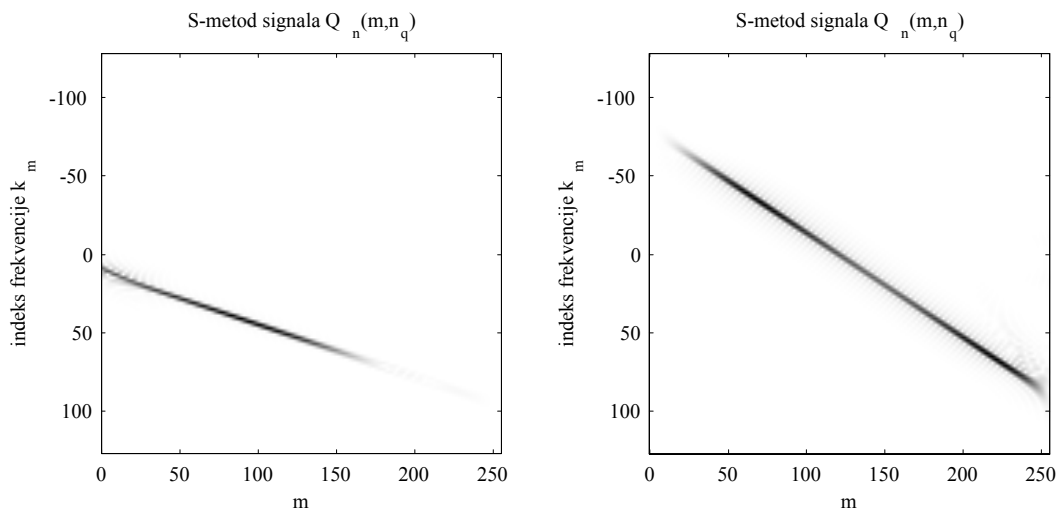
Formira se radarski impuls (4.1) sastavljen od  $M$  uzastopnih linearno frekvencijski moduliranih signala.

1. Signal se moduliše i emituje u formi (4.4).
2. Vršiti se demodulacija primljenog signala i dobija se signal (4.7).
3. Demodulisani signal se diskretizuje i dobija se dvodimenzioni signal  $q(m, n)$ ,  $m = 0, 1, \dots, M - 1$ ,  $n = 0, 1, \dots, N$  (4.15).
4. Vršiti se računanje diskretne Furijeove transformacije, po dimenziji  $n$ , dobija se signal  $Q_n(m, k_n)$  i određuje se pozicija maksimuma  $n_q$ , pri čemu je  $0 \leq n_q < N$ . Na osnovu ovog podatka određuje se rastojanje mete od radara  $\hat{r} = n_q \Delta r = n_q \frac{c}{2B}$ .
5. Posmatra se signal  $Q_n(m, n_q)$ , i određuje se njegova vremensko-frekvencijska reprezentacija. Trenutna frekvencija signala  $Q_n(m, n_q)$  proporcionalna je brzini kretanja mete:  $\hat{V} = m_q(m) \Delta V = m_q(m) \frac{\pi c}{\omega_0 M T_r}$ , gdje je sa  $m_q(m)$  označen indeks trenutne frekvencije posmatranog signala u  $m$ -tom intervalu posmatranja.

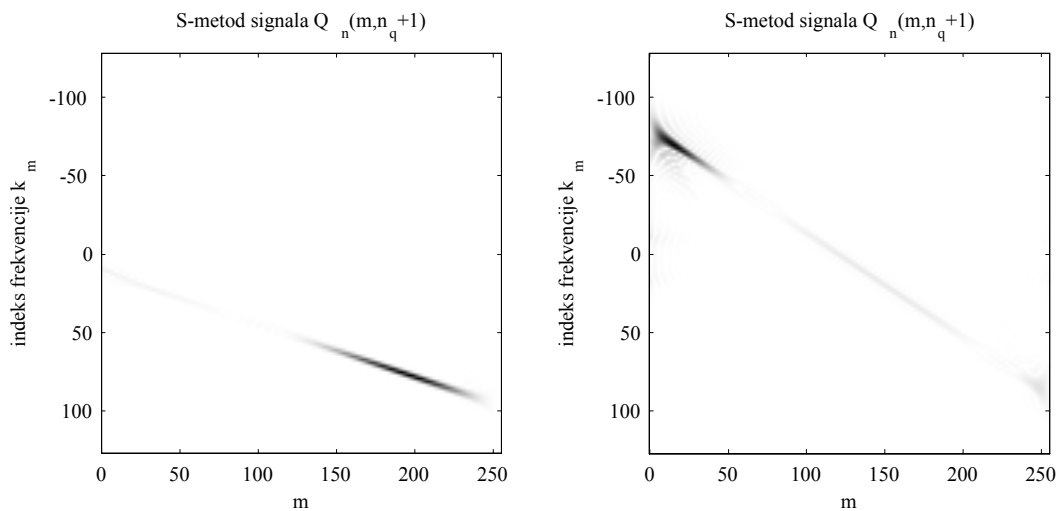
Na slici 4.4 prikazane su vremensko-frekvencijske reprezentacije signala iz Primjera 2. Sa slike se vidi da dobijamo informaciju o brzini mete u vremenskim trenucima  $t = m T_r$ , prateći indeks maksimuma vremensko-frekvencijske reprezentacije u zavisnosti od  $m$ . Na lijevom grafiku uočljivo je da za visoke indekse  $m$  gubimo podatak o brzini. To se može objasniti time što posmatramo samo jedan indeks udaljenosti  $n_q$  (u konkretnom slučaju  $n_q = 167$ ), odnosno položaje mete  $50100 = n_q \Delta r < r < (n_q + 1) \Delta r = 50400$ , a posmatrana meta je nakon  $m = 176$  napustila posmatrani opseg udaljenosti. Analizom signala  $Q_n(m, n_q + 1)$  u posmatranom slučaju mogla bi se odrediti brzina mete i za  $m > 176$ . Vremensko-frekvencijska reprezentacija signala  $Q_n(m, n_q + 1)$  u oba posmatrana slučaja je prikazana na slici 4.5.

### 4.1.2 Model smetnji (clutter-a)

Reflektovani signal koji radar obrađuje sastoji se od signala reflektovanog od mete (korisni signal) i signala reflektovanih od ostalih objekata u radarskom snopu koji nijesu od interesa (signali smetnji). Ukoliko su objekti koji reflektuju signale smetnji nepokretni, tada su oni u dvodimenzionoj Furijeovoj transformaciji signala  $q(m, n)$  grupisani na nultoj frekvenciji po varijabli  $m$ , te se mogu eliminisati uklanjanjem konstantnog člana signala



Slika 4.4: Vremensko-frekvencijska reprezentacija radarskog signala  $Q_n(m, n_q)$ . Slučaj  $V_0 = 5 \frac{m}{s}$ ,  $a_0 = 2 \frac{m}{s^2}$ , lijevo i  $V_0 = -50 \frac{m}{s}$ ,  $a_0 = 4 \frac{m}{s^2}$  desno.



Slika 4.5: Vremensko-frekvencijska reprezentacija radarskog signala  $Q_n(m, n_q + 1)$ . Slučaj  $V_0 = 5 \frac{m}{s}$ ,  $a_0 = 2 \frac{m}{s^2}$ , lijevo i  $V_0 = -50 \frac{m}{s}$ ,  $a_0 = 4 \frac{m}{s^2}$  desno.

$q(m, n)$  po varijabli  $m$ . Neželjeni pokretni objekti u radarskom snopu daju signal smetnje koji se ne može razlikovati od signala mete.

Ukoliko radarski snop pada na morsku površinu javlja se specifičan vid smetnji. Naime, morska površina nije ravna već se na njoj javljaju talasi i radarski snop se reflektuje od talasa. S obzirom da su talasi prisutni na svim udaljenostima  $r$  to će se signal smetnje pojaviti na svim indeksima  $k_n$  u dvodimenzionoj Furijeovoj transformaciji  $Q_{mn}(k_m, k_n)$  signala  $q(m, n)$ . Dominantni dio ovih smetnji su dva oštra pika u spektru demodulisanog reflektovanog signala, takozvane Bragg-ove linije koje se pojavljuju na frekvencijama  $f_{Bragg} = \pm \frac{2v}{\lambda}$ , gdje je  $v$  brzina talasa, a  $\lambda$  talasna dužina radarskog signala. Pored ovih dominantnih smetnji javljaju se i smetnje višeg reda na frekvencijama:  $2^{3/4}f_{Bragg}$  i  $\sqrt{n}f_{bragg}$ , za  $n = 2, 3, \dots, N$ .

Jedan od načina modeliranja smetnji nastalih usled refleksije od morske površine je da se ograničimo na smetnje prvog reda i da dva pika na frekvencijama  $\pm f_{Bragg}$  modeliramo sinusoidom  $\sin(2\pi f_{Bragg}t)$

S obzirom da ovaj model ne uzima u obzir nestacionarno ponašanje smetnji, u simulacijama će biti korišćena smetnja dobijena eksperimentalno, analizom radarskog signala bez prisustva mete.

### 4.1.3 Dekompozicija simuliranih radarskih signala

U ovom dijelu će biti prikazani rezultati postupka dekompozicije (definisano u poglavlju 3.3) na radarske signale dobijene korišćenjem navedenog modela. Razmatrana su tri slučaja:

1. Brzina mete je konstantna:  $V(t) = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ , slike 4.6 i 4.7.
2. Meta se kreće sa konstantnim ubrzanjem:  $V(t) = 20 \frac{\text{m}}{\text{s}} + 2 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}t$ , slike 4.8 i 4.9.
3. Meta se kreće nelinearnom brzinom:  $V(t) = 30 \frac{\text{m}}{\text{s}} - 3 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}t + 0.3 \frac{\text{m}}{\text{s}^3}t^2 - 0.005 \frac{\text{m}}{\text{s}^4}t^3$ , slike 4.10 i 4.11.

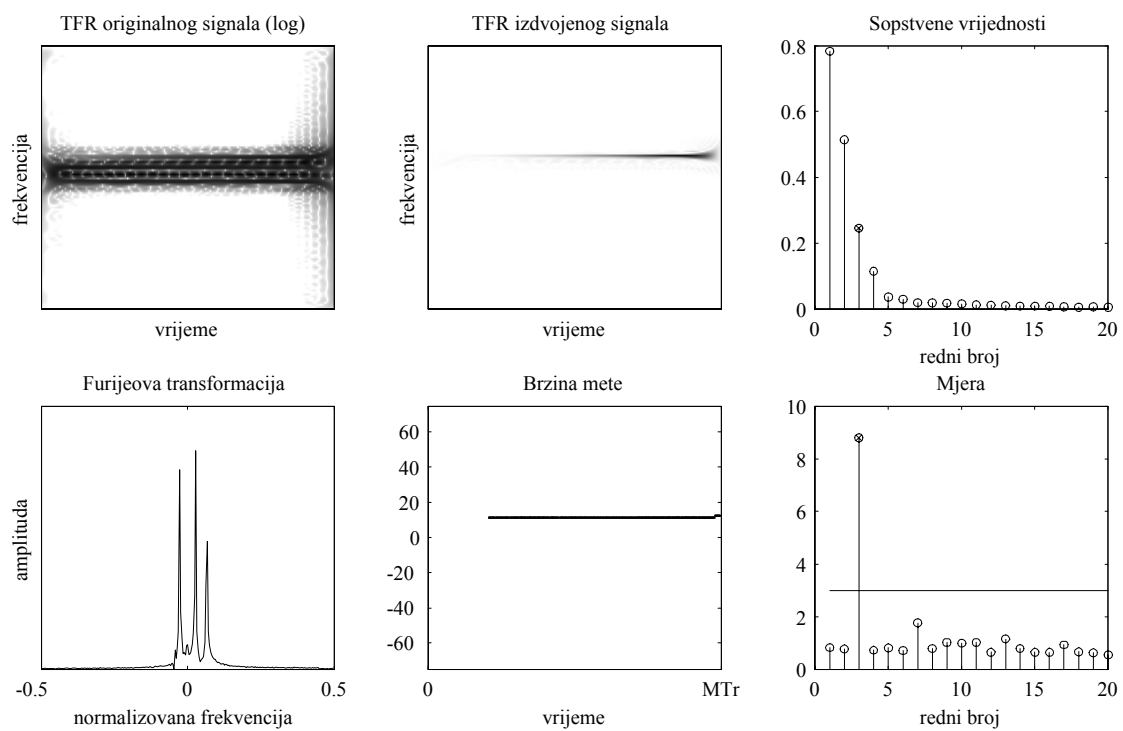
Na slikama: 4.6, 4.8 i 4.10 prikazana je:

- Vremensko-frekvencijska reprezentacija originalnog signala (sa smetnjom) u logaritamskoj skali, jer je signal smetnje mnogo jači od signala mete.

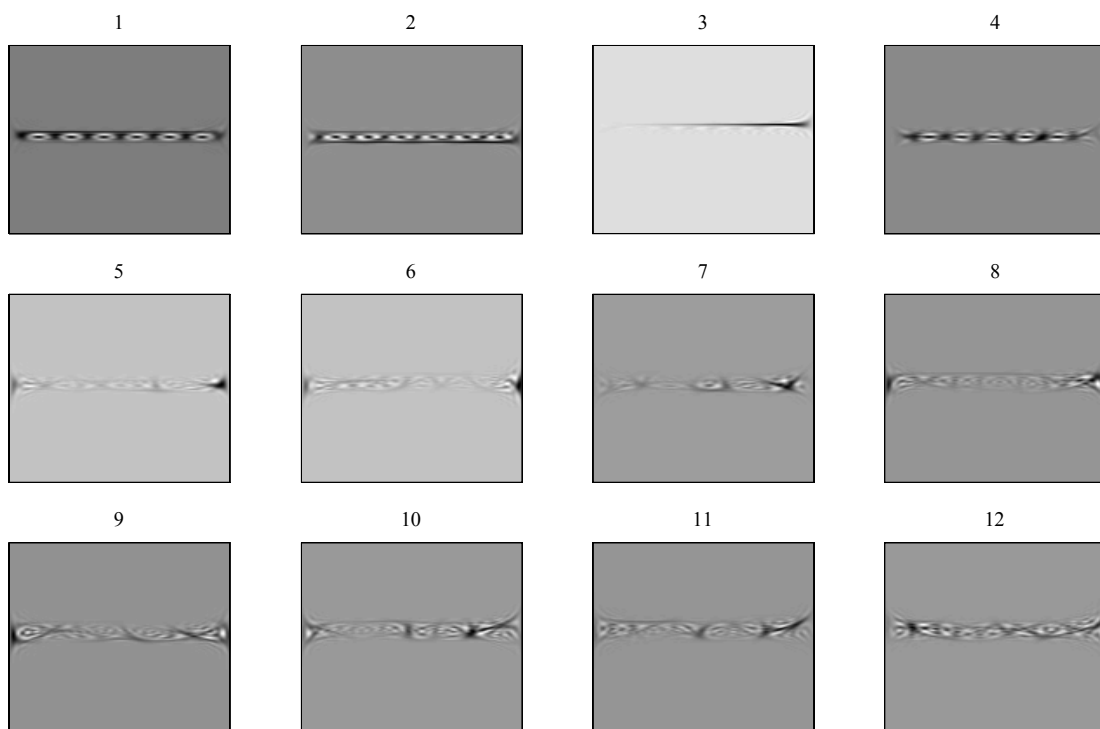
- Vremensko-frekvencijska reprezentacija detektovanog signala mete.
- Vrijednosti sopstvenih vektora, pri čemu su sa  $\otimes$  označene sopstvene vrijednosti vektora kod kojih je utvrđeno da pripadaju signalu mete.
- Amplituda Furijeove transformacije originalnog signala.
- Brzina mete estimirana na osnovu trenutne frekvencije detektovanog signala mete.
- Mjera (kriterijum) kojom se utvrđuje da li sopstveni vektor sadrži signal mete (horizontalna linija predstavlja prag odluke). Ovdje je iskorišten kriterijum definisan u narednom poglavlju (4.2.1), prilagođen analizi realnih radarskih signala.

U svakom analiziranom slučaju prikazane su i vremensko-frekvencijske reprezentacije 12 sopstvenih vektora na slikama 4.7, 4.9 i 4.11.

U prvom slučaju je korišćeno  $L = 8$ , a u drugom i trećem  $L = 20$ . Kod prvog slučaja signal mete je stacionaran i sadržan je u jednom sopstvenom vektoru, dok je u drugom i trećem slučaju signal mete dobijen na osnovu 3 sopstvena vektora.

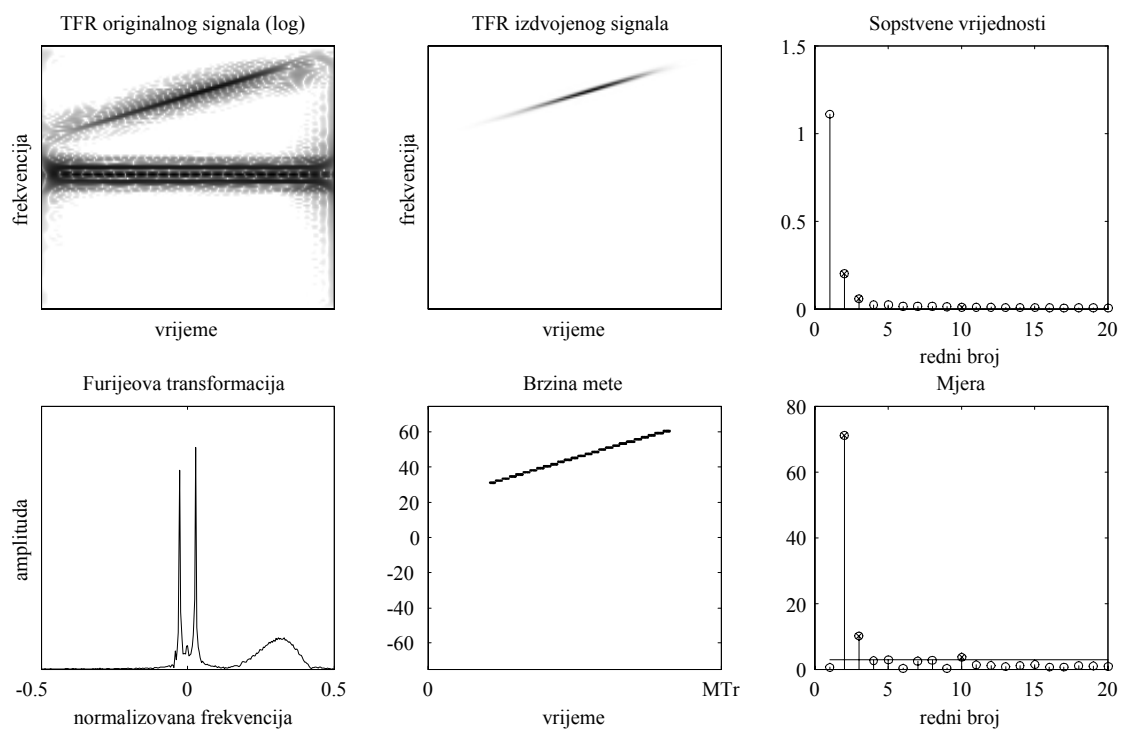


Slika 4.6: Dekompozicija simuliranog radarskog signala u prvom slučaju

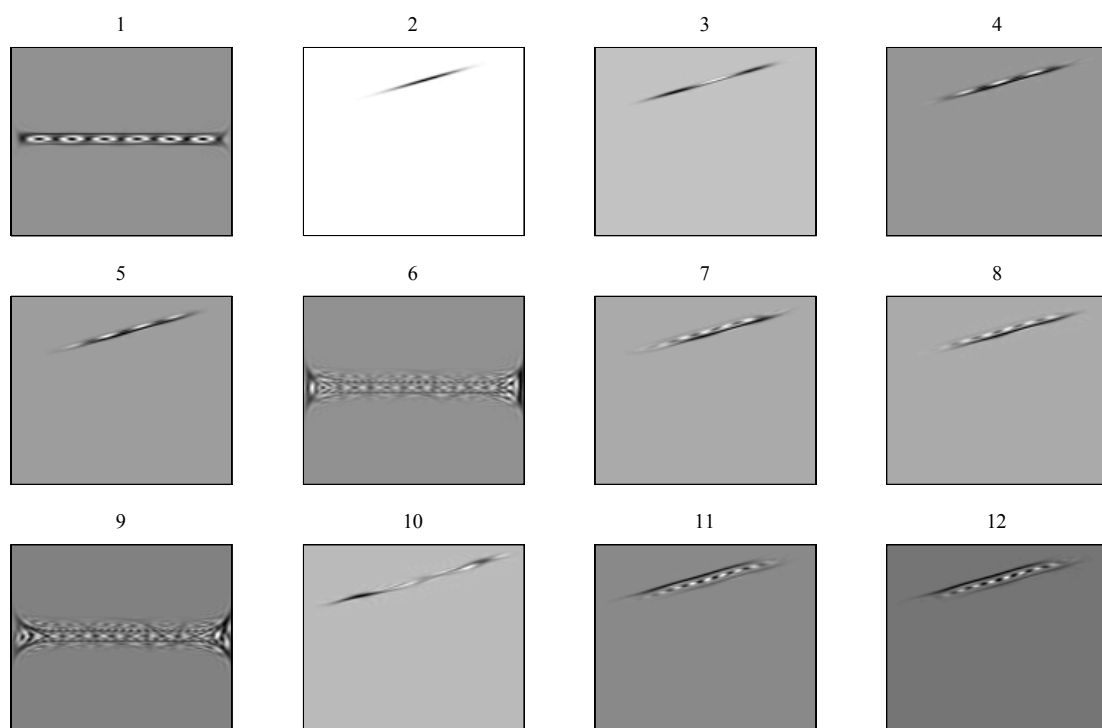


Slika 4.7: Vremensko-frekvencijske reprezentacije sopstvenih vektora

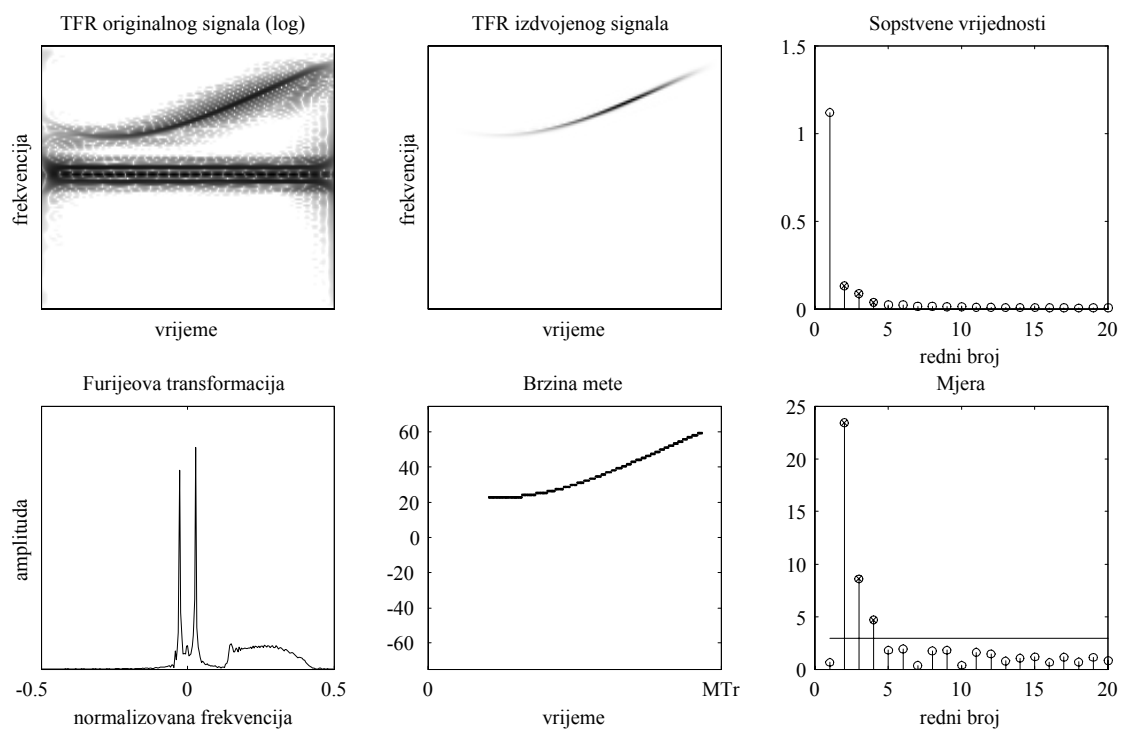




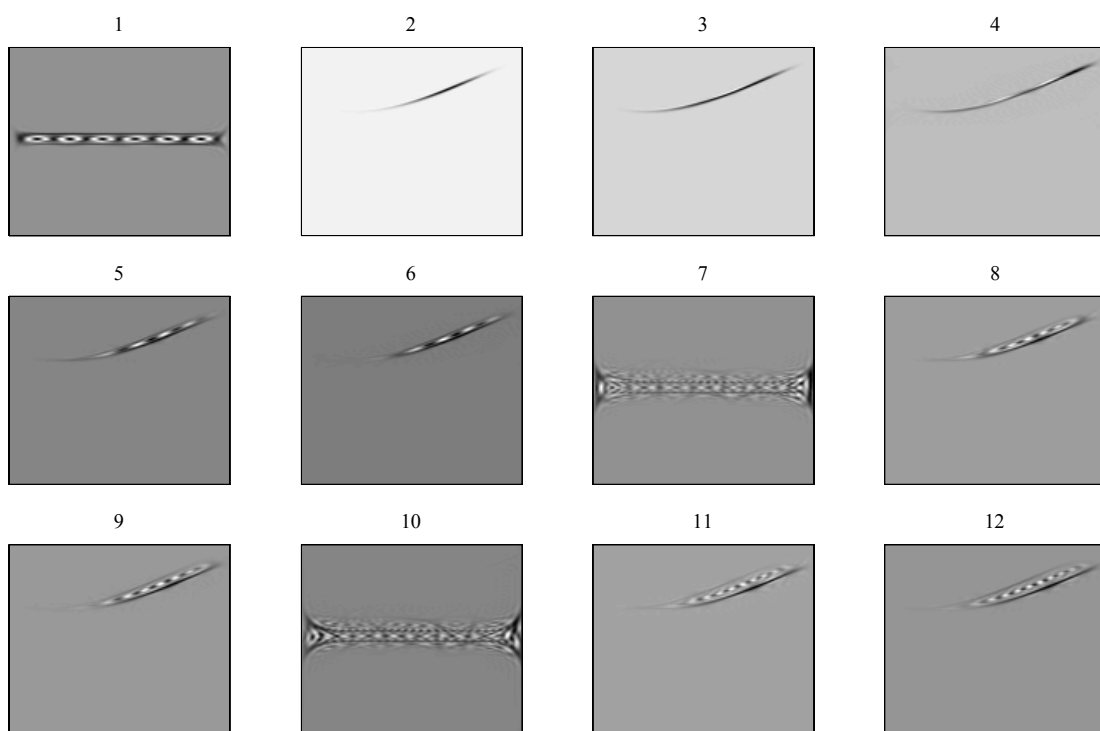
Slika 4.8: Dekompozicija simuliranog radarskog signala u drugom slučaju



Slika 4.9: Vremensko-frekvencijske reprezentacije sopstvenih vektora



Slika 4.10: Dekompozicija simuliranog radarskog signala u trećem slučaju



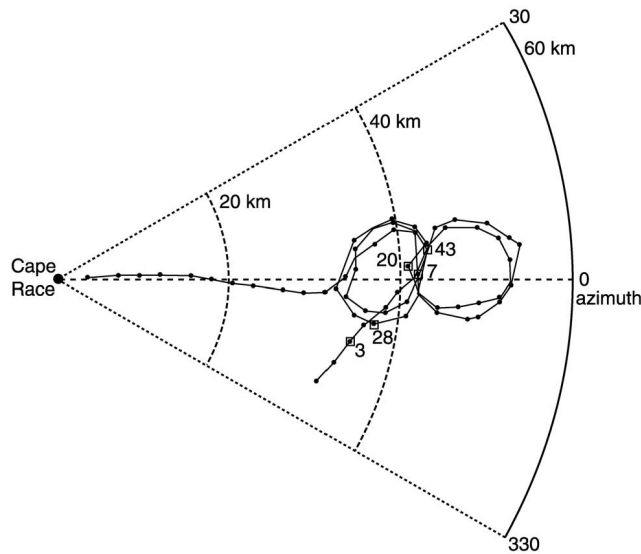
Slika 4.11: Vremensko-frekvencijske reprezentacije sopstvenih vektora

## 4.2 Analiza realnih radarskih signala

Realni radarski signali koji će biti analizirani u ovom dijelu dobijeni su eksperimentalno, više detalja o samom eksperimentu može se naći u [57]. Avion King-Air 200 izvodi manevre tokom kojih je praćen sa visoko-frekvencijskim (HF) radarom sa površinskim talasom (HFSSWR), pri čemu je korišćen sistem od 10 prijemnih antena u linearnom nizu. Osnovna frekvencija radara je 5.672MHz a frekvencija ponavljanja impulsa 9.17762 Hz. Svaka opservacija predstavlja blok od 256 impulsa. Tako je ukupno vrijeme integracije (coherent integration time) svakog signala 27.89s. Avion izvodi manevar koji se sastoji od dvije "osmice", ko što je prikazano na slici 4.12. Prečnik krugova koje avion pravi je približno 10km. Prva "osmica" izvedena je na visini od oko 60m a druga na visini od oko 150m. Na slici su tačkama označene pozicije na kojima se avion nalazio u trenucima kada je radar primao. Ima ukupno 69 takvih pozicija. Signali se međusobno razlikuju, pri čemu njihove karakteristike prvenstveno zavise od toga koja je bila relativna brzina aviona u odnosu na radar u posmatranom trenutku i da li se ta brzina značajno mijenjala tokom ukupnog vremena integracije signala.

Pri analizi posmatranih signala došlo se do zaključka da se pojavljuju tri specifične situacije

1. Kada su signal mete i signal smetnji dovoljno odvojeni u vremensko-frekvencijskoj ravni, tada će biti moguće da u procesu dekompozicije prvi sopstveni vektor predstavlja signal smetnji (jer je u svakom slučaju to signal veće energije), a drugi sopstveni vektor signal mete (slabiji signal). Ostale sopstvene vrijednosti će biti veoma bliske nuli, i mogu predstavljati signale slučajnog šuma koji se ne nalazi u zoni signala mete, kao ni u zoni signala smetnji.
2. Drugi slučaj nastupa kada je signal mete jako slab signal i kada vrijednost  $L$  nije dovoljno velika da čitav signal smetnji bude integrisan do Wignerove distribucije. U ovom slučaju signal smetnji je sadržan u nekoliko sopstvenih vektora i čak i jako slaba komponenta signala smetnji može biti jača od signala mete. Signal mete (ili njegov najznačajniji dio ukoliko izabrana vrijednost  $L$  nije dovela do njegove potpune integracije u Wignerovu distribuciju) se u ovom slučaju ne dobija na mjestu drugog sopstvenog vektora, ali se može pronaći ukoliko analiziramo preostale



Slika 4.12: Posmatrana putanja aviona King-Air 200 kao funkcija udaljenosti (km) i azimuta

sopstvene vektore. U ovom slučaju je neophodno definisati kriterijum kojim ćemo odvojiti rezidualne sopstvene vektore signala smetnji. Rezidualni sopstveni vektori su sopstveni vektori koji odgovaraju signalu smetnji, izuzev najjačeg po energiji.

3. Treći slučaj uključuje situacije u kojima je signal mete jako blizu signalu smetnji, ili čak prolazi kroz njega, kao i situacije kada signal mete zauzima jako širok frekvencijski opseg, tako da njegova potpuna integracija do Wignerove distribucije nije moguća. U ovim situacijama i signal mete može biti sadržan u više sopstvenih vektora tako da kriterijum koji odvaja rezidualne komponente signala smetnji, primijenjen u prethodnom slučaju, treba biti proširen tako da ne traži jedan sopstveni vektor koji odgovara signalu mete već više njih.

#### 4.2.1 Kriterijumi izbora sopstvenih vektora

Posmatranjem analiziranih signala može se zaključiti da signal mete možemo predstaviti jednim frekvencijski modulisanim signalom koji se pažljivim odabirom vremensko-frekvencijske reprezentacije može dobro koncentrisati u vremensko-frekvencijskoj ravni. Sa druge strane, signal smetnji je u svakom slučaju signal koji zauzima dosta širok frekvencijski opseg, tako da su rezidualni sopstveni

vektori signala smetnji slabo koncentrisani signali. Iz tog razloga možemo koristiti mjeru koncentracije vremensko-frekvencijske reprezentacije [13, 21, 22, 41, 51] kao kriterijum za pronalaženje sopstvenog vektora (ili sopstvenih vektora) koji odgovaraju signalu mete. Jedan od načina za mjerenje koncentracije je da poredimo odnos maksimalne vrijednosti vremensko-frekvencijske reprezentacije sa sumom svih vrijednosti. Očigledno će za dobro koncentrisane signale ovaj kriterijum dati veću vrijednost nego za slabo koncentrisane. Analitički možemo ovaj kriterijum zapisati kao:

$$C_{rit}(p) = \frac{(N+1) \max_{n,k} \{TFR_{u_p}(n,k)\}}{\sum_{k=-N/2}^{N/2} \sum_{n=-N/2}^{N/2} |TFR_{u_p}(n,k)|} \quad (4.30)$$

gdje je sa  $TFR_{u_p}$  označena vremensko-frekvencijska reprezentacija sopstvenog vektora  $u_p$ . U svim posmatranim slučajevima ta reprezentacija je S-metod. Empirijskom analizom rezultata dobijenih ovim kriterijumom došlo se do zaključka da se on može popraviti tako da u računanju sume u imeniocu uzmemo samo negativne vrijednosti reprezentacije:

$$C_{rit}^-(p) = \frac{(N+1) \max_{n,k} \{TFR_{u_p}(n,k)\}}{2 \sum_{k=-N/2}^{N/2} \sum_{n=-N/2}^{N/2} |TFR_{u_p}^-(n,k)|} \quad (4.31)$$

Najjednostavniji način određivanja sopstvenog vektora koji odgovara signalu mete je pronalaženje sopstvenog vektora sa indeksom  $p_{\max}$  koji maksimizuje korišćeni kriterijum i proglašavanje tog sopstvenog vektora za signal mete.

$$\mathbf{f}_{mete}(n) = \mathbf{u}_{p_{\max}}(n).$$

Ovaj pristup daje dobre rezultate u velikom broju posmatranih slučajeva, pri čemu treba napomenuti da je u svim slučajevima prvi sopstveni vektor isključen iz analize jer on predstavlja dominantnu komponentu signala smetnji.

Osnovna mana ovakvog pristupa je što ne dozvoljava mogućnost da signal mete bude sadržan u više od jednog sopstvenog vektora, tako da će se u takvim slučajevima dobiti samo dio signala mete (najbolje koncentrisan dio). Ovaj problem rješava se uvođenjem praga  $P$  i proglašavanjem svih komponenti kod kojih je kriterijum veći od  $P$  za komponente signala mete. Pri određivanju praga  $P$  jednostavna analiza ponašanja funkcije kriterijuma u ekstremnim slučajevima daje granice za njegove vrijednosti. Tako ako imamo maksimalno koncentrisan signal (samo jedan odbirak u vremensko-frekvencijskoj ravni je različit od nule), tada je kriterijum (4.30) jednak

$N + 1$ . U suprotnom slučaju kada je signal ravnomjerno raspodijeljen po čitavoj vremensko-frekvencijskoj ravni, kriterijum (4.30) jednak je  $1/(N + 1)$ . Dobra polazna vrijednost za odabir praga  $P$  je veličina bliska jedinici. Dakle, sopstvene vektore razdvajamo na one koji predstavljaju rezidualne komponente smetnje i komponente signala funkcijom izbora:

$$H(i) = \begin{cases} 1 & \text{za } C_{rit}(i) > P \quad \mathbf{u}_i(n) \text{ je komponenta signala mete} \\ 0 & \text{za } C_{rit}(i) \leq P \quad \mathbf{u}_i(n) \text{ nije komponenta signala mete} \end{cases}. \quad (4.32)$$

Sada možemo formirati signal mete kao zbir:

$$\mathbf{f}_{mete}(n) = \sum_{\substack{k \\ H(k)=1}} \sqrt{\lambda_k} \mathbf{u}_k(n) e^{j\varphi_k} \quad (4.33)$$

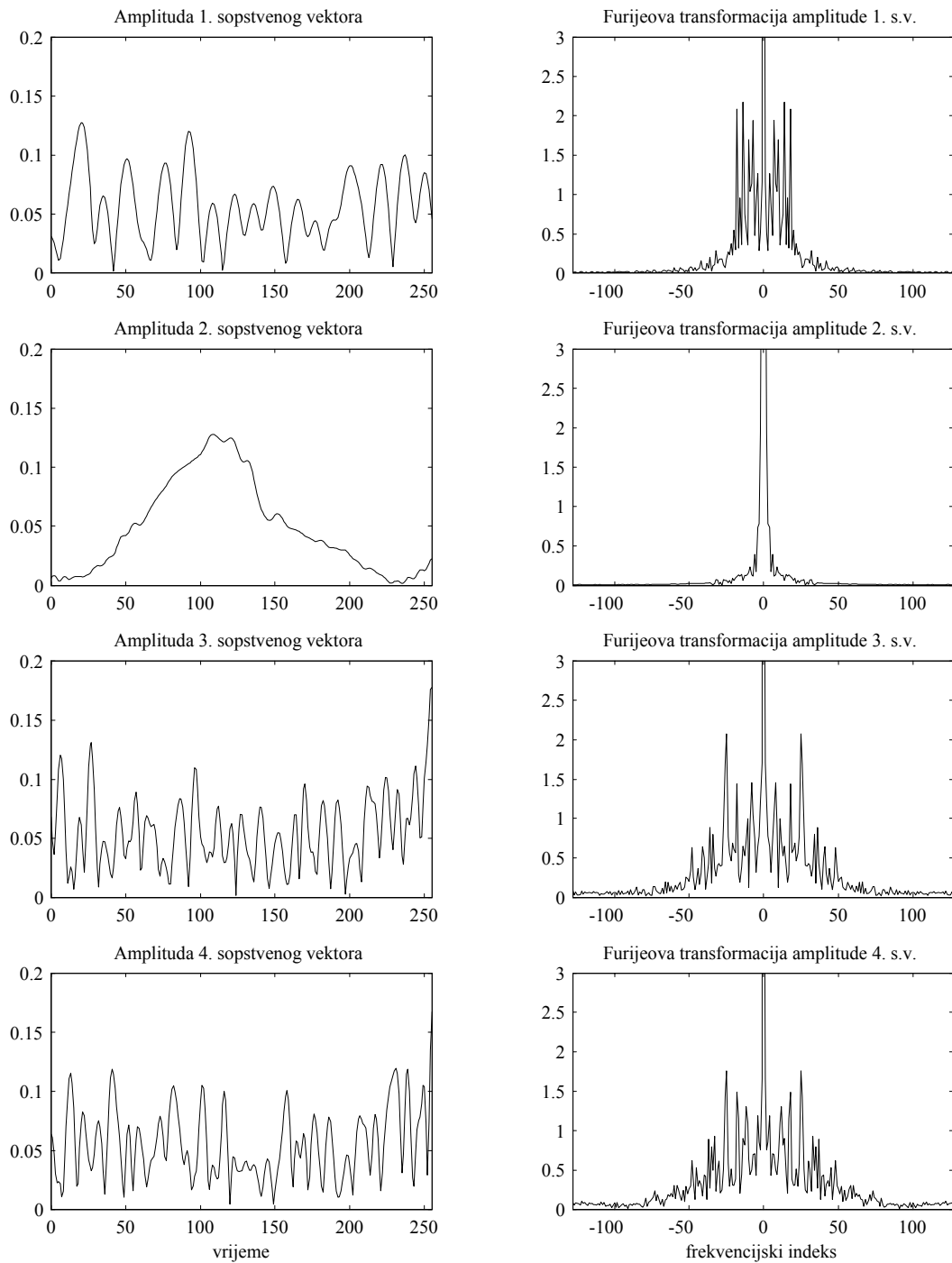
pri čemu svaka komponenta ima nepoznatu faznu konstantu  $\varphi_k$ . Fazne konstante  $\varphi_k$  mogu biti izostavljene (odnosno svedene na nulu), pri čemu gubimo informacije o fazi signala ali je amplituda signala sačuvana, jer kada je signal mete podijeljen u više komponenti, te komponente ne zauzimaju iste djelove u vremensko-frekvencijskoj ravni. S obzirom na prirodu signala mete koji je u svakom trenutku prisutan samo na jednoj trenutnoj frekvenciji, to znači da su odabrane komponente u (4.33) razdvojene u vremenskom domenu, tako da izostavljanje faznih konstanti neće uticati na trenutnu snagu dobijenog signala  $|\mathbf{f}_{mete}(n)|^2$ .

Drugi način rješavanja problema sa nepoznatim faznim konstantama je da formiramo vremensko-frekvencijsku reprezentaciju signala mete, tako što ćemo sabrati vremensko-frekvencijske reprezentacije sopstvenih vektora koji predstavljaju signal mete:

$$TFR_{mete}(n, k) = \sum_{\substack{k \\ H(k)=1}} g(\lambda_k) SM_k(n, k) \quad (4.34)$$

Ovdje je  $g(\lambda)$  funkcija sopstvenih vrijednosti, pri čemu je  $g(\lambda) = \lambda$  logičan izbor koji čuva energiju pojedinih djelova signala mete. Ako je cilj naše analize određivanje trenutne frekvencije signala i dobijanje položaja u vremensko-frekvencijskoj ravni, tada možemo odabrati i  $g(\lambda) = 1$ , kada sve komponente signala mete posmatramo ravnopravno. Naravno, izbor funkcije  $g(\lambda)$  nije ograničen na ove dvije mogućnosti.

Kriterijum za donošenje odluke da li sopstveni vektor sadrži signal mete može se definisati i na alternativni način. Naime, ukoliko se meta kreće u odnosu na radar, tada se



Slika 4.13: Amplitude i Furijeove transformacije amplitude četiri sopstvena vektora u dekompoziciji realnog radarskog signala (mjerenje broj 31). Drugi sopstveni vektor sadrži signal mete.

amplituda reflektovanog signala mete posmatranog na jednoj udaljenosti mijenja, jer meta ulazi i izlazi iz posmatranog opsega udaljenosti. Ukoliko se posmatra envelope  $|\mathbf{u}_p(n)|$  sopstvenih vektora kod realnih radarskih signala, može se zaključiti da je kod sopstvenih vektora koji sadrže signal mete ona glatka, sporopromjenljiva funkcija. U slučaju da sopstveni vektor  $\mathbf{u}_p(n)$  ne sadrži signal mete, njegova envelope se brzo mijenja sa indeksom  $n$ . Označimo amplitudu Furijeove transformacije envelope sopstvenog vektora sa  $A_{up}(k) = |DFT[\mathbf{u}_p(n)]|$ , i zanemarimo jednosmjernu komponentu ( $k = 0$ ). U slučaju signala mete, glavni dio funkcije  $A_{up}(k)$  nalazi se na malim frekvencijskim indeksima ( $k = \pm 1, k = \pm 2$ ), dok kod signala smetnji značajan doprinos daju veći indeksi  $k$ . Koristeći se navedenom analizom može se definisati kriterijum kao:

$$C_{rit2}(p) = \frac{\sum_{k=1}^{K_1} A_{up}(k)^2}{\sum_{k=1}^{N/2} A_{up}(k)^2} \quad (4.35)$$

gdje je  $K_1 = 2$  ili  $K_1 = 3$ . S obzirom da je  $A_{up}(k)$  diskretna Furijeova transformacija realnog signala, dovoljno ju je posmatrati samo za pozitivne frekvencijske indekse.

Ovako definisan kriterijum uzima vrijednosti od 0 do 1, pri čemu vrijednosti bliske jedinici ukazuju na signal mete. U ovom slučaju je, takođe potrebno definisati referentni nivo  $P_2$ , pri čemu se kao dobar izbor u analizi realnih radarskih signala pokazao  $P_2 = 0.6$ . Na slici 4.13 demonstrirana je primjena navedenog kriterijuma u dekompoziciji realnih radarskih signala. Drugi sopstveni vektor sadrži signal mete, i njegova amplituda značajno odstupa od amplituda ostalih sopstvenih vektora (na slici su pored drugog prikazani i prvi, treći i četvrti sopstveni vektor). Karakterističan oblik amplitude signala mete se detektuje na osnovu Furijeove transformacije amplituda sopstvenih vektora prikazanih na slici.

## 4.2.2 Primijenjeni algoritam

U procesu dekompozicije signala i odvajanja signala mete (signal reflektovan od aviona) od signala smetnje primijenjen je sledeći algoritam:

Korak 1. Izračunava se kratkotrajna Furijeova transformacija signala preodabranog sa faktorom 2, korišćenjem pravougaonog prozora, pri čemu se signal na početku i kraju nadopunjava potrebnim brojem nula.

Korak 2. Izračunava se S-metod za dato  $L$ , pri čemu je u ovom slučaju uzeta vrijednost  $L = 24$ .



Korak 3. Izračunava se matrica  $\mathbf{R}$  u skladu sa (3.34). Necijeli indeksi su izbjegnuti uzimanjem samo parnih vrsta i kolona matrice S-metoda.

Korak 4. Vršiti se dekompozicija matrice  $\mathbf{R}$  na sopstvene vektore i sopstvene brojeve.

Korak 5. Računa se S-method sopstvenih vektora, pri čemu se u računanju kratkotrajne Furijeove transformacije koristi Hanningov prozor dužine 128 odbiraka.

Korak 6. Za svaku vremensko-frekvencijsku reprezentaciju dobijenu u prethodnom koraku računa se mjera (4.31). Ukoliko je mjera veća od 3, smatra se da analizirani sopstveni vektor sadrži signal mete. Vremensko-frekvencijske reprezentacije takvih sopstvenih vektora se sabiraju sa odgovarajućim težinskim faktorima u skladu sa (4.33) i (4.34). Ukoliko nijedna od mjera ne prelazi vrijednost 3, zaključujemo da signal mete nije detektovan i ponavljamo analizu (korake 1-6) sa manjom vrijednošću  $L$ .

Korak 7. Prikazuje se vremensko-frekvencijska reprezentacija signala mete i određuje brzina mete.

Signal je preodabran sa faktorom 2, tako da se od inicijalnih 256 odbiraka dobilo 512 odbiraka. Dalje je izračunat S-metod posmatranog signala sa 1024 odbirka po frekvencijskoj osi. Centralni dio matrice S-metoda je ekvivalentan Wignerovoj distribuciji. Treba uočiti da je frekvencijski opseg kod S-metoda, kao i kod Furijeove transformacije,  $(-f_s/2, f_s/2)$ , a u slučaju Wignerove distribucije  $(-f_s/4, f_s/4)$ , gdje je  $f_s$  frekvencija odabiranja. To je razlog što je vršeno preodabiranje signala i korišćen dvostruko veći broj tačaka po frekvencijskoj osi, jer se nakon izdvajanja centralnog dijela iz matrice S-metoda dobija matrica dimenzija  $512 \times 512$ . U nastavku analize posmatrani su samo parni odbirci, kako bi se izbjeglo pojavljivanje necijelih indeksa u algoritmu dekompozicije. Na taj način dobijamo matricu  $R_{SM}$  reda  $N + 1 = 256$ , čiji sopstveni vektori imaju istu dužinu kao i polazni signal (256 odbiraka). Analizirano je 36 sopstvenih vektora, sa najvećim sopstvenim vrijednostima. Prvi sopstveni vektor odgovara sopstvenoj vrijednosti čija je apsolutna vrijednost maksimalna.

S-metod sa  $L = 8$  je korišćen za prikaz vremensko-frekvencijskih reprezentacija sopstvenih vektora, pri čemu je kod računanja kratkotrajne Furijeove transformacije primijenjen Hanning-ov prozor dužine 128 odbiraka. Ovi parametri su korišćeni samo u postupku prezentacije rezultata tako da nijesu vezani za proces dekompozicije.

U primjerima su date i procjene brzine kretanja mete estimirane pomoću trenutne

frekvencije detektovanog signala.

Navedeni algoritam je primijenjen u svih 69 slučajeva. Signal mete je detektovan i izdvojen u svim slučajevima. U četiri analizirana slučaja signal mete nije detektovan sa  $L = 24$ . U sva četiri slučaja signal je detektovan pri ponavljanju postupka sa manjim  $L$ , kao što je navedeno u koraku 6.

### 4.2.3 Rezultati

U nastavku je prezentovan dio rezultata primjene algoritma dekompozicije na realne radarske signale, odnosno karakteristični slučajevi:

- Stacionarni signal mete (avion se kreće konstantnom brzinom u odnosu na radar). Rezultat je prikazan na slici 4.14, dok je na slici 4.15 prikazana vremensko-frekvencijska reprezentacija sopstvenih vektora.
- Nestacionarni signal mete udaljen od signala smetnje, slike 4.16 i 4.18 kao i vremensko-frekvencijske reprezentacije sopstvenih vektora, slike 4.17 i 4.19.
- Jako nestacionarni signal mete, slike 4.20 i 4.21.
- Nestacionarni signal mete blizak signalu smetnje, slike 4.22 i 4.23.
- Nestacionarni signal mete koji prolazi kroz signal smetnje, slika 4.24 i 4.25.

Na slikama: 4.14, 4.16, 4.18, 4.20, 4.22 i 4.24 prikazana je:

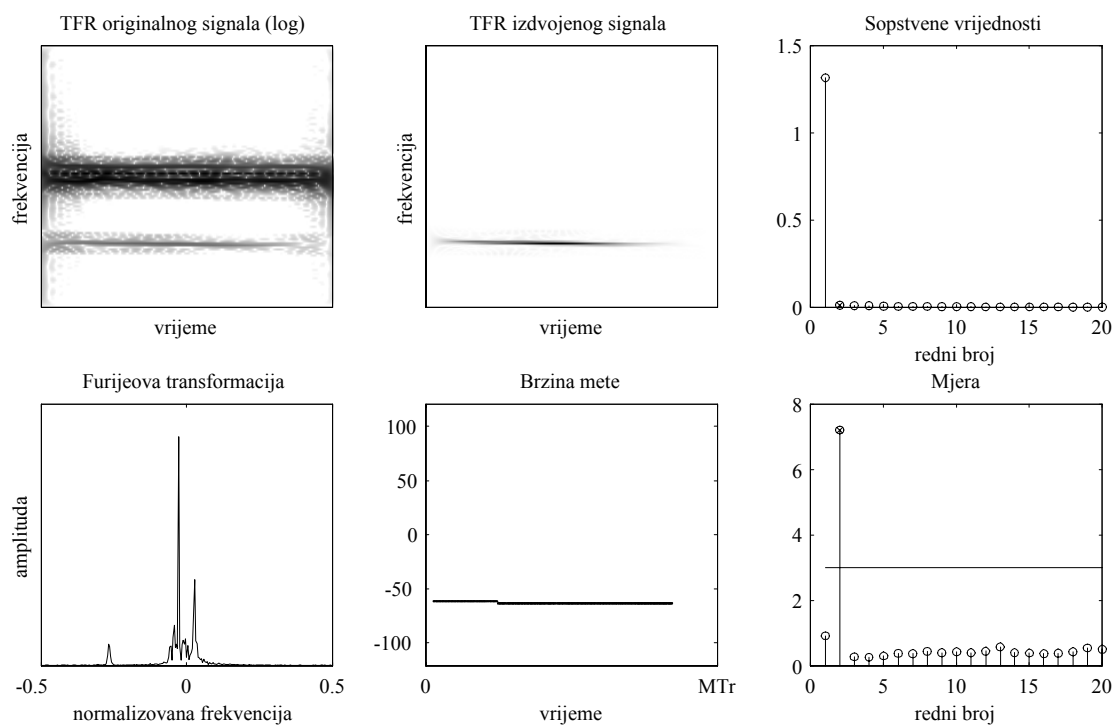
- Vremensko-frekvencijska reprezentacija originalnog signala (sa smetnjom) u logaritamskoj skali, jer je signal smetnje mnogo jači od signala mete.
- Vremensko-frekvencijska reprezentacija detektovanog signala mete.
- Vrijednosti sopstvenih vektora, pri čemu su sa  $\otimes$  označene sopstvene vrijednosti vektora kod kojih je utvrđeno da pripadaju signalu mete.
- Amplituda Furijeove transformacije originalnog signala.
- Brzina mete estimirana na osnovu trenutne frekvencije detektovanog signala mete.

- Mjera (kriterijum) kojom se utvrđuje da li sopstveni vektor sadrži signal mete (horizontalna linija predstavlja prag odluke)

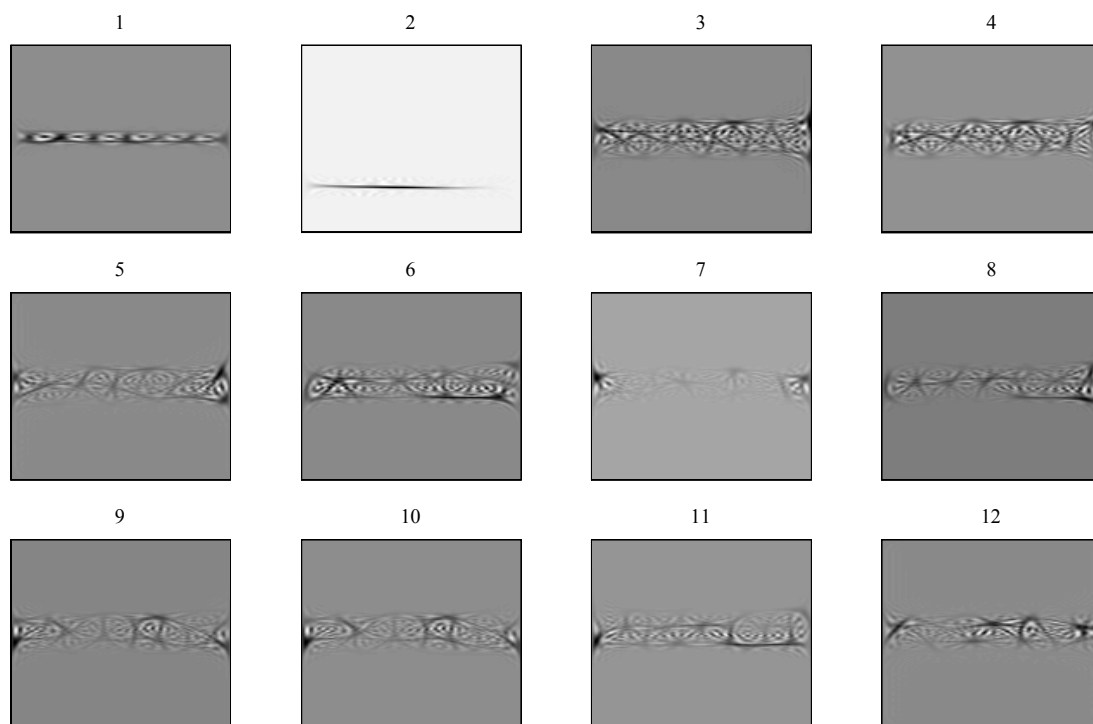
U svim slučajevima je posmatrano 20 sopstvenih vektora (sa najvećim sopstvenim vrijednostima). Na slikama 4.17, 4.19, 4.21, 4.23 i 4.25 su prikazane vremensko-frekvencijske reprezentacije 12 najznačajnijih sopstvenih vektora. Kao vremensko-frekvencijska reprezentacija je i u ovom slučaju korišćen S-metod.

Detekcija je uspješno izvršena sa vrijednošću parametra  $L = 24$ , osim u slučajevima signala broj 7 i 20, kod kojih se algoritam morao ponavljati sa manjim vrijednostima  $L$  i za  $L = 7$  odnosno 18 postignuta je detekcija signala mete. Kod mjerenja 3, 31, 43 i 7 jedan sopstveni vektor definiše signal mete, dok se u slučajevima mjerenja 53 i 20 signal mete nalazi u dva sopstvena vektora.

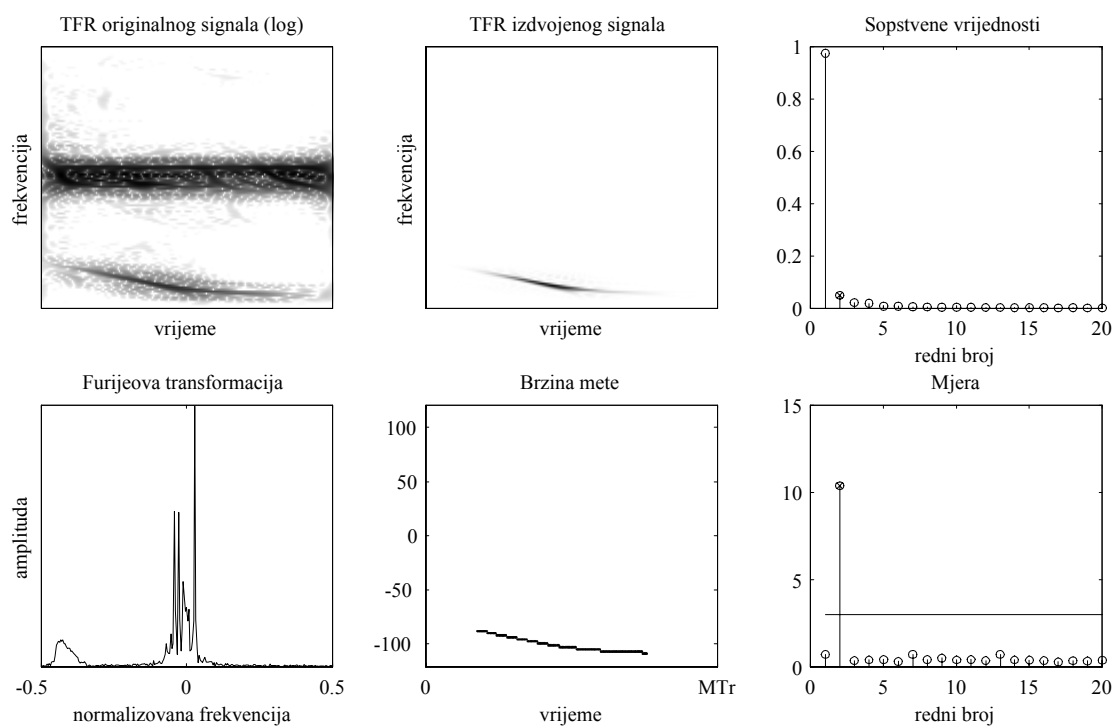
Na slikama 4.26 i 4.27 demonstrirana je primjena alternativnog kriterijuma (4.35) u odabiru sopstvenih vektora koji predstavljaju signal mete za slučaj mjerenja broj 31 i 53. U oba posmatrana slučaja, alternativni kriterijum je kvalitetno odvojio sopstvene vektore signala mete od sopstvenih vektora signala smetnji.



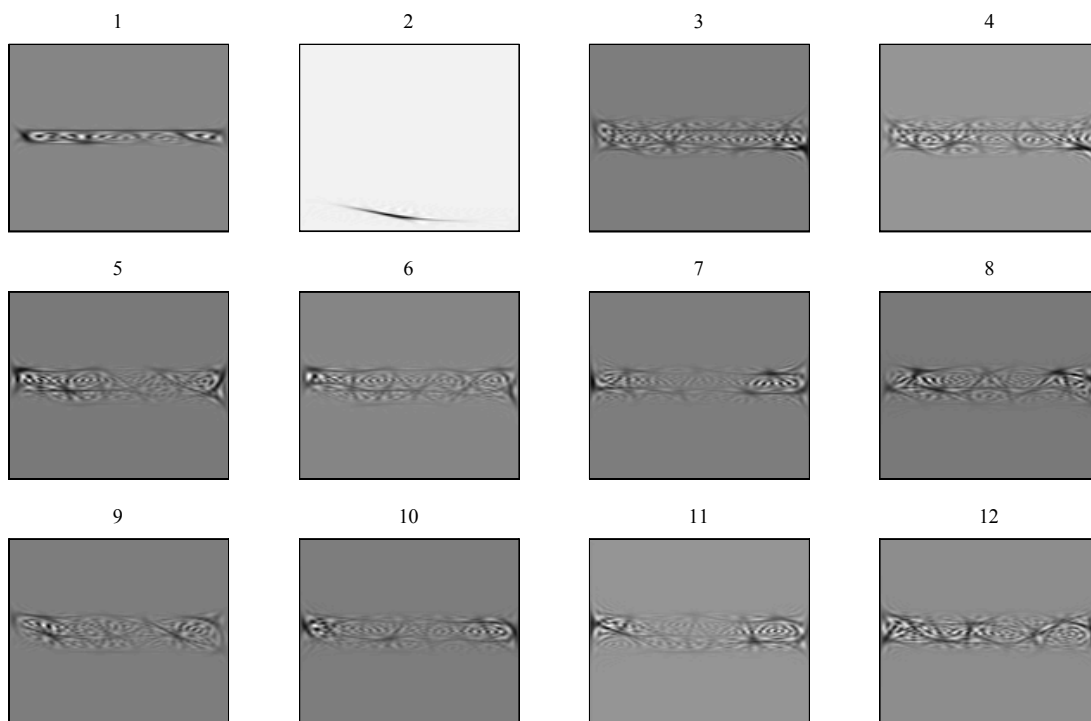
Slika 4.14: Dekompozicija realnog radarskog signala, mjerenje broj 3.



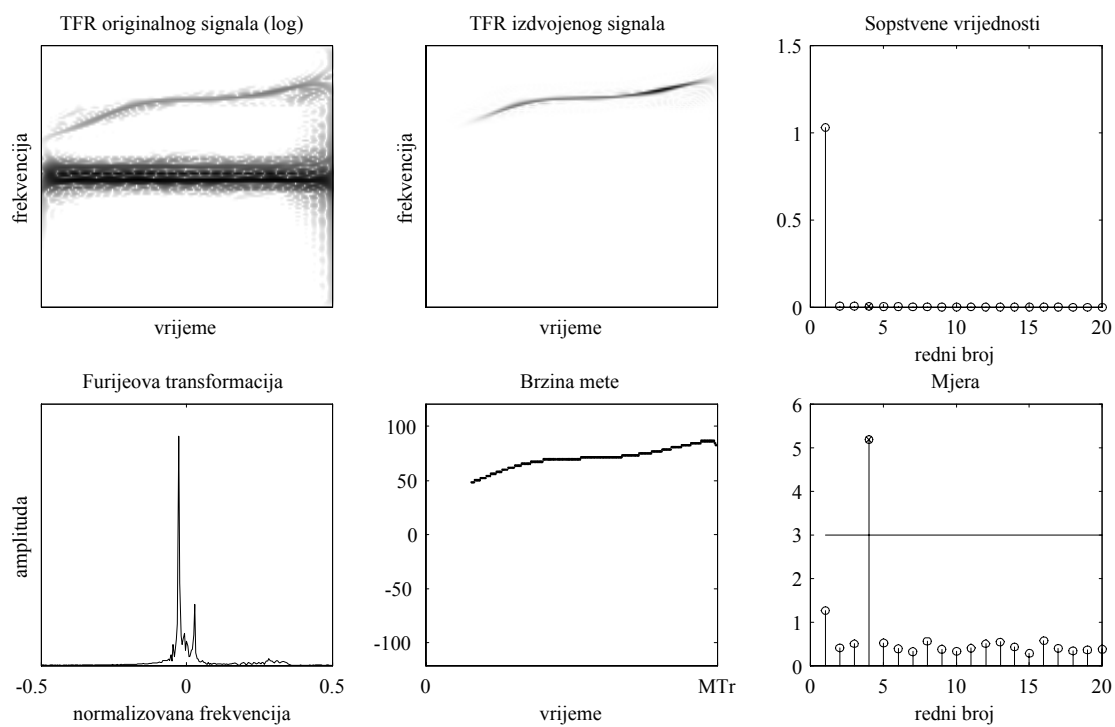
Slika 4.15: Vremensko-frekvencijske reprezentacije sopstvenih vektora za mjerenje broj 3.



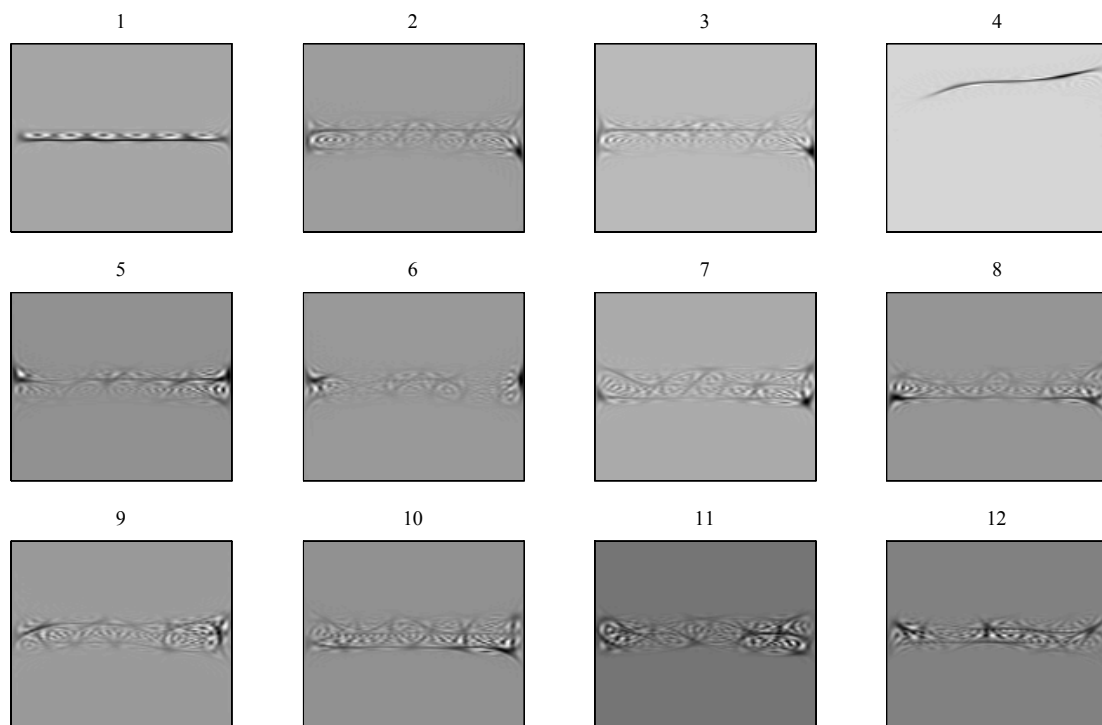
Slika 4.16: Dekompozicija realnog radarskog signala, mjerenje broj 31.



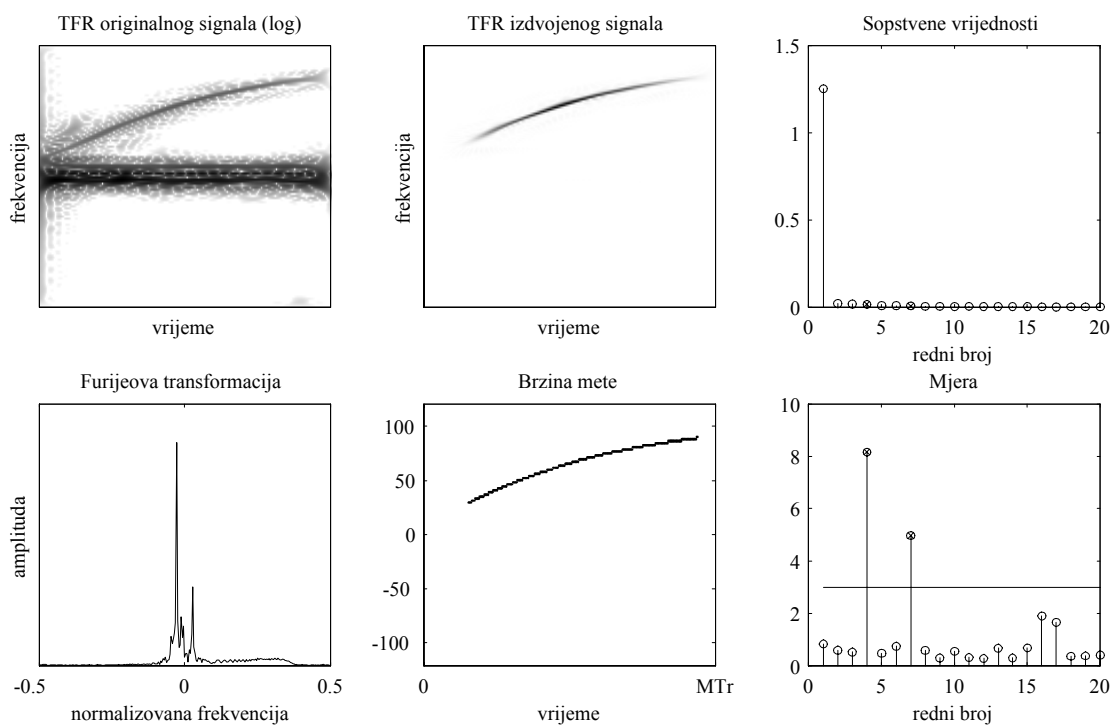
Slika 4.17: Vremensko-frekvencijske reprezentacije sopstvenih vektora za mjerenje broj 31.



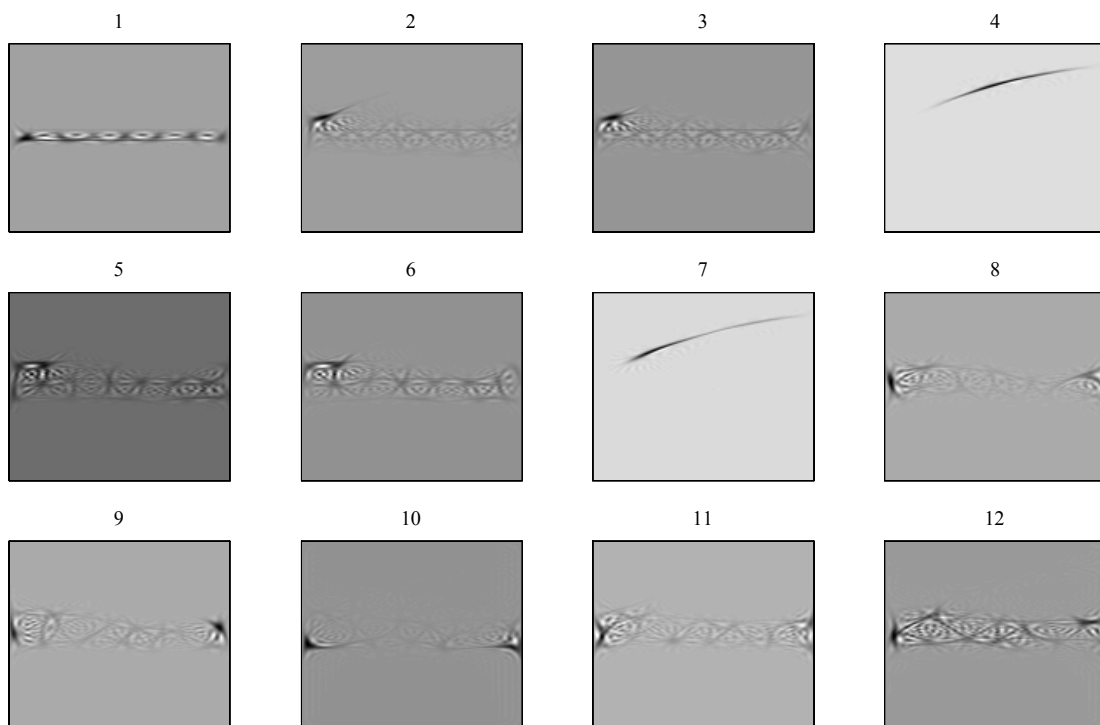
Slika 4.18: Dekompozicija realnog radarskog signala, mjerenje broj 43.



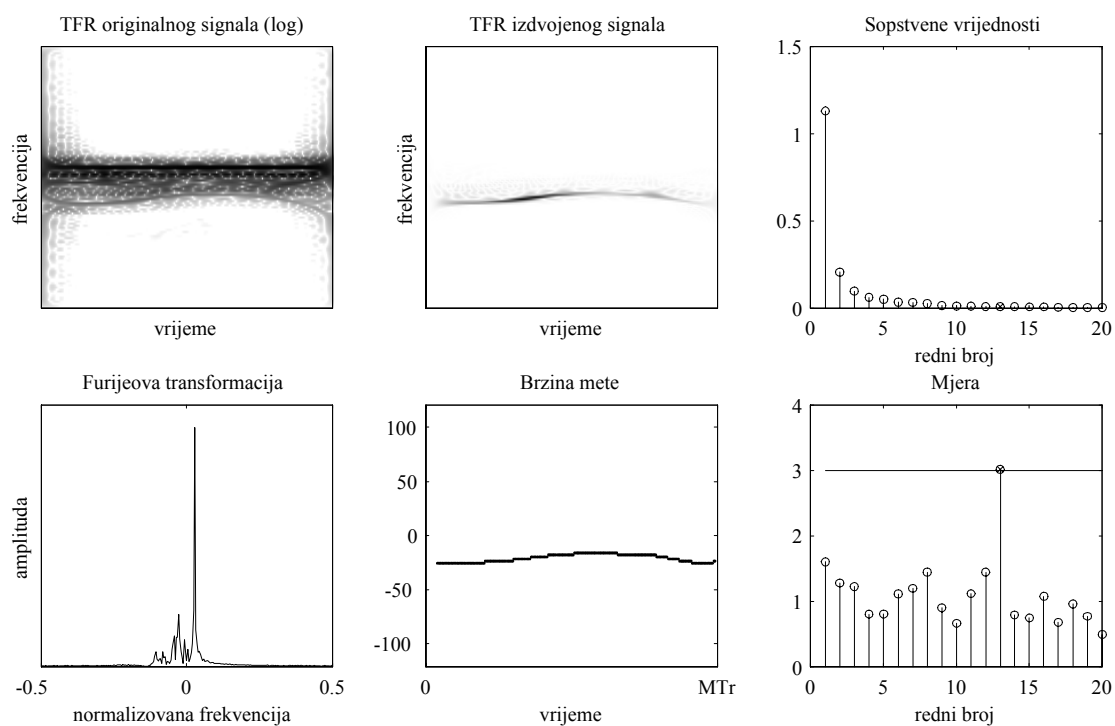
Slika 4.19: Vremensko-frekvencijske reprezentacije sopstvenih vektora za mjerenje broj 43.



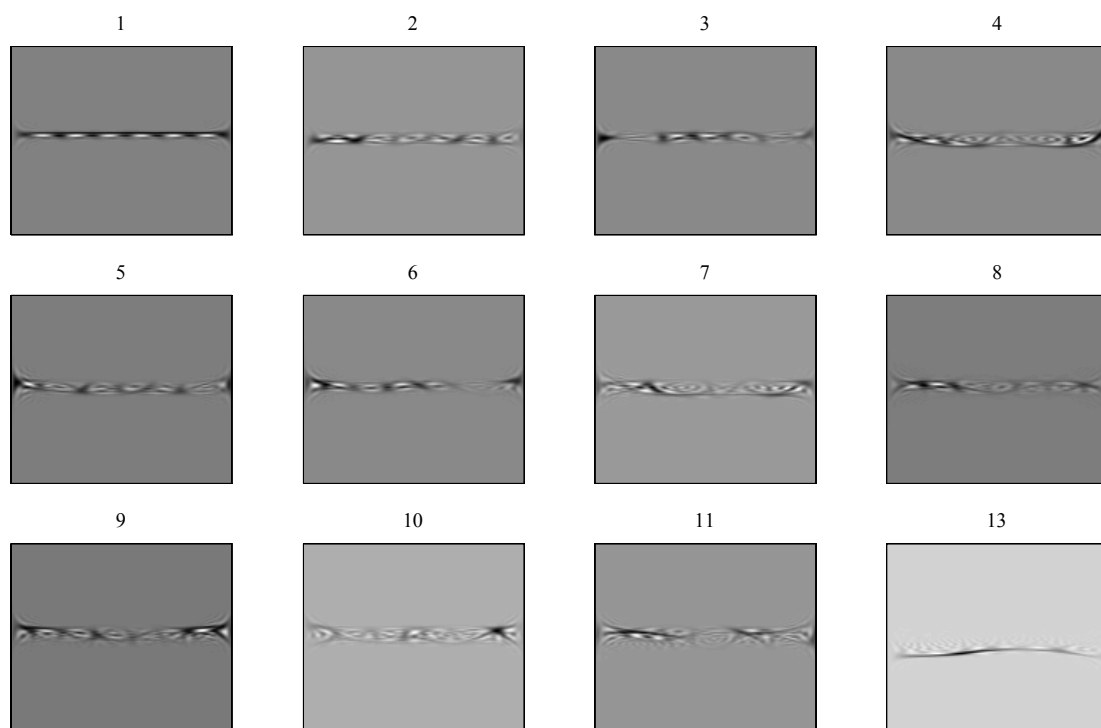
Slika 4.20: Dekompozicija realnog radarskog signala, mjerenje broj 53.



Slika 4.21: Vremensko-frekvencijske reprezentacije sopstvenih vektora za mjerenje broj 53.

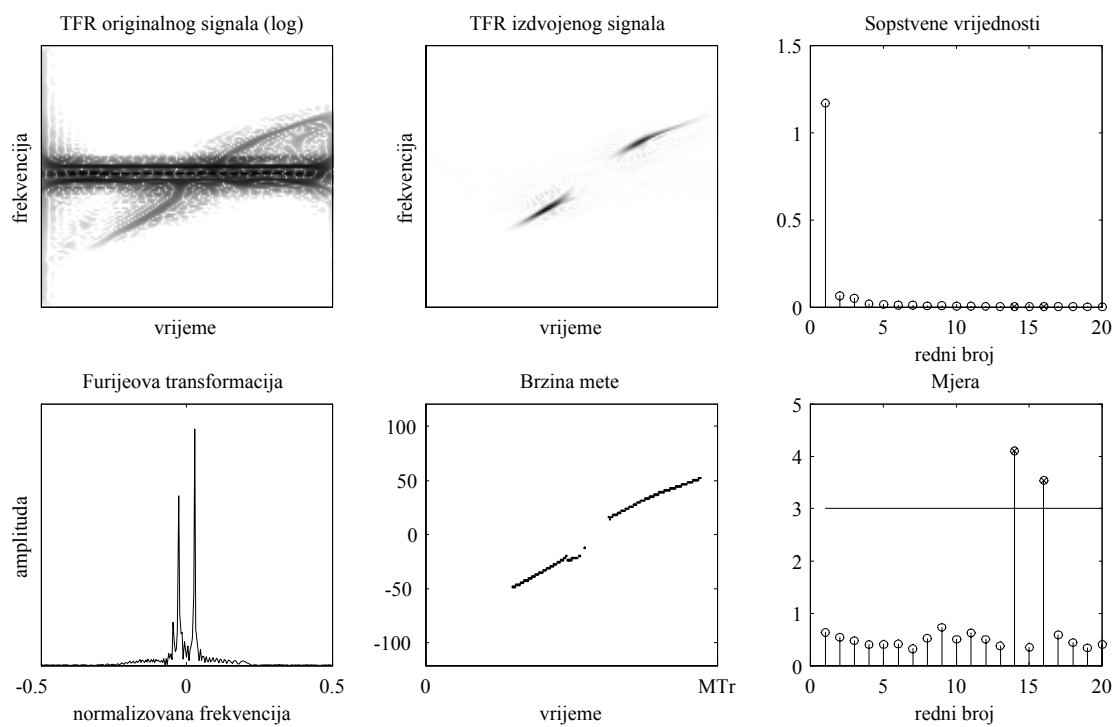


Slika 4.22: Dekompozicija realnog radarskog signala, mjerenje broj 7.

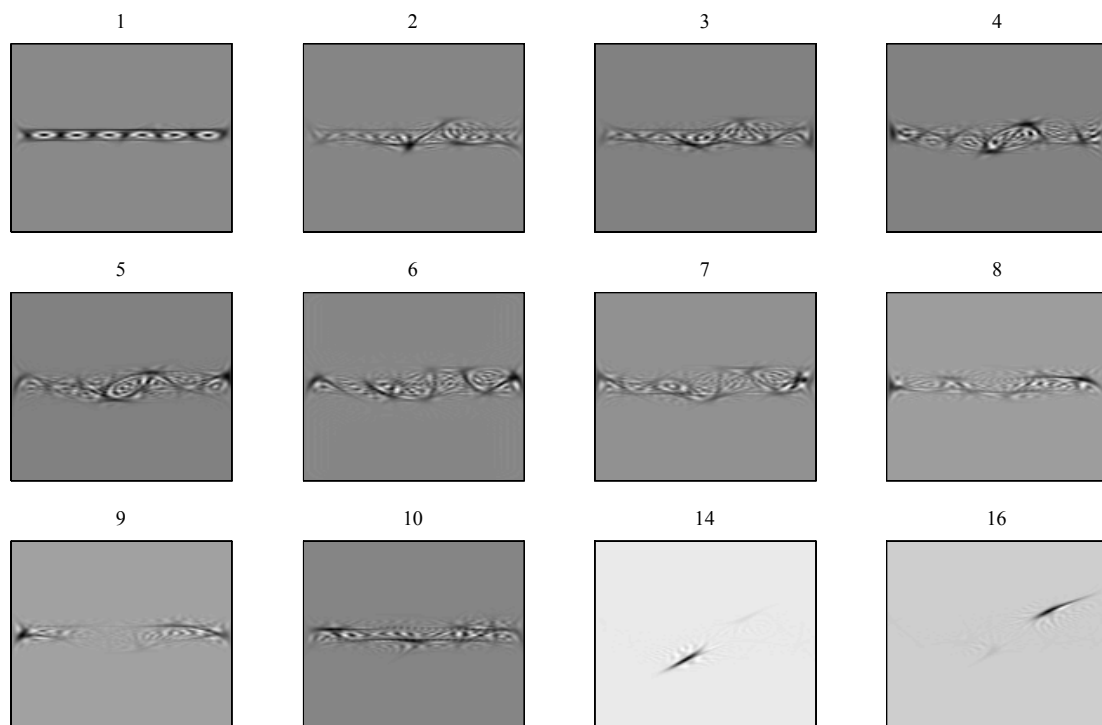


Slika 4.23: Vremensko-frekvencijske reprezentacije sopstvenih vektora za mjerenje broj 7.

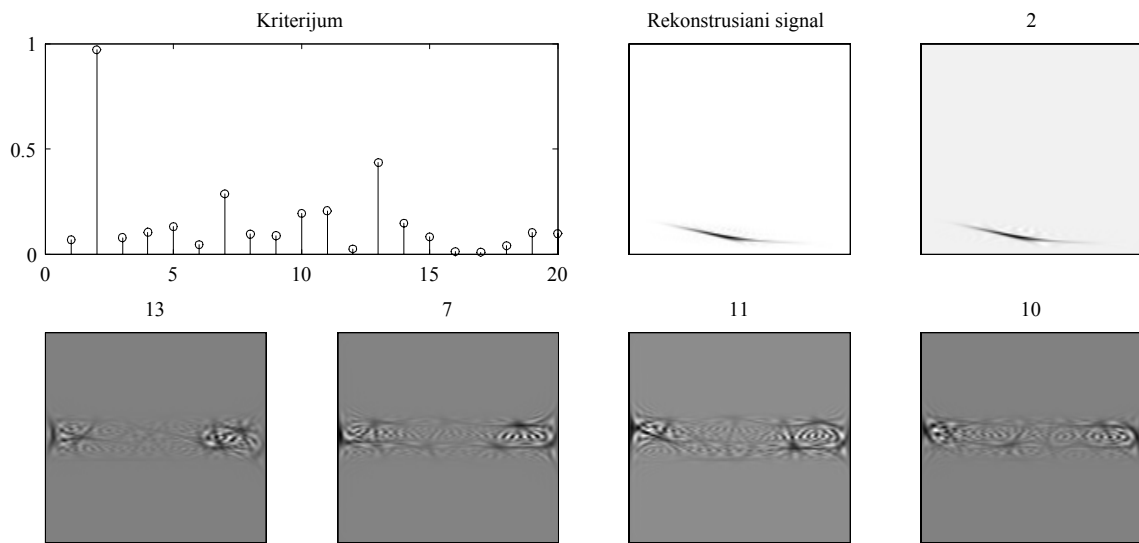




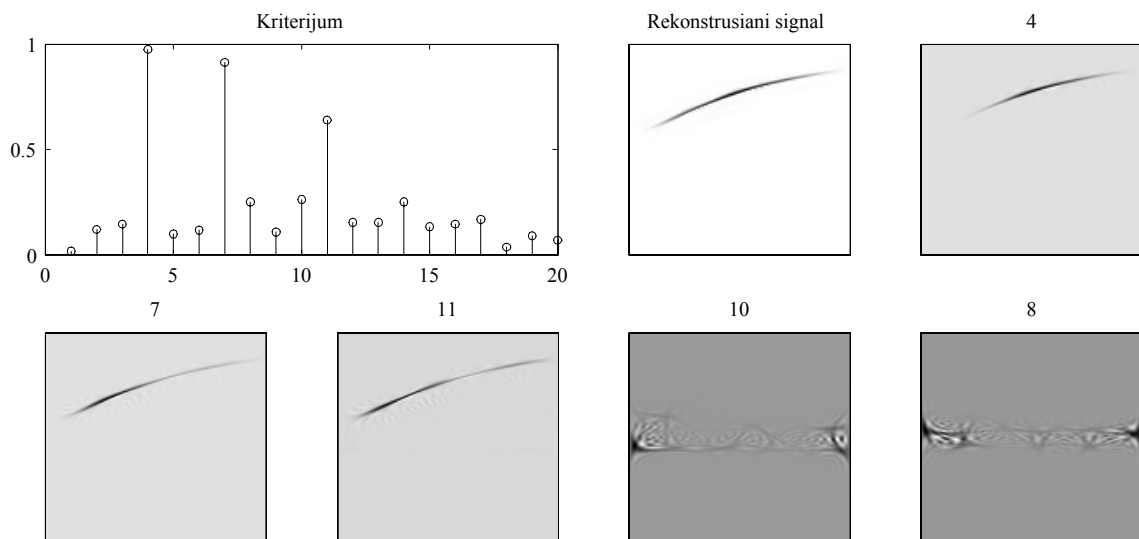
Slika 4.24: Dekompozicija realnog radarskog signala, mjerenje broj 20.



Slika 4.25: Vremensko-frekvencijske reprezentacije sopstvenih vektora za mjerenje broj 20.



Slika 4.26: Primjena alternativnog kriterijuma u odabiru sopstvenih vektora koji sadrže signal mete za mjerenje broj 31. Prikazane su vrijednosti kriterijuma, Rekonstruisana vremensko-frekvencijska reprezentacija signala mete i vremensko-frekvencijske reprezentacije 5 sopstvenih vektora sa najvećim vrijednostima kriterijuma.



Slika 4.27: Primjena alternativnog kriterijuma na mjerenje broj 53.

## 4.3 Detekcija signala mete

Posmatrajmo problem određivanja da li u posmatranom radarskom signalu postoji signal mete. Analiziraćemo metode detekcije navedene u odjeljku 3.4, odnosno detekciju signala mete baziranu na ispitivanju maksimalne vrijednosti Furijeove transformacije i detekciju signala mete zasnovanu na vremensko-frekvencijskoj reprezentaciji posmatranog signala. Pretpostavimo da je brzina mete dovoljno velika tako da se signal mete može odvojiti od signala smetnji (clutter-a) korišćenjem filtra propusnika visokih učestanosti. Signale mete podijelićemo u dvije klase, prema njihovoj trenutnoj frekvenciji, odnosno brzini mete: stacionarni signali, gdje se meta tokom posmatranog vremenskog intervala kreće približno konstantnom brzinom i nestacionarni signali, gdje se promjene brzine mete u posmatranom vremenskom intervalu ne mogu zanemariti.

### 4.3.1 Detekcija stacionarnih signala

Za slučaj stacionarnih signala detekcija zasnovana na maksimumu Furijeove transformacije predstavlja optimalnu detekciju [24]. Posmatrajmo radarski signal dobijen refleksijom od objekata koji se nalaze na jednom opsegu udaljenosti (range-cell). Ovakav signal modeliran je sa (4.9), odnosno u diskretnoj verziji sa (4.15) za jednu vrijednost parametra  $t$  odnosno  $n$ . Označimo sa  $x(n)$  posmatrani signal i njegovu dužinu sa  $N$ . Algoritam za detekciju signala mete u signalu  $x(n)$ , sa konstantnom vjerovatnoćom lažnih alarma (CFAR), primjenom Furijeove transformacije je:

1. Odaberimo vjerovatnoću pogrešne procjene da u signalu postoji signal mete iako ga nije bilo (lažni alarm) i označimo je sa  $P_{FA}$ .
2. Procijenimo varijansu šuma  $\sigma_\epsilon^2$  u posmatranom signalu. Dobri rezultati se mogu dobiti kao [49]:

$$\sigma_\epsilon^2 \approx 1.1 \left( \underset{1 \leq i < N}{\text{median}}(|\text{Re}[x(i) - x(i-1)]|)^2 + \underset{1 \leq i < N}{\text{median}}(|\text{Im}[x(i) - x(i-1)]|)^2 \right) \quad (4.36)$$

3. Na osnovu  $P_{FA}$  i  $\sigma_\epsilon^2$  odredimo nivo praga detekcije, u skladu sa (3.59) kao:

$$R_{FT} = -\ln(P_{FA}/N)N\sigma_\epsilon^2$$

4. Izračunajmo diskretnu Furijeovu transformaciju posmatranog signala  $X(k) = DFT_N[x(n)]$
5. Ukoliko postoji  $k$  takvo da vrijedi  $|X(k)|^2 > R_{FT}$ , tada donosimo odluku da u posmatranom signalu postoji deterministička komponenta, odnosno signal mete.

### 4.3.2 Detekcija nestacionarnih signala

U skladu sa postupkom za detekciju signala vremensko-frekvencijskom analizom, odjeljak 3.4, može se definisati algoritam za detekciju signala primjenom vremensko-frekvencijske analize:

1. Odaberimo vjerovatnoću pogrešne procjene da u signalu postoji signal mete iako ga nije bilo (lažni alarm) i označimo je sa  $P_{FA}$ .
2. Odaberimo vremensko-frekvencijsku reprezentaciju koju ćemo koristiti u postupku detekcije.
3. Za odabranu vremensko-frekvencijsku reprezentaciju odredimo nivo praga detekcije koji će ostvariti odabranu  $P_{FA}$ . Ovdje posmatramo signal koji se sastoji samo od šuma, jedinične varijanse, bez prisustva signala mete. Označimo dobijeni nivo praga sa  $R_L$ . Do nivoa praga dolazimo tako što posmatramo  $N_1$  realizacija šuma i za svaku realizaciju odredimo kriterijum  $J_{\max}$ , prema postupku opisanom u odjeljku 3.4.2. Na tako dobijenom skupu vrijednosti kriterijuma odaberimo nivo  $R_L$  tako da je  $[N_1 \cdot P_{FA}]$  vrijednosti  $J_{\max}$  veće od odabranog nivoa. Na taj način ćemo obezbijediti da vjerovatnoća lažnog alarma bude približno  $P_{FA}$ . Ukupan broj realizacija treba zadovoljiti uslov  $N_1 \gg \frac{1}{P_{FA}}$ .
4. Procijenimo varijansu šuma u analiziranom signalu  $\sigma_\varepsilon^2$  (kao u algoritmu za stacionarne signale)
5. Odredimo vremensko-frekvencijsku reprezentaciju posmatranog signala.
6. Pronađimo vrijednost kriterijuma  $J_{\max}$  i uporedimo ga sa referentnim nivoom  $R_{TF} = R_L N \sigma_\varepsilon^2$ . U slučaju da je  $J_{\max} > R_{TF}$  donosimo odluku da se u posmatranom signalu nalazi signal mete.

$L$	0	1	2	4	8	16	32	64
$R_L$	1.122	3.291	4.894	6.866	7.798	8.700	9.613	10.313

Tabela 4.1: Zavisnost nivoa  $R_L$  kod S-metoda od parametra  $L$

Prva tri koraka algoritma potrebno je uraditi samo jedan put, tako da vremenski zahtjevan korak 3. ne utiče na vrijeme izvršavanja algoritma detekcije.

U primjerima koji slijede, kao vremensko-frekvencijska reprezentacija korišćen je S-metod, te je stoga za vjerovatnoću lažnog alarma  $P_{FA} = 0.0027$  izvršeno eksperimentalno određivanje nivoa  $R_L$  za različite vrijednosti parametra  $L$ . Rezultati su prikazani u tabeli 4.1.

### 4.3.3 Primjeri detekcije

Posmatrano je 5 nestacionarnih signala i jedan stacionarni iz eksperimentalno dobijenih podataka (eksperiment je opisan u odjeljku 4.2). Nestacionarni signali su mjerenja 18, 19, 25, 28 i 40, dok je kao primjer stacionarnog signala mete uzeto mjerenje broj 16.

Vjerovatnoća lažnog alarma (detekcije signala mete u slučajevima kada on nije prisutan) je postavljena na  $P_{FA} = 0.0027$ . Kao vremensko-frekvencijska reprezentacija odabran je S-metod sa relativno velikom vrijednošću parametra  $L = 64$ .

Kako je odnos signal-šum u eksperimentalno dobijenim signalima dosta visok, signalima je dodat bijeli, kompleksni Gausov šum. Rezultati analize za odnos signal-šum od  $-15$  do  $-2$  dB prikazani su u tabeli 4.2. U svim slučajevima je posmatrano 100 realizacija šuma i u tabeli je dat broj uspješnih detekcija primjenom algoritma za stacionarne (FT) i algoritma za nestacionarne (TF) signale. Dio rezultata iz tabele koji se odnosi na nestacionarne signale prikazan je na slici 4.28.

Signal smetnji je uklonjen filtriranjem radarskog signala (sa dodatim šumom) visokopropusnim filtrom.

Rezultati pokazuju dobro ponašanje vremensko-frekvencijski zasnovanog detektora u slučaju nestacionarnih signala, i neznatno lošije ponašanje detektora u odnosu na optimalni detektor za slučaj stacionarnog signala.

Na osnovu prikazanih rezultata možemo zaključiti da se u posmatranom slučaju

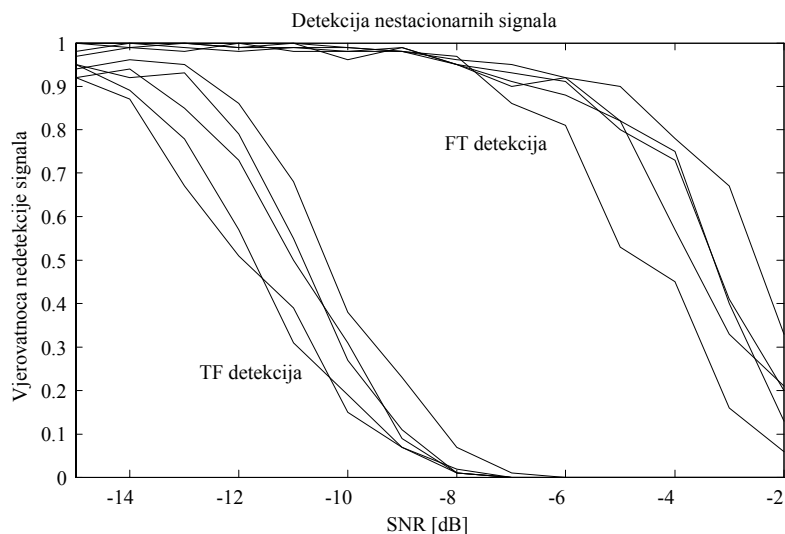
SNR [dB]	Signal 18		Signal 19		Signal 25		Signal 28		Signal 40		Signal 16	
	FT	TF	FT	TF	FT	TF	FT	TF	FT	TF	FT	TF
-2	21	0	33	0	13	0	6	0	20	0	0	0
-3	33	0	67	0	40	0	16	0	41	0	0	0
-4	57	0	78	0	75	0	45	0	73	0	0	0
-5	82	0	90	0	82	0	53	0	80	0	0	0
-6	88	0	92	0	92	0	81	0	91	0	0	0
-7	91	0	95	1	90	0	86	0	93	0	0	1
-8	95	1	96	7	95	1	97	2	95	1	2	6
-9	99	7	98	23	98	11	98	7	99	9	7	13
-10	98	15	99	38	99	27	98	19	96	31	20	33
-11	99	39	99	68	100	55	98	31	100	50	41	55
-12	98	51	99	86	100	79	100	57	99	73	65	69
-13	99	67	100	95	98	93	100	78	100	85	79	82
-14	100	87	100	96	99	92	99	89	100	94	86	87
-15	100	92	100	94	100	95	97	95	98	92	91	95

Tabela 4.2: Broj ispravnih detekcija u zavisnosti od odnosa signal-šum kod 5 nestacionarnih signala (18,19,25,28,40) i jednog stacionarnog signala (16). Rezultat dobijen detektorom zasnovanim na Furijeovoj transformaciji (FT) i vremensko-frekvencijskoj analizi (TF).

kvalitetna detekcija signala mete primjenom vremensko-frekvencijski zasnovanog detektora može ostvariti u slučajevima kada je odnos signal-šum veći od  $-8$  dB.

Na slikama 4.29 i 4.30 prikazane su dvije tipične realizacije za slučaj odnosa signal-šum od  $-8$  dB. Gornji lijevi grafik je vremensko-frekvencijska reprezentacija signala, gornji desni grafik predstavlja optimalnu putanju, koja je maksimizirala kriterijum  $J$ . Na donjem desnom grafiku prikazane su vrijednosti kriterijuma, i nivo praga  $R_{TF}$  za sve analizirane putanje, pri čemu je broj putanja optimizovan na način naveden u odjeljku 3.4.2. Grafik u donjem lijevom dijelu predstavlja Furijeovu transformaciju posmatranog signala i referentni nivo  $R_{FT}$ .

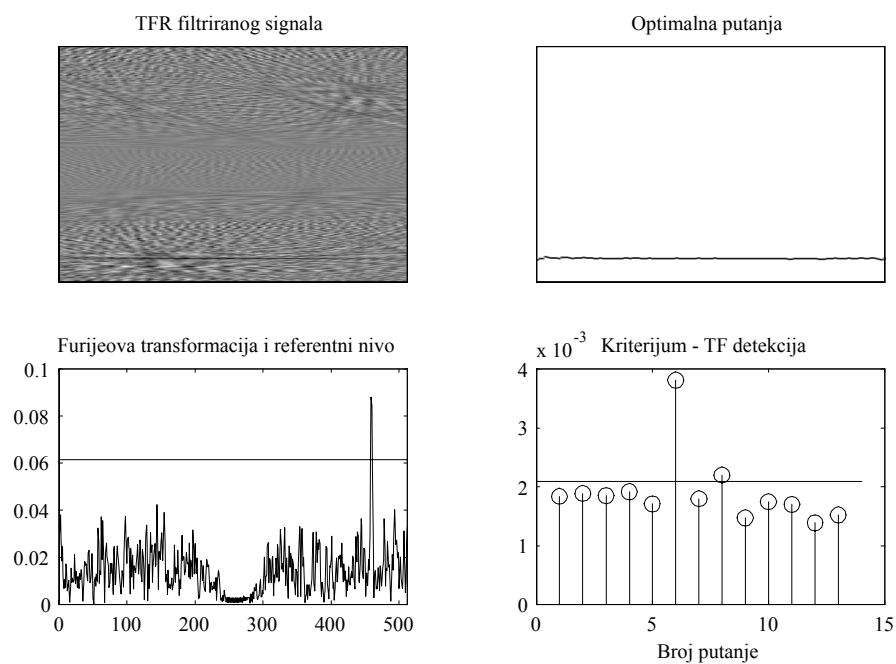
Postupkom detekcije signala primjenom vremensko-frekvencijske analize pored odluke



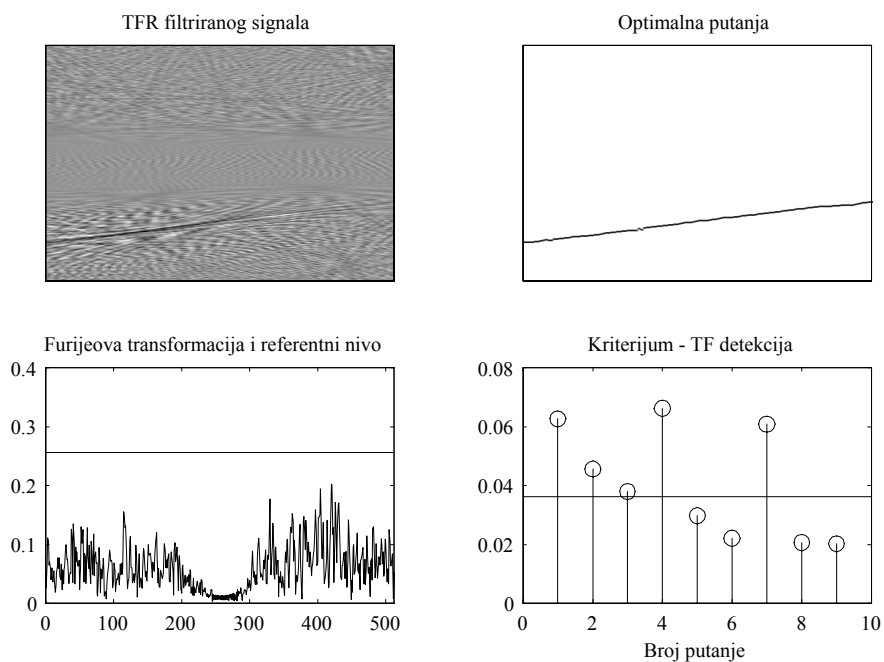
Slika 4.28: Procijenjena vjerovatnoća nedetekcije signala mete za slučaj nestacionarnih signala kod algoritma detekcije zasnovanog na Furijeovoj transformaciji (FT) i vremensko-frekvencijskoj analizi (TF)

da li signal postoji ili ne postoji dobijamo i informaciju o trenutnoj frekvenciji signala sadržanoj u optimalnoj putanji (gornji desni grafik na slikama 4.29 i 4.30).

Iz navedenog primjera da se uočiti praktična upotrebljivost detektora baziranog na vremensko-frekvencijskoj reprezentaciji signala. Umjesto S-metoda sa  $L = 64$  možemo uzeti i bilo koju drugu vremensko-frekvencijsku reprezentaciju i analizirati karakteristike dobijenog detektora. To otvara pitanje optimalne vremensko-frekvencijske reprezentacije u smislu detekcije signala, što na ovom mjestu neće biti razmatrano. Kao heuristički dokaz da je korišćena vremensko-frekvencijska reprezentacija bliska optimalnom slučaju možemo uzeti ponašanje detektora u slučaju stacionarnog signala, gdje je poznato da Furijeova transformacija predstavlja optimalni slučaj. U [39] su razmatrane osobine vremensko-frekvencijskih detektora zasnovanih na diskretnoj Wignerovoj distribuciji u zavisnosti od njene definicije, pri čemu je jedna od definicija i S-metod sa dovoljno velikim  $L$ .



Slika 4.29: Detekcija prisustva signala mete mete u signalu broj 16 (stacionarni slučaj). Odnos signal-šum je  $-8$  dB.



Slika 4.30: Detekcija prisustva signala mete u signalu broj 18 (nestacionarni slučaj). Odnos signal-šum je  $-8$  dB.



# Zaključak

Estimacija parametara signala je široka oblast u okviru obrade signala. U okviru ove teze razmatrani su problemi estimacije parametara signala koji se pojavljuju u analizi realnih radarskih signala. Osnovni problem kod radarskih signala je odvojiti korisni signal od neželjenih komponenti i analizirati parametre korisnog signala. Drugi problem je detektovati signal refelktovan od mete u slučajevima jakog šuma. Pokazano je da u rješavanju ovih problema vremensko-frekvencijska analiza može biti veoma koristan alat. Istraživanjima čiji su rezultati prezentovani u ovoj tezi proširuje se moguća primjena vremensko-frekvencijske analize signala.

Izveden je metod dekompozicije složenih signala na pojedinačne komponente. Pokazano je da predloženi metod ima zadovoljavajuće karakteristike pri analizi simuliranih i eksperimentalno dobijenih signala. Osnovni princip funkcionisanja metoda je razbijanje signala na komponente sadržane u sopstvenim vektorima matrice formirane na osnovu vremensko-frekvencijske reprezentacije signala. Kao vremensko-frekvencijska reprezentacija je u većini slučajeva korišćen S-metod, koji je jednostavan sa stanovišta računске kompleksnosti, a ima niz veoma povoljnih osobina. Naime, korišćenjem S-metoda dobijaju se jasne vremensko-frekvencijske reprezentacije signala, odakle je jednostavno nastavljati analizu u smislu estimacije željenih parametara signala. Takođe, pod određenim uslovima koje je u praksi relativno jednostavno ostvariti, S-metod višekomponentnog signala može biti jednak zbiru Wignerovih distribucija pojedinačnih komponenti. U ovom slučaju se ne pojavljuju kros-članovi, jedan od osnovnih razloga zbog kojih je Wigerova distribucija, pored svih korisnih osobina, nepodesna u analizi višekomponentnih signala.

Metod dekompozicije signala je primijenjen u slučaju simuliranih i eksperimentalno dobijenih radarskih signala. Simulirani signali su proizvod matematičkog modela

radarskog signala, koji je izveden i opisan u tezi. Eksperimentalni radarski signali su dobijeni praćenjem aviona King Air 200, tokom izvođenja komplikovanog manevra u vidu dvije petlje oblika "8". Na ovaj način eksperimentalni podaci sadrže veliki broj različitih situacija koje se mogu pojaviti u realnim uslovima. Izvršeno je ukupno 72 mjerenja, a karakteristični slučajevi su prikazani u tezi.

Pored dekompozicije višekomponentnih signala analiziran je i problem odvajanja korisnih komponenti od komponenti smetnji dobijenih u procesu dekompozicije. Data su dva kriterijuma na osnovu kojih se može vršiti odabir sopstvenih vektora koji, u analiziranim slučajevima, predstavljaju korisne komponente radarskog signala. Oba kriterijuma su rezultat teorijskog i empirijskog razmatranja karakteristika radarskog signala.

Proces dekompozicije podrazumijeva da posjedujemo višekomponentni signal, odnosno da u analiziranom signalu, pored signala smetnji imamo i korisni signal. U tezi su analizirani metodi detekcije prisustva korisnog signala u slučajevima jakog šuma. Pokazano je da detektor zasnovan na Furijeovoj transformaciji i njenoj maksimalnoj vrijednosti nije pogodan za detekciju nestacionarnih signala. U slučaju radarskih signala nestacionarnost je posledica neuniformnog kretanja mete u toku akvizicije radarskog signala. Razvijen je detektor signala zasnovan na vremensko-frekvencijskoj analizi koji je u stanju da detektuje ovakve signale. Karakteristike detektora su teorijski ispitane i provjerene simulacijom na realnim radarskim signalima uz vještački dodat šum. Vremensko-frekvencijskom analizom, tačnost detekcije nestacionarnih signala je približno jednaka tačnosti detekcije stacionarnih signala.

Teorijske osnove navedenih metoda i njihova primjena u realnim slučajevima rezultovale su publikovanjem naučnih radova [53, 54, 55], te je tako dodatno potvrđena aktuelnost razmatrane teme i kvalitet dobijenih rezultata.

Metodi dekompozicije i detekcije signala nijesu ograničeni na primjenu u radarskim signalima, iako je ideja za njihov razvoj potekla upravo iz analize takvih signala. Preliminarna istraživanja pokazala su da se metod dekompozicije signala, gotovo bez ikakvih izmjena može koristiti u analizi srčanih zvukova i medicinskoj dijagnostici, što je moguća nastavak istraživanja analizirane teme.

# Literatura

- [1] B. Boashash, Ed. , *Time-frequency signal analysis and processing*, Elsevier, 2003.
- [2] L. Cohen, *Time-frequency analysis*, Prentice-Hall Inc. , New York, USA, 1995.
- [3] V. C. Chen, H. Ling, *Time-frequency transforms for radar imaging and signal analysis*, Artech House, 2002.
- [4] A. Papoulis, *Signal analysis*, McGraw Hill Book Company, New York, 1977.
- [5] I. Pitas: *Digital image processing algorithms*, Prentice Hall, 1993.
- [6] LJ. Stanković, *Time-frequency signal analysis*, research monograph, Podgorica 2004.
- [7] LJ. Stanković, *Digitalna obrada signala*, Naučna knjiga, Beograd, 1990.
- [8] P. Stoica, R. L. Moses: *Introduction to spectral analysis*, Prentice-Hall, 1997.
- [9] S. Qian, D. Chen, *Joint time-frequency analysis: methods and applications*, Prentice-Hall, 1996.
- [10] M. H. Ackroyd, "Short time spectra and time-frequency energy distribution", J. Acoust. Soc. Am., vol.50, 1970, pp.1229-1231.
- [11] J. B. Allen, L. R. Rabiner, "A unified approach to short-time Fourier analysis and synthesis", *Proc. of the IEEE*, vol.65, No.11, Nov. 1977, pp.1558-1564.
- [12] L.E.Atlas, Y.Zhao, R.J.Marks II: "The use of cone shape kernels for generalized time-frequency representations of nonstationary signals", *IEEE Trans. on Acoust., Speech, Signal Processing*, vol.ASSP-38, 1990, pp.1084-1091.

- [13] R. G. Baraniuk, P. Flandrin, A. J. E. M. Jensen, O. J. J. Michel, "Measuring time-frequency information content using Rényi entropy," *IEEE Trans. Inf. Th.* , vol. 47, no. 4, May 2001, pp. 1391-1409.
- [14] B. Boashash: "Estimating and interpreting the instantaneous frequency of a signal Part 1", *IEEE Proc.* , vol. 80, no. 4, April 1992, pp. 519-538.
- [15] B. Boashash, B. Ristic: "Polynomial time-frequency distributions and time-varying higher order spectra: Applications to analysis of multicomponent FM signals and to treatment of multiplicative noise" *Signal Processing*, vol.67, no.1, May 1998, pp.1-23.
- [16] G. F. Bourdeaux-Bartels: "Time-varying signal processing using Wigner distribution synthesis techniques", in *The Wigner Distribution-Theory and Applications in Signal Processing*, W. Mecklenbrauker, Ed, Amsterdam: Elsevier 1997.
- [17] H. Choi, W. Williams, "Improved time-frequency representation of multicomponent signals using exponential kernels", *IEEE Trans. on ASSP*, vol.73, no.6, June 1989, pp.862-871.
- [18] G. S. Cunningham, W. J. Williams: "Vector-valued time-frequency representations", *IEEE Trans. on Signal Processing*, vol. 44, no. 7, July 1996, pp. 1642 - 1656.
- [19] L. Cohen, "Distributions concentrated along the instantaneous frequency", *SPIE, Adv.Sig.Proc., Alg., Arch., and Imp.*, vol.1348, 1990, pp.149-157.
- [20] M. Daković, I. Djurović, L.J. Stanković: "Adaptive local Fourier transform," in *Proc. of EUSIPCO 2002*, Toulouse, France, Vol. II, pp. 603-606.
- [21] M. Daković, L.J. Stanković, Z. Uskoković: "Metod za optimizaciju vremensko-frekvencijskih reprezentacija signala primijenjen na spektrogram", INFOFEST, Budva, 2000.
- [22] M. Daković, L.J. Stanković, Z. Uskoković: "Energetska mjera koncentracije vremensko-frekvencijskih reprezentacija", IT MM, Žabljak, 2000.
- [23] P. Flandrin, "Some features of time-frequency representation of multicomponent signals", *IEEE ICASSP*, 1984, pp.41B.4.1-4.4.

- [24] P. Flandrin, "A time-frequency formulation of optimum detection", *IEEE Trans. on Acoustic, Speech and Signal Processing*, vol. 36, No.9, Sep. 1988, pp.1377-1384.
- [25] P.Flandrin, F.Hlawatsch, "Signal representation geometry and catastrophes in the time-frequency plane", in *Mathematics in Signal Processing*, T. Durrani et all eds., Oxford, U.K., Clarendon, 1987, pp.3-14.
- [26] A. Francos, M. Porat: "Analysis and synthesis of multicomponent signals using positive time-frequency distributions", *IEEE Trans. on Signal Processing*, vol. 47, no. 2, Feb. 1999, pp. 493-504.
- [27] D. Gabor,"Theory of comunciations", *J.Inst.Elect.Eng.*, vol.93, 1946, pp.423-457.
- [28] F. Gini, G. B. Giannakis: "Hybrid FM-polynomial phase signal modeling: Parameter estimation and Cramer-Rao Bounds," *IEEE Trans. Signal Processing*, Vol. 47, No. 2, Feb. 2003, pp. 363-377.
- [29] P. Goncalves, R. G. Baraniuk: "Pseudo affine Wigner distributions: definition and kernel formulation", *IEEE Trans. SP*, vol. 46, no. 6, June 1998, pp. 1505-1516.
- [30] F. Hlawatsch, W. Krattenthaler: "Bilinear signal synthesis", *IEEE Trans. on Signal Processing*, vol. 40 , no. 2, Feb. 1992, pp. 352 - 363,
- [31] F. Hlawatch, G. F. Bourdeaux-Bartels, "Linear and quadratic time-frequency signal representation", *IEEE Signal Processing Magazine*, April 1992. pp. 21-67.
- [32] V. N. Ivanović, M. Daković, LJ. Stanković, "Performance of quadratic time-frequency distributions as instantaneous frequency estimators", *IEEE Trans. on Signal Processing*, vol. 51, no. 1, Jan. 2003, pp. 77-89.
- [33] V. Ivanović, M. Daković, LJ. Stanković, "The exact estimation error analysis in the instantaneous frequency estimation by using quadratic time-frequency distributions", *ETF Journal of Electrical Engineering*, 2000.
- [34] V.Ivanović, M.Daković, LJ.Stanković: "Analysis of the Instantaneous Frequency Estimation with the Reduced Interference Distributions", *ETF Journal of Electrical Engineering*, 1999.

- [35] V.Ivanović, M.Daković: "Estimation of the instantaneous frequency of a signal using reduced interference distributions", XLII konferencija ETRAN, Zlatibor,1999.
- [36] J. Jeong, W. J. Williams, "Mechanism of the cross-terms in spectrograms", *IEEE Trans. on Signal Processing*, vol.40, No.10, Oct.1992, pp.2608-2613.
- [37] J. Jeong, W. J. Williams,"Kernel design for reduced interference distributions" *IEEE Trans. on Signal Processing*, vol. 40, Feb. 1992, pp. 402-412.
- [38] W. Mu, M. G. Amin, Y. Zhang: "Bilinear signal synthesis in array processing", *IEEE Trans. on Signal Processing*, vol. 51, no. 1, Jan. 2003, pp. 90-100.
- [39] C. Richard: "Time-frequency-based detection using discrete-time discrete-frequency Wigner distributions", *IEEE Trans. on Signal Processing*, vol. 50, no. 9, Sept. 2002, pp. 2170-2176.
- [40] O. Rioul, M. Vetterli, "Wavelets and signal processing", *IEEE Signal Proc. Magazine*, Oct. 1991, pp.14-38.
- [41] T. H. Sang, W. J. Williams, "Rényi entropy and signal dependent optimal kernel design," in *Proc. ICASSP*, vol. 2, 1995, pp. 997-1000.
- [42] L. L. Scharf and B. Friedlander, "Toeplitz and Hankel kernels for estimating time-varying spectra of discrete-time random processes," *IEEE Trans. Signal Process.*, vol. 49, no. 1, pp. 179-189, 2001.
- [43] LJ. Stanković: "The auto-term representation by the reduced interference distributions; The procedure for a kernel design", *IEEE Trans. on Signal Processing*, vol. 44, no. 6, June 1996, pp. 1557-1564.
- [44] LJ. Stanković,"A method for time-frequency analysis", *IEEE Trans. SP*, vol. 42, Jan. 1994, pp. 225-229.
- [45] LJ. Stanković, V. Ivanović, Z. Petrović,"Unified approach to the noise analysis in the Wigner distribution and Spectrogram", *Annales Telecomm.*, Nov. /Dec. 1996, pp. 585-594.

- [46] L.J. Stanković, M. Daković, Ivanović, V: "Performance of spectrogram as IF estimator", *Electronics Letters*, vol. 37, no. 12, Jun 2001, pp. 797-799.
- [47] L.J. Stanković and J. F. Böhme, "Time-frequency analysis of multiple resonances in combustion engine signals," *Signal Processing*, vol. 79, no. 1, pp. 15-28, Nov. 1999.
- [48] L.J. Stanković,"An analysis of some time-frequency and time-scale distributions" *Annales Telecomm.* , Sep/Oct. 1994, pp. 505-517.
- [49] L.J. Stanković, "Performance analysis of the adaptive algorithm for bias-to-variance trade-off", *IEEE Trans. on Signal Processing*, vol. 52, no. 5, May 2004, pp. 1228-1234.
- [50] L.J. Stanković, I. Djurović: "A note on "An overview of aliasing errors in discrete-time formulations of time-frequency representations" ", *IEEE Trans. on Signal Processing*, vol. 49, no. 1, Jan. 2001, pp. 257-259.
- [51] L.J. Stanković, "A measure of some time-frequency distributions concentration," *Sig. Proc.* , vol. 81, no. 3, Mar. 2001, pp. 621-631.
- [52] L.J. Stanković, V. Popović, M. Daković: "On the Capon's method application in time-frequency signal analysis", IEEE International Symposium on Signal Processing and Information Technology, ISSPIT 2003, Darmstadt, Germany, December 2003.
- [53] L.J. Stanković, T. Thayaparan, M. Daković, "Signal decomposition by using the S-method with application to the analysis of HF radar signals in sea-clutter", submitted to *IEEE Trans. on Signal Processing*.
- [54] Lj. Stanković, T. Thayaparan, M. Daković, "Algorithm for signal decomposition by using the S-method", *EUSIPCO 2005*, Antalya, Turkey
- [55] Lj. Stanković, T. Thayaparan, M. Daković, "Improvement of the fast moving targets presentation in ISAR by using S-method", *EUSIPCO 2005*, Antalya, Turkey
- [56] S. Stanković, L.J. Stanković,"An architecture for the realization of a system for time-frequency analysis", *IEEE Trans. CAS-II*, vol. 44, July 1997, pp. 600-604.

- [57] T. Thayaparan and S. Kennedy, "Detection of a manoeuvring air target in sea-clutter using joint time-frequency analysis techniques", *IEE Proc. -Radar Sonar Navig.*, vol. 151, No. 1, Feb. 2004, pp. 19-30.
- [58] T. Thayaparan, G. Lampropoulos, S. K. Wong, E. Riseborough" Focusing ISAR images using adaptive joint time-frequency algorithm on simulated and experimental radar data", *TM 2003-089, Defence R&D Canada - Ottawa*, 2003.
- [59] J. Ville, "Theorie at applications de la notion de signal analytique", *Cables es Transmission*, vol.2, no.1, 1946, pp.61-74
- [60] P. E. Wigner, "On the quantum correction for thermodynamic equilibrium", *Phys. Rev.*, vol.40, 1932, pp.246-254



# Prilog - MATLAB programi

## Vremensko-frekvencijska reprezentacija signala, S-metod

```
function SM=TFRsm(x,L,wf,TS,ZP,NP);
% Racunanje vremensko-frekvencijske reprezentacije
% signala S-metodom
%
% SM=TFRsm(x,L,wf,TS)
%
% x -Analizirani signal (vektor kolona)
% L - Parametar L u S-metodu
% wf - Prozor za racunanje STFT
% TS - Vremenski korak u racunanju STFT
% ZP - 1 ako je potrebno dopuniti signal nulama
% NP - 1 STFT se posmatra kao neperiodicna funkcija
%      ZP=1 i NP=1 su podrazumijevane vrijednosti
% SM - S-metod analiziranog signala

if nargin==4
    ZP=1;NP=1;
elseif nargin==5
    NP=1;
end
N=length(x);
Nw=length(wf);

% Signal se dopunjava potrebnim brojem nula
if ZP==1
    x=[x(1)*zeros(Nw/2,1);x;zeros(Nw/2,1)*x(N)];
end

% Racuna se STFT
ind=1:TS:N;
F=zeros(Nw,length(ind));
for k=1:length(ind);
    F(:,k)=x(ind(k)+(0:Nw-1)).*wf;
end
F=fft(F);
F=F([Nw/2:Nw,1:Nw/2-1],:);
```

```

%Racuna se S-metod
SM=abs(F).^2;
Fc=conj(F);
if NP==1
    for k=1:L
        SM((1+k):(Nw-k),:)=SM((1+k):(Nw-k),:)+...
            2*real(Fc(1:Nw-2*k,:).*F(2*k+1:Nw,:));
    end
else
    for k=1:L
        F=F([Nw,1:Nw-1],:);
        Fc=Fc([2:Nw,1],:);
        SM=SM+2*real(Fc.*F);
    end
end
end

```

## Računanje Kratkotrajne Furijeove transformacije

```

function F=GenFT(x,wf)
% Dekompozicija signala - Kratkotrajna Furijeova transformacija
% Ulazni argumenti:
%     Signal (vektor kolona duzine N),
%     Prozor (opciono parametar, vektor kolona, duzine 2N)
% Izlazna velicina:
%     Kratkotrajna Furijeova transformacija (4Nx2N)
%
if nargin==1
    wf=1;
end

N=length(x);
t=(-N/2:N/2-1)';

% Preodabiranje sa korakom 2 i dopunjavanje signala nulama
X=fft(x);
X=[X(1:N/2);zeros(N,1);X(N/2+1:N)];
x=2*iFFT(X);
x=[ones(N,1)*x(1);x;ones(N,1)*x(length(x))];

% Kratkotrajna Furijeova transformacija
X=zeros(2*N);
for k=1:2*N
    X(:,k)=x(k+(0:2*N-1)).*wf;
end

```

```
F=fft([X(N:2*N,:);zeros(2*N);X(1:N-1,:)]);
F=F([2*N:4*N,1:2*N-1],:);
```

## Računanje S-metoda

```
function S=GenSM(F,method,param)
% Dekompozicija signala - racunanje S-metoda
% Ulazni argumenti:
%     Kratkotrajna Furijeova transformacija,
%     Tip S-metoda
%     1: Konstantno L, navodi se kao treci parametar
%     2: Adaptivno odredjivanje L,
%     zadaje se parametar nivoa Q i maksimalno L
%     3: Dvije vrijednosti L,
%     jedna u dijelu Clutter-a, druga u dijelu signala
%     zadaje se [Lcl,Lsig,SirinaCluttera/2]
% Izlaz: S-metod

[N,M]=size(F);
N=N/4;

S=abs(F(N+1+(0:2*N),:)).^2;
SL=F;SD=conj(F);
ind=(N+1):(3*N+1);

if method==1
    Ls=param;
    for l=1:Ls
        S=S+2*real(SL(ind+l,:).*SD(ind-l,:));
    end
end

if method==2
    Q=param(1);
    Ls=zeros(length(ind),2*N);
    for n=1:2*N
        RefLevel=max(abs(F(:,n)))/Q;
        for k=ind
            for L=1:param(2)
                if abs(F(k+L,n))<RefLevel | abs(F(k-L,n))<RefLevel
                    break
                end
            end
            S(k-N,n)=S(k-N,n)+2*real(F(k+L,n).*conj(F(k-L,n)));
        end
        Ls(k-N,n)=L;
    end
end
end
```

```

end

if method==3
    Ls=param(2)*ones(size(ind));
    Ls(N+1+(-param(3):param(3)))=param(1);
    for k=ind %frequency
        for L=1:Ls(k-N)
            S(k-N,:)=S(k-N,:)+2*real(F(k+L,:).*conj(F(k-L,:)));
        end
    end
end
end

```

## Dekompozicija S-metoda

```

function [D,V]=DecompSM(S,Nc)
% Dekompozicija S-metoda
% Ulazi:
%     S-metod,
%     Zeljeni broj komponenti
% Izlazi:
%     Sopstvene vrijednosti
%     Sopstveni vektori

[N,M]=size(SM);
N=N/2;

WDSM=S/(4*N);
% Racunanje inverzne Furijeove transformacije po frekvencijskom indeksu
WDF=ifft(WDSM([N:2*N,1:N-1],:));
WDF=WDF([N:2*N,1:N-1],:);
% Smjena promjenjivih u indeksima
RW=zeros(N);
for n=1:N;
    v=N+n;
    k=n;
    for m=1:N;
        RW(n,m)=WDF(v,k);
        v=v-1;k=k+1;
    end
end

% Sopstvene vrijednosti i sopstveni vektori
opt.disp=0;
[V,D]=eigs(RW,Nc,'lm',opt);
D=abs(diag(D));

```

## Model radarskog signala

```
% Model radarskog signala
% Generisu se tri signala x1,x2 i x3 koji se nalaze na
% maksimumu 2DFFT, neposredno prije i neposredno poslije maksimuma

w0=2*pi*10e6; % Radna frekvencija radara (rad/s)
Tr=1/10;      % Trajanje jednog impulsa (s)
B=500000;    % Frekvencijski opseg radara (Hz)
M=256;       % Broj emitovanih impulsa
N=256;       % Broj odbiraka u jednom impulsu

d0=50000;    % Udaljenost mete (m)
v0=30;       % Brzina mete (m/s)
a0=-3;       % Ubrzanje mete (m/s^2)
a1=0.3;      % Nelinearni clanovi brzine
a2=-0.005;   % V=v0+a0t+a1t^2+a2t^3

c=3e8;       % Brzina svjetlosti

t=0:Tr:(M-1)*Tr;
tod=Tr/N;
t1p=0:tod:Tr-tod;

q=zeros(M,N);
for m=1:M;
    t2p=t(m)+t1p;
    d=d0+v0*t2p+a0*t2p.^2/2+a1*t2p.^3/3+a2*t2p.^4/4;
    q(m,:)=exp(j*w0*2*d/c).*exp(-j*2*pi*B/Tr*(t1p)*2.*d/c);
end

q=q.';
Q=(flipud(fftshift(fft2(q),2)));
Q=Q([N,1:N-1],:);
[p,ip]=max(max(abs(Q')));
ip=ip-1
x1=ifft(fftshift(Q(ip,:)));
x2=ifft(fftshift(Q(ip+1,:)));
x3=ifft(fftshift(Q(ip+2,:)));

dV=pi*c/(w0*M*Tr); % Rezolucija brzine
dR=c/(2*B);        % Rezolucija udaljenosti
```

## Dekompozicija signala

```
% Ulaz signal x duzine 256 odbiraka, vektor kolona
% generisan modelom ili realni radarski signal
```

```

% Potrebno je prethodno definisati i rezoluciju brzine dV

Nc=20; % Broj komponenti za dekompoziciju
L=24; % Vrijednost parametra L u S-metodu

F=GenFT(x);
S=GenSM(F,1,L);
[D,V]=DecompSM(S,Nc);

% Prikazivanje sopstvenih vektora i odredjivanje
% signala mete
figure(1)
OptSM=0;
for k=1:Nc
    Sd=tfrsm(V(:,k),8,hanning(128),2);
    CritZ(k)=max(max(Sd(:,20:108)))...
            /mean(mean((abs(Sd(:,20:108))-Sd(:,20:108))))/(128);
    if CritZ(k)>3
        OptSM=OptSM+D(k)*Sd;
    end
    if k<=12
        subplot(3,4,k)
        imagesc(Sd)
        axis xy
        set(gca,'xtick',[],'ytick',[])
        title(num2str(k))
    end
end

% Prikaz rezultata dekompozicije

figure(2)
subplot(2,3,1),Sorig=10*log10(abs(tfrsm(x,4,hanning(128),1)));
imagesc(Sorig,max(max(Sorig))+[-40,0]);
set(gca,'xtick',[],'ytick',[]),axis xy
title('TFR originalnog signala'),xlabel('vrijeme'),ylabel('frekvencija')

subplot(2,3,2),OptSM=interp2(OptSM);
imagesc(abs(OptSM));axis xy
set(gca,'xtick',[],'ytick',[])
title('TFR izdvojenog signala'),xlabel('vrijeme'),ylabel('frekvencija')

subplot(2,3,4)
Fx=abs(fftshift(fft(x))/256);plot((-128:127)/256,Fx)
title('Furijeova transformacija'),xlabel('normalizovana frekvencija')
ylabel('amplituda'),set(gca,'ytick',[])

```

```

subplot(2,3,5)
[p,q]=max(OptSM);q=q-129;ind=find(p>max(p)*0.05);
plot(ind,q(ind)*dV),axis([0,255,-128*dV,127*dV])
set(gca,'xtick',[0,255],'xticklabel',[' 0';'Tr']);
title('Brzina mete'),xlabel('vrijeme')

ind2=find(CritZ>3);iCg=[1:Nc;1:Nc];

subplot(2,3,3)
Ddd=[D';0*D'];hdl=plot(1:Nc,D,'o',ind2,D(ind2),'x',iCg,Ddd,'k');
set(hdl,'markersize',3),a=axis;a(1:2)=[0,length(D)];axis(a)
title('Sopstvene vrijednosti'),xlabel('redni broj')

subplot(2,3,6)
Cg=[CritZ;0*CritZ];
hdl=plot(1:Nc,CritZ,'o',ind2,CritZ(ind2),'x',...
         iCg,Cg,'k',1:Nc,3*ones(1,Nc),'-g');
set(hdl,'markersize',3),a=axis;a(1:2)=[0,Nc];axis(a)
title('Mjera'),xlabel('redni broj')

```