

UNIVERZITET CRNE GORE
ELEKTROTEHNIČKI FAKULTET

Miloš Brajović

**REKURZIVNO IZRAČUNAVANJE
VREMENSKO-FREKVENCIJSKIH REPREZENTACIJA**

– magistarski rad –

Podgorica, 2013.

UNIVERZITET CRNE GORE
ELEKTROTEHNIČKI FAKULTET

Miloš Brajović

**REKURZIVNO IZRAČUNAVANJE
VREMENSKO-FREKVENCIJSKIH REPREZENTACIJA**

– magistarski rad –

Podgorica, 2013.

PODACI I INFORMACIJE O MAGISTRANTU

Ime i prezime: **Miloš Brajović**

Datum i mjesto rođenja: 24.5.1988., Podgorica

Prethodno završene studije:

Elektrotehnički fakultet, osnovne akademske studije (180 ECTS kredita),
studijski program: Elektronika, telekomunikacije i računari, 2010.

Elektrotehnički fakultet, specijalističke akademske studije (60 ECTS kredita),
studijski program: Elektronika, telekomunikacije i računari, smjer Računari,
2011.

INFORMACIJE O MAGISTARSKOM RADU

Elektrotehnički fakultet

Studijski program: Elektronika telekomunikacije i računari, smjer Računari

Naslov rada: REKURZIVNO IZRAČUNAVANJE
VREMENSKO-FREKVENCIJSKIH REPREZENTACIJA

Mentor: Prof. dr Miloš Daković

UDK, OCJENA I ODBRANA MAGISTARSKOG RADA

Datum prijave magistarskog rada: 5.4.2013.

Datum sjednice Vijeća na kojoj je prihvaćena tema: 10.5.2013.

Komisija za ocjenu teme i podobnosti magistranta:

1. Prof. dr Ljubiša Stanković
2. Prof. dr Miloš Daković
3. Prof. dr Igor Đurović

Komisija za ocjenu rada:

1. Prof. dr Ljubiša Stanković
2. Prof. dr Miloš Daković
3. Prof. dr Igor Đurović

Komisija za odbranu rada:

1. Prof. dr Ljubiša Stanković
2. Prof. dr Miloš Daković
3. Prof. dr Igor Đurović

Datum odbrane: _____

Datum promocije: _____

Izvod teze

Vremensko-frekvencijska analiza predstavlja bitnu i sve više primjenjivanu oblast obrade signala. Veliki broj metoda i transformacija koji su razvijeni i koji se i danas razvijaju svjedoče o značaju i zanimljivosti tema ove naučne oblasti.

U tezi su izloženi rezultati istraživanja u ovoj oblasti, koji obuhvataju rekurzivni metod za proračun kratkotrajne Fourier-ove transformacije, algoritam za estimaciju periode micro-Doppler-a, i predlog reprezentacije višeg reda koja poboljšava koncentraciju određenih klasa signala, u odnosu na postojeće metode. Predstavljen je metod za rekurzivnu realizaciju predložene reprezentacije višeg reda. Razmatrani problemi otvaraju brojne mogućnosti za dalja istraživanja i buduće naučne doprinose.

Rezultati istraživanja izloženi su kroz pet glava i zaključak.

U prvoj glavi predstavljeni su neki opšti teorijski koncepti obrade signala, sa akcentom na klasifikaciju signala i Fourier-ovu analizu. Nakon toga, u drugoj glavi su izloženi osnovni koncepti vremensko-frekvencijske analize i aktuelni problemi, kroz analizu kratkotrajne Fourier-ove transformacije, Wigner-ove distribucije i S-metoda, kao reprezentativnih primjera vremensko-frekvencijskih transformacija prvog i drugog reda.

U sljedećoj glavi predstavljen je predloženi metod za računanje kratkotrajne Fourier-ove transformacije rekurzivnim putem za slučaj kada se numerički proračun ne vrši u uzastopnim vremenskim trenucima. Izvršena je analiza uslova pod kojima poboljšanje postoji u odnosu na klasični proračun, i analiza greške usljed rekurzije.

Četvrta glava odnosi se na algoritam za procjenu periode micro-Doppler-a primjenom vremensko-frekvencijske analize. Predstavljeni su primjeri uspješne estimacije periode i izvršena je analiza numeričke složenosti algoritma realizovanog primjenom rekurzivnog metoda iz treće glave teze.

Peta glava sadrži teorijsku analizu i primjere vezane za predloženu reprezentaciju višeg reda izvedenu na bazi aproksimacije prvog izvoda faze, koja poboljšava koncentraciju široke klase signala. Predložen je rekurzivni pristup njene realizacije, uz upotrebu koncepta ograničenih konvolucija u cilju smanjenja pojave kros-članova u analizi multikomponentnih signala. Zaključak objedinjuje osnovne rezultate teze.

Abstract

Time-frequency signal analysis is an important field of signal processing which is increasingly applied in practice. A large number of methods and transformations which were developed and which are still developing prove the significance and the interest of topics in this field of science.

The thesis presents the results of research in this field, which include a recursive method for calculating short-time Fourier transform, an algorithm for micro-Doppler period estimation, and a proposal of a higher order representation which improves the concentration of certain classes of signals, comparing with existing methods. A method for recursive realization of the proposed higher order representation is also presented. Considered issues open numerous opportunities for further research and future scientific contributions.

The research results are presented through five chapters and a conclusion.

The first chapter provides some general theoretical concepts of signal processing, with the main emphasis on the classification of signals and Fourier analysis. The second chapter presents basic concepts of time-frequency analysis and current problems, through the analysis of short-time Fourier transform, Wigner distribution and S-method as representative examples of time-frequency transformations of first and second order.

The next chapter presents the proposed method for calculating short-time Fourier transform in a recursive manner, for the case when the numerical calculations are not performed in successive time instants. The analysis of the conditions under which there is an improvement comparing with the classical calculation, and analysis of errors due to recursion is presented.

The fourth chapter concerns the algorithm for estimating the periods of micro-Doppler by using time-frequency signal analysis. Examples of successful periods estimation and the experimental results of SNR analysis are also presented.

The fifth chapter contains theoretical analysis and examples related to the proposed higher-order representation based on the signal first phase derivative estimation, which improves the concentration for a large class of signals. A recursive realisation of the proposed representation is developed, in order to suppress cross-terms and decrease its numerical complexity. Conclusion combines basic results.

Sadržaj

Izvod iz rada	i
Abstract	ii
Lista slika	iv
Lista tabela	vi
Lista skraćenica i njihovo značenje	viii
1 Uvod u obradu signala	3
1.1 Signali i klasifikacija signala	3
1.2 Fourier-ova analiza	7
1.2.1 Fourier-ovi redovi	8
1.2.2 Fourier-ove transformacije	13
2 Vremensko-frekvencijska analiza	23
2.1 Linearne vremensko-frekvencijske reprezentacije	24
2.1.1 Kratkotrajna (Short-time) Fourierova transformacija	24
2.1.2 Prozori i problem rezolucije kod STFT	26
2.1.3 Rezolucija i princip neodređenosti	29
2.1.4 Metod stacionarne faze i pojam trenutne frekvencije	29
2.1.5 Uticaj viših izvoda faze na STFT	32
2.1.6 Spektrogram	32
2.1.7 Diskretna STFT	33
2.2 Vremensko-frekvencijske reprezentacije drugog reda	34
2.2.1 Rihaczek-ova distribucija	36
2.2.2 Wigner-ova distribucija	37
2.2.3 Diskretna i pseudo-Wignerova distribucija	41
2.2.4 S-metod	44
2.3 Primjeri	47

3	Rekurzivno računanje STFT	52
3.1	Klasični proračun STFT	52
3.1.1	Numerička složenost računanja primjenom FFT algoritama	53
3.2	Rekurzivni metod za računanje STFT	54
3.2.1	Analiza broja računskih operacija	56
3.2.2	Analiza greške usled rekurzije	57
4	Algoritam za određivanje periode micro-Doppler-a	59
4.1	Pojam micro-Doppler-a i TF analiza	59
4.2	Predloženi algoritam	61
4.2.1	Analiza numeričke složenosti	62
4.3	Primjeri	63
4.4	Eksperimentalna MSE analiza	67
5	Estimacija prvog izvoda faze i definisanje novih reprezentacija	68
5.1	Idealna vremensko-frekvencijska reprezentacija	68
5.2	Kvadratne reprezentacije	69
5.3	Opšti pristup određivanju estimatora trenutne frekvencije	70
5.4	Predložena reprezentacija višeg reda	71
5.4.1	Osnovna svojstva predložene reprezentacije	74
5.4.2	Primjeri	74
5.5	Realizacije predložene reprezentacije	76
5.5.1	Realizacija primjenom ograničenih konvolucija	77
5.5.2	Rekurzivna realizacija uz primjenu ograničenih konvolucija	82
	Zaključak	91

Slike

1.1	Primjer kontinualnog signala i diskretnog signala dobijenog njegovim odabiranjem (prva vrsta) i ilustracija step funkcije i delta impulsa (druga vrsta)	5
1.2	Periodični diskretni signal i njegov Fourier-ov red (DFT)	11
1.3	Aproksimacija periodičnog signala Fourier-ovim redom: a) originalni signal; b) aproksimacija Fourier-ovim redom od 4 harmonika; c) aproksimacija Fourier-ovim redom od 8 harmonika; d) aproksimacija Fourier-ovim redom od 45 harmonika	14
1.4	Ilustracija Fourier-ove transformacije diskretnog signala: a) aperiodični diskretni signal; b) FT tog signala	16
1.5	Ilustracija algoritma razbijanja po frekvenciji za $N = 8$	22
2.1	Ilustracija lokalizacije signala primjenom funkcije prozora	25
2.2	Primjeri prozora u vremenskom i frekvencijskom domenu: a) pravougaoni prozor u vremenskom domenu; b) pravougaoni prozor u frekvencijskom domenu; c) Hanning-ov prozor u vremenskom; d) Hanning-ov prozor u frekvencijskom domenu	28
2.3	Spektrogrami signala (2.70)-(2.75): prva kolona - sa prozorom širine $N = 8$ (16 ms); druga kolona - sa prozorom širine $N = 32$ (64 ms); treća kolona - sa prozorom širine $N = 128$ (256 ms);	35
2.4	Pseudo-Wigner-ove distribucije signala (2.70)-(2.75): prva kolona - sa prozorom širine $N = 64$; (64 ms) druga kolona - sa prozorom širine $N = 128$ (128 ms); treća kolona - sa prozorom širine $N = 256$ (256 ms).	42
2.5	S-metod signala (2.70)-(2.75) računat sa različitim vrijednostima parametra L_d	46
2.6	Realni i imaginarni dio signala (2.70)-(2.75)	48
2.7	Fourier-ove transformacije signala (2.70)-(2.75)	51
3.1	Numerička greška koja nastaje pri računanju STFT po predloženom rekurzivnom postupku. Posmatrani signal je: a) bijeli Gauss-ov šum, b) sinusoidalno frekvencijski modulisan signal kome je dodat šum analiziran pod a)	58

4.1	Estimacija periode micro-Doppler-a. Prva kolona: $ STFT(n, k) $ signala iz primjera 4.1-4.5 ; druga kolona: dobijene normalizovane mjere koncentracije.	65
4.2	Rezultati MSE analize predloženog algoritma. Horizontalna linija označava do koje najniže vrijednosti SNR-a je MSE ispod 10%	67
5.1	$PD(t, \Omega)$ karakterističnih polinomijalno-faznih signala iz primjera 5.1. Vrijeme je zadato u sekundama, a frekvencija u radijanima u sekundi. . . .	75
5.2	a) $PD(t, \Omega)$ složenoperiodično modulisanog signala iz primjera 5.2; b) Spektrogram sinusoidalno modulisanog signala iz primjera 5.2; c) PWD sinusoidalno modulisanog signala iz primjera 5.2; d) $PD(t, \Omega)$ sinusoidalno modulisanog signala iz primjera 5.2 zašumljenog bijelim šumom.	76
5.3	$PD(t, \Omega)$ signala iz primjera 5.4 računata opisanim metodom ograničenih konvolucija	86

Tabele

3.1	Maksimalne vrijednosti koraka l za koje postoji ušteda u broju operacija primjenom predloženog rekurzivnog metoda u zavisnosti od dužine prozora u STFT	56
3.2	Procentualni dobitak u broju operacija primjenom predloženog rekurzivnog metoda u odnosu na broj operacija direktnom primjenom FFT-a za računanje STFT, za $N = 1024$	57
4.1	Procentualna ušteda u broju operacija algoritma za estimaciju periode m-D-a primjenom predloženog rekurzivnog metoda u odnosu na broj operacija direktnom primjenom FFT-a za računanje STFT, za $L = 1024$.	64
4.2	Vrijeme izvršavanja algoritma za računanje periode m-D-a primjenom FFT algoritama za računanje STFT i primjenom rekurzivne STFT u prvom koraku za signal dužine $N = 2256$ odbiraka i prozor širine $L = 256$ odbiraka	64
5.1	Vrijeme izvršavanja proračuna reprezentacije $PD(n, k)$ korišćenjem ograničenih konvolucija nerekurzivnim putem (prva vrsta); korišćenjem metoda ograničenih konvolucija rekurzivnim putem sa primjenom FFT algoritama za računanje STFT (druga vrsta) i korišćenjem algoritma sa primjenom rekurzivne STFT u prvom koraku (treća vrsta)	90

Lista skraćenica i njihovo značenje

DFT	-	Diskretna Fourier-ova transformacija;
IF	-	trenutna frekvencija (eng. instantaneous frequency);
ITF	-	idealna vremensko-frekvencijska reprezentacija
LFM	-	linearno frekvencijski-modulisan;
FM	-	frekvencijski-modulisan;
FR	-	Fourier-ov red;
FT	-	Fourier-ova transformacija;
FTDS	-	Fourier-ova transformacija diskretnog signala;
m-D	-	micro-Doppler;
MSE	-	srednja kvadratna greška. Veličina kojom se izražava srednje kvadratno odstupanje procijenjene od tačne vrijednosti u decibelima (dB);
PPS	-	polinomijalno-fazni signal;
SNR	-	odnos signal-šum (eng. signal to noise ratio);
STFT	-	kratkotrajna Fourier-ova transformacija.
WD	-	Wigner-va distribucija.

Uvod

Digitalna obrada signala se kao naučna oblast razvija veoma intenzivno u toku proteklih 40 godina, prateći razvoj računarske tehnike i digitalnog hardvera. Svoj intenzivni razvoj digitalna obrada signala duguje i mogućnosti softverske implementacije njenih tehnika i metoda, što značajno pojednostavljuje njenu praktičnu primjenu, i omogućava ubrzano usavršavanje postojećih i razvijanje novih tehnika i metoda.

Brojna ograničenja u analizi i obradi nekih često zastupljenih klasa signala, zasnovanim na klasičnim tehnikama primjene Fourier-ove transformacije, dovode do razvoja vremensko-frekvencijske analize. Mogućnosti i prednosti koje nude tehnike i alati vremensko-frekvencijske analize u mnogim praktičnim problemima stavljaju ovu oblast u fokus brojnih istraživanja tokom proteklih decenija. Danas vremensko-frekvencijska analiza spada u klasu veoma atraktivnih oblasti obrade signala sa stanovišta istraživanja. Samo neke od primjena vremensko-frekvencijske analize uključuju obradu radarskih, biomedicinskih, seizmičkih, zvučnih i video signala, redukciju interferencija u komunikacionim sistemima, detekciju determinističkih signala, digitalni watermarking itd.

U narednoj glavi biće razmatrani osnovni koncepti obrade signala u analognom i diskretnom domenu, njenih tehnika, alata i njihovih osobina. Posebna pažnja biće posvećena Fourier-ovoj transformaciji kao jednom od najbitnijih matematičkih aparata korišćenih u ovoj naučnoj oblasti. Fourier-ova transformacija je polazna tačka i suštinski element brojnih transformacija i reprezentacija vremensko-frekvencijske analize, budući da ona omogućava prevođenje signala iz vremenskog u frekvencijski domen.

Imajući u vidu da u analizi i obradi u praksi veoma zastupljenih nestacionarnih signala klasična Fourier-ova transformacija ne daje rješenja za brojne probleme, vremensko-frekvencijska analiza se prirodno nameće kao neophodan koncept u obradi signala. Do danas su razvijene brojne vremensko-frekvencijske reprezentacije, od kojih svaka u odnosu na postojeće nudi odgovarajuće prednosti i poboljšanja za određene klase problema i za određene uslove njihove primjene. Uporedo sa tim, često novonastalo poboljšanje znači i gubitak performansi gledano kroz prizmu nekih drugih kriterijuma kvaliteta reprezentacija, a veoma često i smanjenje primjenljivosti za druge klase problema, u odnosu na postojeće alate. Međutim, nijedan postojeći alat ne daje rješenja za sve probleme koji su otvoreni u ovoj kompleksnoj oblasti.

U daljem izlaganju će biti analizirani osnovni koncepti vremensko-frekvencijske

analize: razlozi za uvođenje, fundamentalni problemi i postojeća rješenja, analiza dvije osnovne i često zastupljene reprezentacije kao i metoda koji objedinjuje njihove prednosti a istovremeno minimizije njihove nedostatke, analiza njihovih svojstava i njihova komparativna analiza. Poseban akcenat biće stavljen na problematiku koncentracije signala u vremensko-frekvencijskoj ravni, pojavu kros-komponenti i na njihovu numeričku implementaciju.

Numerički proračuni vremensko-frekvencijskih reprezentacija tijesno su povezani sa njihovom praktičnom primjenom, pa će stoga posebna pažnja u četvtoj glavi biti posvećena i ovoj problematici. Biće riječi o tehnici koja unosi određena poboljšanja sa stanovišta numeričke kompleksnosti proračuna. Primjena vremensko-frekvencijske analize u rješavanju konkretnih problema biće ilustrovana kroz algoritam za procjenu periode micro-Doppler-a. Nakon identifikacije problema zastupljenih u vremensko-frekvencijskoj analizi, i postavljanja nekih glavnih kriterijuma za ocjenu kvaliteta vremensko-frekvencijskih reprezentacija i tehnika, stvorena je i podloga za uvođenje reprezentacije višeg reda definisane na bazi estimacije prvog izvoda faze signala (trenutne frekvencije). Ona će biti analizirana u petoj glavi.

Teorijska analiza će biti potkrijepljena eksperimentalnim rezultatima, kroz koje će biti potvrđena poboljšanja koje predložene tehnike uvode u odnosu na postojeće.

Glava 1

Uvod u obradu signala

Signal predstavlja fizički proces kojim se prenosi informacija i matematički se može interpretirati funkcijom jedne ili više varijabli. Tako se zvučni signal može predstaviti funkcijom čija je nezavisno promjenljiva vrijeme, dok se slika može predstaviti funkcijom koja zavisi od prostornih koordinata. Budući da se danas mnogi procesi, na primjer zvučni talas ili vizuelni doživljaj mogu konvertovati u ekvivalentnu elektromagnetnu formu - struju ili napon, ekvivalentnu u smislu da njene promjene u vremenu i/ili prostoru odgovaraju sadržaju informacije koju reprezentuje, a što se u praksi i radi zbog brojnih pogodnosti koje takva forma pruža, najčešće se podrazumijeva ovakav oblik signala.

Matematički modeli pružaju mogućnost generisanja, kao i analize i obrade signala u svrhu poboljšanja njegovog kvaliteta, filtriranja i otklanjanja šuma, kompresije, njegove konverzije u oblik pogodan za prenos odgovarajućim sistemima, skladištenje itd. Matematičko modeliranje signala intuitivno je jasan i fizički opravdan pristup: na primjer, ako se radi o procesima koji se odvijaju vremenu i/ili prostoru, logično je predstavljati njihove karakteristike kao zavisnost od ovih parametara, pa je tako često od interesa predstaviti kako se mijenja amplituda audio signala tokom vremena ili kako se mijenja osvjetljaj digitalne slike u prostornim koordinatama. Bogatstvo matematičke aparature otvara i velike mogućnosti za obradu. Treba napomenuti da se i sistemi u kojima signal nastaje, kojima se prenosi i uopšte sa kojima stupa u interakciju takođe matematički modeluju.

Oblasti primjene obrade signala danas su veoma brojne i raznovrsne, a među njima biće spomenuta primjena u telekomunikacijama, industriji (upravljanje procesima), akustici, medicini, geodeziji, astronomiji, mikroskopiji, vazduhoplovstvu itd.

1.1 Signali i klasifikacija signala

Za izdvajanje informacija iz signala potrebno je primijeniti nad njima odgovarajuću matematičku aparaturu. Metod koji će biti korišćen kao i uspješnost pojedinih metoda za analizu i obradu zavisi od osobina samog signala. Stoga se kao prvi korak u analizi signala

nameće njihova klasifikacija. U zavisnosti od toga da li je signal funkcija jedne ili više nezavisno promjenljivih, može se govoriti o jednodimenzionim i višedimenzionim signalima [1]-[12]. Tako muzički signal predstavlja primjer jednodimenzionog, dok slika predstavlja primjer dvodimenzionog signala. U daljem izlaganju podrazumijevaće se jednodimenzioni signali, gdje je nezavisno promjenljiva vrijeme. Vrijednost koja se pridružuje nezavisno promjenljivoj može biti realan ili kompleksan broj, pa u tom smislu razlikujemo realne i kompleksne signale.

Nezavisno promjenljiva može biti kontinualna ili diskretna, pa se zato može govoriti o analognim (kontinualnim) ili diskretnim signalima (slika 1.1) [1]-[12]. Kod prvog tipa vrijednosti signala variraju kontinualno tokom vremena (nezavisno promjenljive), dok su kod drugog tipa vrijednosti definisane samo za tačno određene vrijednosti nezavisno promjenljive (koje su najčešće ekvidistantno raspoređene), pa u tom slučaju signali predstavljaju sekvence brojeva konačne preciznosti. Informacije koje se predstavljaju jednim ili drugim tipom signala, pod uslovom zadovoljenja određenih uslova, mogu biti potpuno ekvivalentne. Budući da diskretne promjenljive obuhvataju konačan skup vrijednosti, za razliku od kontinualnih koje ih imaju beskonačno mnogo, već se nagovještavaju brojne prednosti koje može pružiti diskretna forma. Iako se mnogi signali od praktičnog interesa pojavljuju kao analogni, oni se često digitalizuju, odnosno na određeni način konvertuju u sekvence brojeva.

Striktno matematički govoreći, kontinualni signal predstavlja preslikavanje skupa realnih brojeva \mathbb{R} (ili nekog njegovog povezanog podskupa) na skup kompleksnih brojeva \mathbb{C} , odnosno, $x : t \rightarrow x(t)$. Jasno je da se, ukoliko se preslikavanje vrši na skup realnih brojeva, govori o realnim signalima [11]. Diskretni signal se modeluje preslikavanjem skupa cijelih brojeva \mathbb{Z} na skup kompleksnih brojeva \mathbb{C} , to jest $x : n \rightarrow x(n)$.

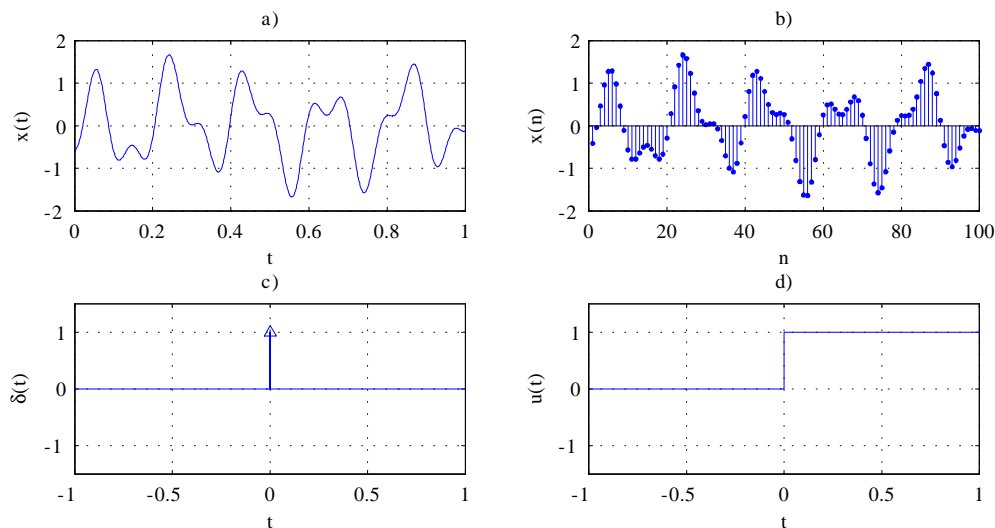
Veoma značajnu ulogu imaju diskretni signali dobijeni odabiranjem kontinualnih [2]-[4]. Ako je kontinualni signal $x(t)$ odabran uniformno, sa periodom odabiranja Δt , tako da je ona manja ili jednaka od recipročne dvostruke vrijednosti maksimalne frekvencije tog signala, f_m , odnosno,

$$\Delta t \leq \frac{1}{2f_m}, \quad (1.1)$$

tada je zadovoljena teorema o odabiranju [1]-[4]. U slučaju zadovoljenja ovog uslova, iz odbiraka diskretnog signala $x(n) = x(n\Delta t)$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ može se izvršiti potpuna rekonstrukcija polaznog analognog signala. Pojam maksimalne učestanosti u spektru analognog signala biće jasniji nakon izlaganja vezanog za frekvencijsku analizu signala. Na slici 1.1 a) prikazan je primjer analognog signala

$$x(t) = \sin(10\pi t) - 0.25 \cos(3\pi t + \frac{\pi}{3}) - 0.5 \sin(22\pi t + \frac{\pi}{4}), \quad (1.2)$$

i diskretnog signala (ista slika pod b)) dobijenog njegovim odabiranjem, sa periodom odabiranja $\Delta t = 0.01s \leq \frac{1}{22}s$.



Slika 1.1: Primjer kontinualnog signala i diskretnog signala dobijenog njegovim odabiranjem (prva vrsta) i ilustracija step funkcije i delta impulsa (druga vrsta)

Pošto u današnje vrijeme obrada signala podrazumijeva digitalno okruženje, odnosno upotrebu računara ili specijalizovanog hardvera, gdje su na raspolaganju konačni resursi, postoji neophodnost diskretizacije i zavisno promjenljive, odnosno amplitude signala. Takav oblik diskretizacije naziva se kvantizacija, i ona podrazumijeva odgovarajuće kompromise, jer se beskonačan skup mogućih vrijednosti svodi na konačan, i time se degradira kvalitet signala u manjoj ili većoj mjeri [1]-[4], [11]-[12]. Kvantizacija se može vršiti podjelom skupa svih vrijednosti amplitude (intervala u kojem se nalaze) na odgovarajuće podintervale prema nekom određenom kriterijumu, gdje svaki od njih takođe sadrži beskonačno mnogo vrijednosti, a zatim se sve vrijednosti koje pripadaju jednom podintervalu na neki način zaokružuju na jednu vrijednost. Zavisno od toga koliko ima takvih zaokruživanja, kvalitet kvantizovanog signala biće manji ili veći. Kvantizacija signala na veći broj vrijednosti znači i veći kvalitet i obrnuto. Greška koja neminovno nastaje modeluje se šumom koji se naziva šum kvantizacije.

Signal diskretizovane nezavisno promjenljive i kvantizovane amplitude poznat je kao digitalni signal, dok se procesiranje takvih signala naziva digitalna obrada signala [1]-[4]. Treba napomenuti da je izrazito veliki tehnički napredak tokom proteklih decenija uslovio da su danas greške koje nastaju usljed kvantizacije veoma male, pa se stoga digitalni signali danas uobičajeno tretiraju kao signali sa kontinualnom amplitudom, dok se efekti kvantizacije, po potrebi, tretiraju kao kvantizacioni šum. Važno je istaći da je, za razliku od diskretizacije, kvantizacija ireverzibilan proces [1].

U zavisnosti od prirode, odnosno načina promjene vrijednosti i matematičkog aparata kojim se tretiraju, signali se dijele na determinističke i slučajne. Prvi su takvi da su njihove vrijednosti poznate i u prošlosti i u budućnosti, ali su, iako nijesu nosioci informacija, od fundamentalnog značaja u analizi i obradi signala. Slučajni signali, koji se tretiraju probablističkim metodama, uzimaju moguće vrijednosti sa određenom

vjerovatnoćom, pa stoga nije moguće predvidjeti njihov tok u budućnosti. Dakle, ovom klasifikacijom se zapravo određuje matematički model signala, odnosno funkcija ili pravilo koje nedvosmisleno opisuje dati signal [1], [2], [10].

Za kontinualni signal se kaže da je paran ukoliko zadovoljava uslov: $x(-t) = x(t)$ za svako t , a da je neparan ukoliko zadovoljava: $x(-t) = -x(t)$, za svako t . Za diskretne signale važe ekvivalentne definicije parnosti [2], [3].

Periodični signali zadovoljavaju uslov: $x(t) = x(t+T)$, za svako t , gdje je T pozitivna realna konstanta. Ukoliko je uslov zadovoljen za $T = T_0$, jasno je da je tada zadovoljen i za $T = kT_0$, gdje je k cio broj. Veličina T_0 naziva se osnovna perioda, dok je T perioda signala. Frekvencija signala se formalno može definisati kao: $f = \frac{1}{T}$ [Hz]. Ugaona frekvencija je veličina: $\omega = \frac{2\pi}{T}$ [rad/s]. Signali koji ne zadovoljavaju navedeni uslov nazivaju se aperiodični signali. Diskretni signal je periodičan ukoliko važi da je $x(n) = x(n+N)$, gdje je N cio broj, za sve vrijednosti promjenljive n . Ako ne postoji takvo N za koje je ovaj uslov ispunjen, diskretni signal je aperiodičan [2], [3].

Totalna energija kontinualnog signala definiše se kao [2], [3]:

$$E = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T/2}^{T/2} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt, \quad (1.3)$$

dok se prosječna snaga definiše kao:

$$P = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x^2(t) dt. \quad (1.4)$$

Za diskretne signale, u definicionim obrascima energije i prosječne snage integrali se zamjenjuju odgovarajućim sumama. Tako se energija diskretnog signala može definisati kao:

$$E = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)|^2, \quad (1.5)$$

dok se snaga diskretnog signala definiše kao:

$$P = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^N |x(n)|^2. \quad (1.6)$$

Navedene definicije poslužiće za prezentaciju još jedne klasifikacije signala, i to podjelu na energetske i na signale snage. Prvi tip signala je signal sa konačnom energijom. Sa druge strane, mnogi signali koji imaju beskonačnu energiju posjeduju konačnu srednju snagu. Na osnovu navedenih definicija energije i snage, može se zaključiti da signal sa konačnom energijom ima srednju snagu jednaku nuli. Ako je energija signala beskonačna, tada snaga tog signala može biti konačna ili beskonačna [3].

Zbog značaja u daljim izlaganjima na ovom mjestu biće definisana i dva karakteristična signala u kontinualnom domenu. Delta impuls se definiše kao [1]:

$$\delta(t) = 0, t \neq 0; \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1. \quad (1.7)$$

Heavyside-ova funkcija se definiše kao [1]:

$$u(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0. \end{cases} \quad (1.8)$$

Ovi signali su ilustrovani na slici 1.1 pod c) i d) respektivno.

1.2 Fourier-ova analiza

Brojni problemi i zahtjevi koji se javljaju u oblasti obrade signala usloveli su razvoj različitih matematičkih alata koji omogućavaju ili olakšavaju njihovo rješavanje. Iako su signali najčešće funkcije vremena i u tom smislu bi bilo prirodno da se njihova analiza obavlja u vremenskom domenu, to se pokazalo nepraktičnim a često i nemogućim. Stoga se često može govoriti o transformacijama signala kao funkcija od jednog tipa parametara u funkcije od nekih drugih parametara. Time se informacija koju signal sadrži može potpuno očuvati, a razlika je samo u načinu njene reprezentacije. Određene karakteristike signala kao fizičkog, odnosno teorijskog entiteta tada postaju dostupne ili izraženije čime se proces njihove analize i obrade može značajno pojednostaviti. Veoma ilustrativan i danas najviše zastupljen primjer takve matematičke aparature jeste predstavljanje signala, njegova analiza i obrada u frekvencijskom domenu.

Tokom istorije matematičke analize uočeno je da se određene klase funkcija mogu predstaviti u obliku sume sinusoida ili kompleksnih eksponencijalnih funkcija, kojima se pridružuju određeni težinski koeficijenti. Ova činjenica predstavlja jedan od fundamentalnih matematičkih koncepata koji je uslovio intenzivan razvoj obrade signala. Za signal razložen (predstavljen) na takav način se kaže da je predstavljen u spektralnom ili frekvencijskom domenu. Frekvencijski sadržaj signala se naziva spektar, a proces dobijanja i analize spektra predstavlja frekvencijsku, spektralnu ili Fourier-ovu analizu signala. U daljem razmatranju biće posmatrani jednodimenzioni signali kao funkcije vremena, pri čemu treba naglasiti da se ovaj pristup može lako generalizovati na višedimenzione signale i signale kao funkcije od prostornih koordinata.

Postoji četiri tipa Fourier-ovih reprezentacija, od kojih se svaka primjenjuje na određene klase signala, zavisno od njihove periodičnosti, i u zavisnosti od toga da li su kontinualni ili diskretni. Periodični signali se predstavljaju preko Fourier-ovih redova (FR), dok se aperiodični predstavljaju Fourier-ovom transformacijom (FT). Iako će

periodični diskretni signali prvo biti razmatrani u kontekstu Fourier-ovih redova, kasnije će biti obrazložen još jedan pristup ovoj problematici, koji je danas teorijski i praktično dominantan.

1.2.1 Fourier-ovi redovi

Ideja Fourier-ovih redova [1], [6], [7] zasniva se na predstavljanju periodičnih signala sumom sinusoidalnih funkcija, pri čemu perioda svake od tih sinusoida treba da sadrži osnovnu periodu signala, i pri čemu se svaka od njih množi sa odgovarajućim težinskim faktorom. Da bi to bilo moguće, neophodno je da je frekvencija svake takve sinusoida jednaka cjelobrojnom umnošku osnovne frekvencije signala. Aproksimacija $\hat{x}(n)$ diskretnog periodičnog signala $x(n)$ se u ovom kontekstu može zapisati na sljedeći način:

$$\hat{x}(n) = \frac{1}{N} \sum_k X_k e^{j2\pi kn/N}, \quad (1.9)$$

gdje je N perioda signala $x(n)$. Slično, kada je u pitanju kontinualni signal $x(t)$, njegova aproksimacija glasi:

$$\hat{x}(t) = \sum_n X_n e^{j2\pi nt/T}, \quad (1.10)$$

gdje je T perioda kontinualnog signala $x(t)$.

Fourier-ov red diskretnog signala

Potrebno je uočiti da u formuli (1.9) različitih kompleksnih sinusoida $e^{j2\pi kn/N}$ ima tačno N , što je posljedica njihove periodičnosti. Jedinstveni set takvih različitih sinusoida se dobija tako što promjenljiva k varira uzimajući bilo koji opseg od N uzastopnih vrijednosti. Najčešći izbori takvog skupa vrijednosti za k su od 0 do $N - 1$ i od $-N/2$ do $N/2 - 1$ (za parno N). Za kompleksne sinusoida $e^{j2\pi kn/N}$, čije su frekvencije definisane cjelobrojnim umnoškom osnovne frekvencije kaže se da zadovoljavaju uslov ortogonalnosti [1], [3], jer je njihov skalarni proizvod jednak nuli:

$$\begin{aligned} \langle e^{j2\pi kn/N}, e^{j2\pi mn/N} \rangle &= \sum_{n=0}^{N-1} e^{j2\pi kn/N} [e^{j2\pi mn/N}]^* = \sum_{n=0}^{N-1} e^{j2\pi n(k-m)/N} \\ &= \begin{cases} N, & \text{za } m = k \\ \frac{1 - e^{j2\pi(k-m)}}{1 - e^{j2\pi(k-m)/N}} = 0, & \text{za } m \neq k, \end{cases} \end{aligned} \quad (1.11)$$

gdje je iskorišćeno da je $e^{j2\pi(k-m)} = 1$. Sinusoida $e^{j2\pi kn/N}$ se zovu bazne funkcije, i kao što će biti pokazano, koeficijenti Fourier-ovog reda se mogu računati kao projekcije signala na njegove bazne funkcije. U tom smislu se često posmatraju skalirane vrijednosti koeficijenata, pa je zato u formuli (1.9) stavljen skalirajući faktor $1/N$.

U slučaju periodičnog diskretnog signala $x(n)$, sa periodom N određivanje koeficijenata X_k svodi se na minimizaciju [3] srednje kvadratne greške (MSE) između signala i njegove aproksimacije redom (1.9):

$$MSE = \sum_{n=\langle N \rangle} |x(n) - \hat{x}(n)|^2 = \sum_{n=\langle N \rangle} \left| x(n) - \frac{1}{N} \sum_{k=\langle N \rangle} X_k e^{j2\pi kn/N} \right|^2, \quad (1.12)$$

gdje $\langle N \rangle$ označava da se sumiranje vrši uzimanjem bilo kojih uzastopnih N vrijednosti u redu (1.9). Daljim rješavanjem (1.12) dobija se:

$$\begin{aligned} MSE &= \sum_{n=\langle N \rangle} \left\{ \left(x(n) - \frac{1}{N} \sum_{k=\langle N \rangle} X_k e^{j2\pi kn/N} \right) \left(x(n) - \frac{1}{N} \sum_{m=\langle N \rangle} X_m e^{j2\pi mn/N} \right)^* \right\} = \\ &= \sum_{n=\langle N \rangle} |x(n)|^2 - \sum_{m=\langle N \rangle} X_m^* \left(\frac{1}{N} \sum_{n=\langle N \rangle} x(n) e^{-j2\pi mn/N} \right) \\ &\quad - \sum_{k=\langle N \rangle} X_k \left(\frac{1}{N} \sum_{n=\langle N \rangle} x^*(n) e^{j2\pi kn/N} \right) + \frac{1}{N} \sum_{k=\langle N \rangle} \sum_{m=\langle N \rangle} X_m^* X_k \left(\frac{1}{N} \sum_{n=\langle N \rangle} e^{j2\pi(k-m)n/N} \right). \end{aligned}$$

Korišćenjem svojstva ortogonalnosti (1.11) za posljednji član dobijene MSE , odgovarajućim (dozvoljenim) preimenovanjem indeksa i uvođenjem oznake

$$X(k) = \sum_{n=\langle N \rangle} x(n) e^{-j2\pi nk/N}, \quad (1.13)$$

izraz za MSE se može napisati na sljedeći način:

$$MSE = \sum_{n=\langle N \rangle} |x(n)|^2 - \frac{1}{N} \sum_{k=\langle N \rangle} X_k^* X(k) - \frac{1}{N} \sum_{k=\langle N \rangle} X_k X^*(k) + \frac{1}{N} \sum_{k=\langle N \rangle} |X_k|^2. \quad (1.14)$$

Prethodni izraz se dalje može modifikovati:

$$\begin{aligned} MSE &= \sum_{n=\langle N \rangle} |x(n)|^2 - \frac{1}{N} \sum_{k=\langle N \rangle} X_k^* X(k) - \frac{1}{N} \sum_{k=\langle N \rangle} X_k X^*(k) + \frac{1}{N} \sum_{k=\langle N \rangle} |X_k|^2 \\ &\quad + \frac{1}{N} \sum_{k=\langle N \rangle} |X(k)|^2 - \frac{1}{N} \sum_{k=\langle N \rangle} |X(k)|^2, \end{aligned} \quad (1.15)$$

što dalje vodi do:

$$MSE = \sum_{n=\langle N \rangle} |x(n)|^2 + \frac{1}{N} \sum_{k=\langle N \rangle} |(X_k - X(k))|^2 - \frac{1}{N} \sum_{k=\langle N \rangle} |X(k)|^2. \quad (1.16)$$

Iz prethodne relacije može se uočiti da MSE zavisi od nepoznatih koeficijenata X_k

samo u središnjem članu koji je uvijek nenegativan. Otuda se može zaključiti da će MSE biti minimizovana za $X_k = X(k)$. Ovdje treba uočiti i činjenicu da su koeficijenti $X(k)$ periodični, sa periodom N što se lako može pokazati. Vrijednost MSE daje informaciju o tome koliko dobro signal $\hat{x}(n)$ aproksimira signal $x(n)$. Minimum MSE dobiće se uvrštavanjem $X_k = X(k)$ u prethodni izraz. Tada on postaje:

$$MSE = \sum_{n=\langle N \rangle} |x(n)|^2 - \frac{1}{N} \sum_{k=\langle N \rangle} |X(k)|^2. \quad (1.17)$$

Korišćenjem relacije (1.13) za desnu sumu u (1.17) dobija se sljedeći izraz:

$$\sum_{k=\langle N \rangle} |X(k)|^2 = \frac{1}{N^2} \sum_{k=\langle N \rangle} \sum_{n=\langle N \rangle} \sum_{m=\langle N \rangle} x(n)x^*(m)e^{j2\pi(m-n)k/N}. \quad (1.18)$$

Kako važi da je

$$\sum_{k=\langle N \rangle} e^{j2\pi(m-n)k/N} = \begin{cases} N, & m = n \\ 0, & m \neq n \end{cases} \quad (1.19)$$

dobija se sljedeća veza:

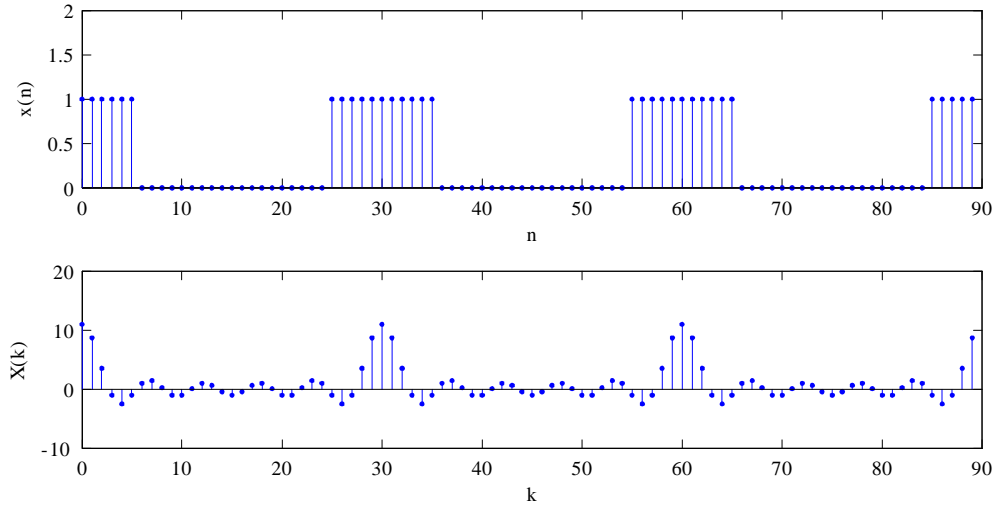
$$\frac{1}{N} \sum_{k=\langle N \rangle} |X(k)|^2 = \sum_{n=\langle N \rangle} |x(n)|^2 \quad (1.20)$$

Izraz (1.20) ujedno predstavlja Parseval-ovu teoremu za Diskretnu Fourier-ovu transformaciju [1], [2], [4]. Imajući u vidu izraz (1.5) za energiju signala, teorema predstavlja matematičku interpretaciju zakona o održanju energije u obradi signala. Uvrštavanjem ovog izraza u formulu za MSE dobija se da je $MSE = 0$. Budući da se dobija takav rezultat, jasno je da je u tom slučaju $x(n) = \hat{x}(n)$. Drugim riječima, periodični diskretni signal se može jednoznačno reprezentovati formulama:

$$x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=\langle N \rangle} X_k e^{j2\pi kn/N}, \quad (1.21)$$

$$X_k = \sum_{n=\langle N \rangle} x(n) e^{-j2\pi kn/N}, \quad (1.22)$$

koje predstavljaju relacije za Fourier-ov red periodičnog diskretnog signala [3]. Na osnovu N vrijednosti X_k može se odrediti signal $x(n)$. Tako i $x(n)$ i X_k obezbjeđuju jednoznačan i potpun opis istog signala. Za njih se može reći da predstavljaju transformacioni par. Za rješavanje određene klase problema može biti poželjnija jedna, a za druge druga reprezentacija signala. Za FR diskretnog signala se kaže da predstavlja signal $x(n)$ u frekvencijskom domenu, jer svaki od njegovih koeficijenata vezan je za kompleksnu sinusoidu na različitoj frekvenciji. Moduo kompleksnog niza X_k , $|X_k|$ zove se amplitudski spektar signala $x(n)$, dok se njegov argument, $\arg\{X_k\}$, zove spektar faze signala $x(n)$. FR diskretnog signala može se numerički računati primjenom računara, jer su i signal i



Slika 1.2: Periodični diskretni signal i njegov Fourier-ov red (DFT)

njegov Fourier-ov red diskretne funkcije, definisane konačnim skupom od N vrijednosti. Kasnije će biti pokazano da FR diskretnog signala predstavlja diskretnu Fourier-ovu transformaciju (DFT).

Primjer: Signal $x(n)$ koji je definisan izrazom:

$$x(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x_0(n + 30m)$$

gdje je $x_0(n) = u(n + 5) - u(n - 6)$ i $N = 30$ predstavlja osnovnu periodu signala $x(n)$, ilustrovan je na slici 1.2 a). Koeficijenti njegovog Fourier-ovog reda prikazani su na slici 1.2 b). Potrebno je naglasiti da su zbog parnosti signala $x_0(t)$ dobijeni realni koeficijenti, pa stoga na datoj slici nijesu prikazani njihovi moduli, već prave vrijednosti.

Fourier-ov red kontinualnog signala

Pod određenim uslovima, i periodični kontinualni signali mogu biti razvijeni u sumu kompleksnih sinusoida sa pridruženim težinskim faktorima. Takav razvoj signala $x(t)$, periodičnog u vremenu sa osnovnom periodom T i u ovom slučaju naziva se Fourier-ov red. FR kontinualnog signala može sadržati beskonačno mnogo članova [3]. Pomoću njega kontinualni periodični signal $x(t)$ može se predstaviti na sljedeći način [1], [3], [7]:

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_n e^{j2\pi nt/T}, \quad (1.23)$$

gdje su funkcije $e^{j2\pi nt/T}$, $-\infty < n < \infty$ ortogonalne kompleksne sinusoide, imajući u vidu da njihov skalarni proizvod zadovoljava uslove ortogonalnosti:

$$\langle e^{j2\pi mt/T}, e^{j2\pi nt/T} \rangle = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} e^{j2\pi mt/T} e^{-j2\pi nt/T} dt = \begin{cases} 1, & \text{za } m = n \\ \frac{\sin(\pi(m-n))}{\pi(m-n)} = 0, & \text{za } m \neq n. \end{cases} \quad (1.24)$$

Pretpostavimo da se periodični kontinualni signal može samo aproksimirati pomoću FR, pri čemu je njegova aproksimacija $\hat{x}(t)$ data sa:

$$\hat{x}(t) = \sum_n X_n e^{j2\pi nt/T}. \quad (1.25)$$

U slučaju da je $x(t) = \hat{x}(t)$ tada će važiti i jednakost:

$$\int_{\langle T \rangle} x(t) e^{-jm\omega_0 t} dt = \int_{\langle T \rangle} \hat{x}(t) e^{-jm\omega_0 t} dt, \quad (1.26)$$

gdje je sa $\langle T \rangle$ označeno da se integracija vrši po jednoj periodi kontinualnog signala, a $\omega_0 = 2\pi/T$. Dalje se može pisati, imajući u vidu (1.25) sljedeće:

$$\int_{\langle T \rangle} x(t) e^{-jm\omega_0 t} dt = \int_{\langle T \rangle} \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_n e^{jn\omega_0 t} e^{-jm\omega_0 t} dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_n \int_{\langle T \rangle} e^{jn\omega_0 t} e^{-jm\omega_0 t} dt. \quad (1.27)$$

Na osnovu pokazanog svojstva ortogonalnosti (1.24) slijedi:

$$\int_{\langle T \rangle} x(t) e^{-jm\omega_0 t} dt = X_n T. \quad (1.28)$$

Dakle, u slučaju kada važi $x(t) = \hat{x}(t)$ tada se n -ti koeficijent Fourier-ovog reda (1.23) može računati po formuli:

$$X_n = \frac{1}{T} \int_{\langle T \rangle} x(t) e^{-jm\omega_0 t} dt. \quad (1.29)$$

Funkcije $e^{j2\pi nt/T}$ se i ovdje nazivaju bazne funkcije, koeficijenti X_n su koeficijenti Fourier-ovog reda (1.23), poznati kao harmonici [3]. Relacija (1.24) kaže da je skalarni proizvod dvije različite bazne funkcije jednak nuli. Takav ortogonalni set baznih funkcija omogućava da se koeficijenti X_n Fourier-ovog reda mogu računati kao projekcije signala $x(t)$ na bazne funkcije $e^{-j2\pi nt/T}$, odnosno [1]:

$$X_n = \langle x(t), e^{j2\pi nt/T} \rangle = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-j2\pi nt/T} dt. \quad (1.30)$$

Treba imati na umu da su i signal i bazne funkcije periodične, sa periodom T , pa je

stoga moguće pisati [1]:

$$\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-j2\pi nt/T} dt = \frac{1}{T} \int_{-T/2+\Lambda}^{T/2+\Lambda} x(t) e^{-j2\pi nt/T} dt, \quad (1.31)$$

gdje Λ predstavlja proizvoljnu konstantu.

Postavlja se pitanje pod kojim uslovima FR dat relacijom (1.23) čiji se koeficijenti računaju po (1.30) konvergira ka signalu $x(t)$ kojeg aproksimira. Pitanje je matematički kompleksno, i poznato je da ukoliko je zadovoljen uslov da je:

$$\frac{1}{T} \int_{\langle T \rangle} |x(t)|^2 dt < \infty, \quad (1.32)$$

tada je MSE između $x(t)$ i njegove aproksimacije jednaka nuli [3]. Ovo znači da pod tim uslovom je energija greške jednaka nuli, ali ne i da ovi signali moraju biti jednaki u svim tačkama. Ipak, u praksi se ovaj uslov često koristi. Potrebni i dovoljni uslovi za egzistenciju razmatranog FR su nešto strožiji i poznati su kao Dirichet-ovi uslovi [1], [3]:

- signal mora imati konačan broj prekida unutar periode T
- signal mora imati konačnu srednju vrijednost unutar periode T ,
- signal mora imati konačan broj minimuma i maksimuma.

Primjer 1.3 Signal $x(t)$, koji se u osnovnom periodu može zapisati u obliku:

$$x(t) = \begin{cases} -1, & -\pi \leq t < 0 \\ 1, & 0 \leq t < \pi \end{cases} \quad (1.33)$$

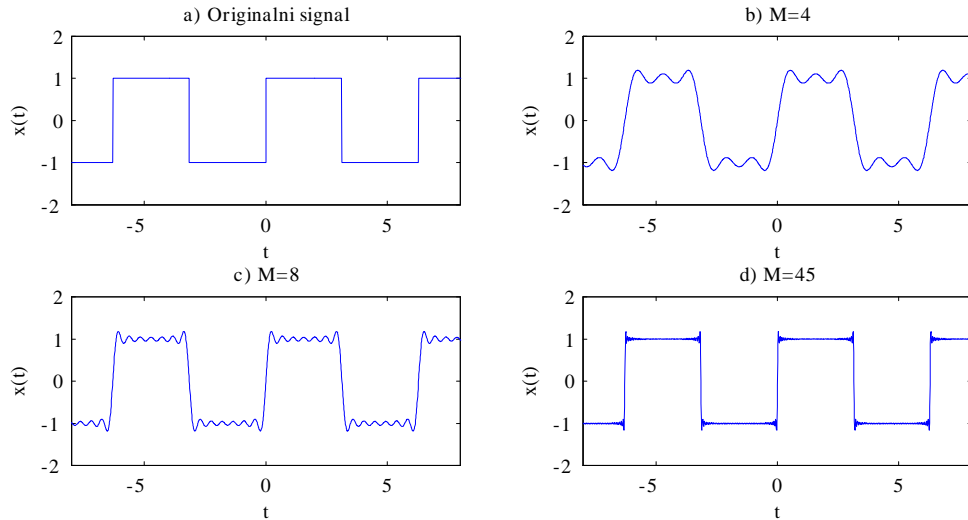
može se razviti u FR oblika:

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_n e^{j2\pi nt/T} = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)} \sin((2n-1)t). \quad (1.34)$$

Originalni signal i njegove aproksimacije Fourier-ovim redom sa $M = 4$, $M = 8$ i $M = 45$ harmonika prikazani su na slici 1.3.

1.2.2 Fourier-ove transformacije

Dok je periodične signale, kao što je pokazano u prethodnom poglavlju, moguće razložiti u sumu kompleksnih sinusoida, za slučaj signala sa konačnom energijom ekvivalentna dekompozicija poznata je pod nazivom Fourier-ova transformacija.



Slika 1.3: Aproksimacija periodičnog signala Fourier-ovim redom: a) originalni signal; b) aproksimacija Fourier-ovim redom od 4 harmonika; c) aproksimacija Fourier-ovim redom od 8 harmonika; d) aproksimacija Fourier-ovim redom od 45 harmonika

Fourier-ova transformacija diskretnog signala

U cilju uvođenja koncepta FT diskretnog signala, aperiodični signal se može posmatrati kao granični slučaj periodičnog - onog čija perioda teži beskonačnosti [3], [6]. Neka se posmatra periodični signal, sa periodom $M = 2N + 1$ koji se u osnovnoj periodi može zapisati kao:

$$x(n) = \begin{cases} \hat{x}(n), & |n| \leq M \\ 0, & |n| > M. \end{cases} \quad (1.35)$$

Ako se posmatra samo jedna perioda tog signala, gdje važi: $M \rightarrow \infty$, aperiodični signal se sa tog stanovišta može definisati kao $x(n) = \lim_{M \rightarrow \infty} \hat{x}(n)$, jer se može smatrati da se u tom slučaju sve ostale periode, osim posmatrane „udaljavaju” u beskonačnost. Koristeći ranije uvedenu relaciju za FR disretnog signala (ili DFT), za signal unutar jedne periode koeficijenti FR mogu se računati po formuli:

$$X(k) = \sum_{n=-M}^M x(n) e^{-j2\pi kn/N}. \quad (1.36)$$

Kako važi da $M \rightarrow \infty$, tada se može smatrati da je $2\pi/N = 2\pi/(2M + 1) = d\omega$ diferencijalno malo, i uvesti oznaka da je $k2\pi/(2M + 1) = \omega$. Ovim zapravo rastojanje između harmonika postaje sve manje kako M teži beskonačnosti, i u graničnom slučaju ono postaje infinitezimalno malo, pa se može smatrati da se frekvencije harmonika (sinusoidalnih komponenti) kontinualno mijenjaju. Otuda oznaka ω za njihove frekvencije. Pod ovim uslovima, uz uvođenje nove oznake za kontinualnu funkciju od frekvencije predstavljenu prethodnom sumom i odgovarajuće granice za sumu, dobija se formula

za Fourier-ovu transformaciju diskretnog signala [1], [2], [4], [6]:

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\omega n}. \quad (1.37)$$

Ovdje se može napomenuti da je $X(e^{j\omega})$ periodična sa periodom 2π . Na sličan način, korišćenjem formule za FR diskretnog signala (DFT), uz označavanje $X(k) = X(e^{j2\pi kn/N})$, dobija se:

$$x(n) = \frac{1}{2M+1} \sum_{k=-M}^M X(e^{j2\pi kn/N}) e^{j2\pi kn/N} = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-M}^M \frac{2\pi}{2M+1} X(e^{j2\pi kn/N}) e^{j2\pi kn/N}. \quad (1.38)$$

U graničnom slučaju, tj. kad važi

$$x(n) = \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-M}^M \frac{2\pi}{2M+1} X(e^{j2\pi kn/N}) e^{j2\pi kn/N} \quad (1.39)$$

kao što je rečeno, rastojanje između harmonika postaje diferencijalno malo, pa važi $2\pi/(2M+1) = d\omega$. Vrijednosti $X(e^{j2\pi kn/N}) e^{j2\pi kn/N}$ računaju se u tačkama $2\pi kn/N$ i množe sa rastojanjem između njih, pa ovo predstavlja aproksimaciju integrala pravougaonim pravilom. Stoga prethodni limes predstavlja integral:

$$x(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega, \quad (1.40)$$

pa se može reći da signal $x(n)$ i njegova FT $X(e^{j\omega})$ dati relacijama (1.37) i (1.40) predstavljaju Fourier-ov transformacioni par.

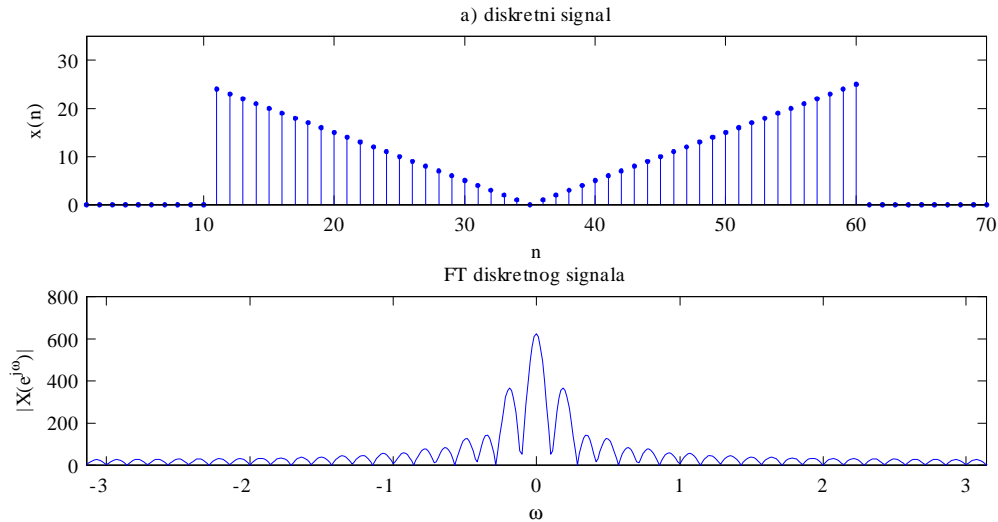
Suma FR u (1.37) će uniformno konvergirati ako je zadovoljen uslov [2], [3]:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)| < \infty.$$

U praksi, često se koristi manje strog uslov za egzistenciju razmatrane Fourier-ove transformacije [12]:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)|^2 < \infty. \quad (1.41)$$

I ovdje se, kao u slučaju FR definišu amplitudska i fazna karakteristika (spektar). U slučaju realnih signala one imaju osobine da su parna, odnosno neparna funkcija, respektivno. Može se uočiti da je zbog periodičnosti kompleksnih sinusoida $e^{-j\omega n}$ sa periodom 2π Fourier-ova transformacija diskretnih signala takođe periodična funkcija sa tom istom osnovnom periodom, i unutar te periode jednoznačna. Takođe, treba naglasiti



Slika 1.4: Ilustracija Fourier-ove transformacije diskretnog signala: a) aperiodični diskretni signal; b) FT tog signala

da se radi o kontinualnoj funkciji, iako je signal $x(n)$ diskretan.

Primjer 1.4 Aperiodični diskretni signal $x(n) = |n - 35|[u(n - 11) - u(n - 61)]$ prikazan je na slici 1.4 a). Spektar njegove FT prikazan je na slici 1.4 b). Signal $u(n)$ je diskretna jedinična step funkcija, definisana kao [1], [2]:

$$u(n) = \begin{cases} 1, & n \geq 0 \\ 0, & n < 0. \end{cases} \quad (1.42)$$

Fourier-ova transformacija kontinualnog signala

U slučaju kontinualnih aperiodičnih signala razvoj u Fourierov red nije moguće izvršiti. Sličnom generalizacijom Fourier-ovih redova kao u slučaju diskretnih aperiodičnih signala i u slučaju kontinualnih se dolazi do sličnih zaključaka [3]. Aperiodični kontinualni signal se primjenom FT reprezentuje kao superpozicija kompleksnih sinusoida. Ove kompleksne sinusoida obuhvataju kontinuum mogućih vrijednosti za frekvencije, tj. $-\infty < \Omega < \infty$. Ovo znači da signal može imati beskonačan frekvencijski opseg. FT kontinualnog signala se definiše kao [1], [3]-[7]:

$$X(j\Omega) = FT\{x(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\Omega t} dt, \quad (1.43)$$

gdje je $FT[\cdot]$ operator Fourier-ove transformacije. Pomoću inverzne Fourierove transformacije signal se može vratiti u vremenski domen:

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\Omega) e^{j\Omega t} d\Omega. \quad (1.44)$$

Kaže se da signal i njegova FT čine Fourier-ov transformacioni par. Uslovi za egzistenciju FT koje kontinualni signal $x(t)$ mora zadovoljavati, poznati kao Dirichet-ovi, glase [1], [3]-[7]:

- signal mora imati konačan broj prekida;
- signal mora imati konačan broj maksimuma i minimuma;
- signal mora biti apsolutno integrabilan, tj:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| < \infty. \quad (1.45)$$

Međutim, za široku klasu signala često je moguće primijeniti manje strog uslov za egzistenciju FT, po kojem se zahtijeva da signal treba da ima konačnu energiju [6], [12]:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 < \infty. \quad (1.46)$$

Očigledno, Fourierova transformacija $X(j\Omega)$ je kompleksna i kontinualna funkcija. Moduo Fourierove transformacije $|X(\omega)|$ poznat je kao amplitudska karakteristika signala i u slučaju realnih predstavlja parnu funkciju, dok $\arg(X(\Omega)) = -\arctan(\text{Re}\{X(\Omega)\}/\text{Im}\{X(\Omega)\})$ predstavlja faznu karakteristiku koja je neparna funkcija od frekvencije za slučaj realnih signala.

Neke osobine FT kontinualnih signala

Pošto su od značaja za dalje izlaganje, ovdje će biti navedene neke osobine FT [1], [11].

1. Linearnost. U opštem slučaju bilo koje transformacije, pod linearnošću se podrazumijeva da ukoliko je signal dat u obliku linearne kombinacije signala: $x(t) = \sum_{i=1}^M c_i x_i(t)$ važi da je transformacija tog signala, $\Upsilon[x(t)]$, data kao linearna kombinacija transformacija pojedinih signala iz kojih se sastoji:

$$\Upsilon[x(t)] = \sum_{i=1}^M c_i \Upsilon[x_i(t)]. \quad (1.47)$$

U slučaju Fourierove transformacije ovo je evidentno iz njene definicije kao integralne transformacije, odnosno iz činjenice da je integral linearne kombinacije podintegralnih funkcija jednak linearnoj kombinaciji integrala pojedinačnih funkcija.

2. Pomjeranje u vremenu. Ukoliko je signal dat u obliku $x(t) = f(t - t_0)$, tada za njegovu Fourierovu transformaciju važi:

$$X(j\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\Omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t_1)e^{-j\Omega t_1} e^{-j\Omega t_0} dt_1 = F(\Omega)e^{-j\Omega t_0}. \quad (1.48)$$

3. Modulacija. Množenje signala $f(t)$ kompleksnim eksponencijalnim članom, to jest $x(t) = f(t)e^{j\Omega_0 t}$ utiče na sljedeći način na njegovu Fourierovu transformaciju:

$$X(j\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\Omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{j\Omega_0 t} e^{-j\Omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j(\Omega t_1 - \Omega_0 t)} dt = F(\Omega - \Omega_0). \quad (1.49)$$

4. Diferenciranje. Fourierova transformacija signala diferenciranog u vremenskom domenu, $x(t) = \frac{df(t)}{dt}$, jednaka je:

$$X(j\Omega) = j\Omega F(\Omega). \quad (1.50)$$

Dokaz. Polazeći od formule za inverznu FT (1.44) diferenciranjem njene lijeve i desne stranu po promjenljivoj t dobija se:

$$\begin{aligned} \frac{df(t)}{dt} &= \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(j\Omega) e^{-j\Omega t} d\Omega \right] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\Omega) \frac{d}{dt} (e^{-j\Omega t}) d\Omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [j\Omega F(\Omega)] e^{-j\Omega t} d\Omega. \end{aligned}$$

5. Realnost FT. Ako je $x^*(-t) = x(t)$, za FT važi: $X^*(j\Omega) = X(j\Omega)$. Ovo je takođe jednostavno dokazati:

$$X^*(j\Omega) = \left[\int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\Omega t} dt \right]^* = \int_{-\infty}^{\infty} x^*(t)e^{j\Omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(-t)e^{-j\Omega t} dt = X(j\Omega). \quad (1.51)$$

6. Konvolucija signala u vremenskom domenu. Konvolucija signala $x_1(t)$ i $x_2(t)$, koja se označava kao $y(t) = x_1(t) * x_2(t)$, definiše se na sljedeći način:

$$y(t) = x_1(t) * x_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x_1(\tau)x_2(t - \tau)d\tau \quad (1.52)$$

Fourier-ova transformacija konvolucije može se napisati izrazom:

$$Y(j\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x_1(t) * x_2(t) e^{-j\Omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} x_1(\tau) x_2(t - \tau) d\tau \right] e^{-j\Omega t} dt. \quad (1.53)$$

Uvodeći smjenu $t = \tau + y$ dobija se:

$$\begin{aligned} Y(j\Omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} x_1(\tau) d\tau \int_{-\infty}^{\infty} x_2(y) e^{-j\Omega(\tau+y)} dy = \int_{-\infty}^{\infty} x_1(\tau) e^{-j\Omega\tau} d\tau \int_{-\infty}^{\infty} x_2(y) e^{-j\Omega y} dy \\ &= X_1(\Omega) X_2(\Omega). \end{aligned} \quad (1.54)$$

što znači da konvoluciji u vremenskom domenu odgovara proizvod u frekvencijskom domenu.

7. Proizvod u vremenskom domenu:

$$\begin{aligned} FT\{x(t)h(t)\} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \int_{-\infty}^{\infty} H(\theta) e^{j\theta t} d\theta e^{-j\Omega t} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H(\theta) X(\Omega - \theta) d\theta \\ &= X(\Omega) *_{\Omega} H(\Omega) = H(\Omega) *_{\Omega} X(\Omega). \end{aligned} \quad (1.55)$$

9. Parseval-ova teorema. Za signale $x(t)$ i $y(t)$, za koje postoje FT označene sa $X(\Omega)$ i $Y(\Omega)$ respektivno, važi Parseval-ova teorema:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t) y^*(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\Omega) Y^*(\Omega) d\Omega. \quad (1.56)$$

Specijalno, ako važi da je $y(t) = x(t)$, tada se ova teorema zapisuje u obliku:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |X(\Omega)|^2 d\Omega. \quad (1.57)$$

Kako izraz sa lijeve strane predstavlja energiju signala, to ova relacija definiše energiju u frekvencijskom domenu, izrazom sa desne strane.

10 Integracija $\int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau$ se može u Fourier-ovom domenu interpretirati na sljedeći način:

$$x(t) *_t u(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) u(t - \tau) d\tau = \int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau \quad (1.58)$$

$$\begin{aligned} FT\left\{\int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau\right\} &= FT\{x(t)\} FT\{u(t)\} = X(j\Omega) \left[\frac{1}{j\Omega} + \pi\delta(\Omega)\right] \\ &= \frac{1}{j\Omega} X(j\Omega) + \pi X(0)\delta(\Omega). \end{aligned} \quad (1.59)$$

Diskretni signali dobijeni odabiranjem analognih

Zbog izuzetnog teorijskog i praktičnog značaja, ovdje će biti proširena tema o odabiranju signala. Veoma široku i bitnu klasu diskretnih signala, kao što je naglašeno, predstavljaju diskretni signali dobijeni odabiranjem kontinualnih. Takođe, već je spomenuto da je spektar diskretnog signala ograničen na interval širine 2π . Posmatrajmo diskretni signal $x(n)$ dobijen odabiranjem kontinualnog signala $x(t)$. Teorema o odabiranju pretpostavlja ograničenost spektra analognog signala, pa se, drugim riječima, podrazumijeva da važi [2], [12]:

$$X(\Omega) = 0 \text{ za } |\Omega| > \Omega_m, \quad (1.60)$$

odnosno da postoji maksimalna učestanost kontinualnog signala iznad koje se može smatrati da su frekvencijske komponente jednake nuli. Često se, međutim, smatra da se komponente izvan neke određene frekvencije Ω_m mogu zanemariti. Tada je odabiranjem signala korakom $\Delta t \leq \pi/\Omega_m = 1/2f_m$ moguće potpuno očuvati informaciju koju signal sadrži, i po potrebi rekonstruisati u potpunosti polazni kontinualni signal.

Već je rečeno da je veza između analognog i diskretnog signala data sa: $x(n) = x(n\Delta t)$. Takođe, postoji veza između kružne frekvencije analognog i kružne frekvencije odgovarajućeg diskretnog signala. Ako se na primjer posmatra sinusni signal:

$$x_a(t) = \sin(\Omega_1 t), \quad (1.61)$$

tada se njegovim odabiranjem dobija diskretni signal:

$$x(n) = x_a(n\Delta t) = \sin(\Omega_1 n\Delta t) = \sin(n\omega_1). \quad (1.62)$$

Uočava se da važi da je:

$$\omega = \Omega\Delta t, \quad (1.63)$$

za koje važi da je: $-\pi \leq \omega \leq \pi$.

Odabiranjem signala u vremenskom domenu sa periodom Δt vrši se njegovo periodično produžavanje u frekvencijskom domenu, sa periodom $\Omega_o = 2\pi/T$. Odavde je jasno zbog čega spektar analognog signala treba da bude ograničen. Ako nije ograničen, ili ako nije zadovoljen uslov (1.1), iz tog razloga će doći do preklapanja spektralnih komponenti originalnog spektra analognog signala, i spektralnih komponenti dobijenih njegovim periodičnim produžavanjem. Navedena pojava poznata je pod nazivom aliasing [1], [6].

Diskretna Fourier-ova transformacija

Pošto digitalna obrada signala podrazumijeva upotrebu digitalnog hardvera za računanje njenih transformacija i metoda, a FT diskretnog signala (1.37) predstavlja kontinualnu funkciju, to se prirodno nameće pitanje njene diskretizacije. Predstavljanje frekvencijskog sadržaja diskretnog signala $x(n)$ odbircima njegove FT $X(e^{j\omega})$ poznato je kao diskretna Fourier-ova transformacija. Da bi se diskretni signal $x(n)$ mogao diskretizovati, neophodno je da bude ograničenog trajanja N u vremenu. Odabiranjem njegove FT $X(e^{j\omega})$ sa korakom $\Delta\omega = 2\pi/N$, vrši se periodično produžavanje signala u vremenskom domenu, a ujedno dobijaju odbirci DFT-a [1]-[12]:

$$X(k) = X(e^{j\omega})\big|_{\omega=2\pi k/N} = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}, \quad (1.64)$$

odakle je očigledno zbog čega signal mora biti ograničenog trajanja u vremenu (što je u praksi uvijek slučaj). Da nije tako, došlo bi do preklapanja komponenti signala u vremenskom domenu, jer se njegovo periodično produžavanje vrši sa periodom N , pa treba biti ispunjeno da je odabiranje sprovedeno tako da se uzme najmanje N odbiraka njegove FT. Množenjem izraza (1.64) sa $e^{j(2\pi/N)km}$ i sumiranjem po k , od 0 do $N - 1$ dobija se:

$$\sum_{k=0}^{N-1} X(k)e^{j(\frac{2\pi}{N})km} = \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-j\frac{2\pi}{N}k(n-m)} = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \sum_{k=0}^{N-1} e^{-j\frac{2\pi}{N}k(n-m)}, \quad (1.65)$$

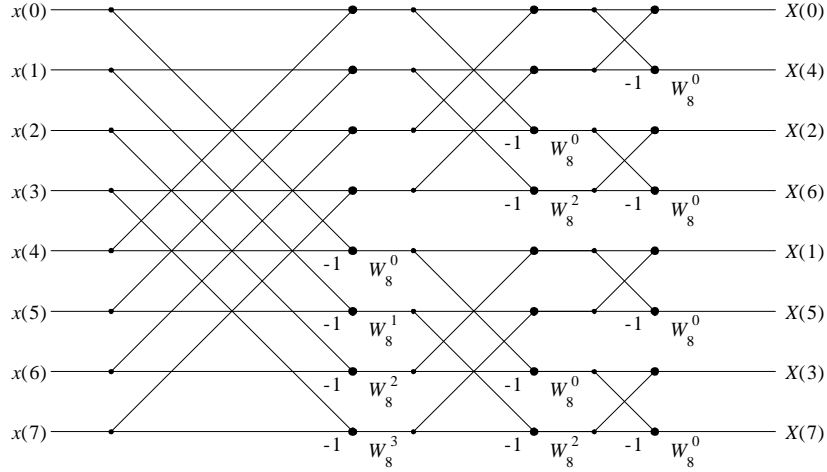
što se, imajući u vidu ranije izvedenu relaciju (1.11) svodi na:

$$x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k)e^{j\frac{2\pi}{N}kn}, \quad (1.66)$$

što predstavlja izraz za inverznu DFT (IDFT). Upoređujući (1.64) i (1.66) sa ranije dobijenim izrazima za FR diskretnog signala (1.22) i (1.21), vidimo da su identični. Evidentno, FR diskretnog signala predstavlja još jednu interpretaciju diskretne Fourier-ove transformacije. Budući da su ekvivalentna svojstvima FT kontinualnog signala, na ovom mjestu neće biti navođena svojstva DFT-a.

Algoritmi za brzo računanje DFT-a

Algoritmi za brzo računanje DFT-a (FFT) omogućavaju numerički veoma efikasan proračun ove transformacije. Do danas je razvijen veliki broj ovih algoritama, koji se primjenjuju u zavisnosti od traženog broja frekvencijskih tačaka N . Ovdje će biti posmatran najjednostavniji slučaj, kada je $N = 2^m$, gdje je m cio broj. Algoritam koji će biti razmatran, u literaturi [1], [2] je poznat kao algoritam razbijanja po frekvenciji



Slika 1.5: Ilustracija algoritma razbijanja po frekvenciji za $N = 8$

(Radix-2). Algoritam omogućava da se DFT od N tačaka razbije na dvije DFT-a od $N/2$ tačaka, koji se dalje razbijaju na $N/4$ itd. rekurzivno. Posmatra se transformacioni par: signal $x(n)$ i njegova DFT $X(k)$. Signal se može podijeliti na dva dijela, pa za njegovu DFT važi:

$$\begin{aligned}
 X(k) &= \sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-j2\pi nk/N} = \sum_{n=0}^{N/2-1} x(n)e^{-j2\pi nk/N} + \sum_{n=N/2}^{N-1} x(n)e^{-j2\pi nk/N} \\
 &= \sum_{n=0}^{N/2-1} [x(n) + x(n + N/2)(-1)^k] e^{-j2\pi nk/N} \quad (1.67)
 \end{aligned}$$

Za parne frekvencijske indekse $k = 2r$ važi sljedeće:

$$X(2r) = \sum_{n=0}^{N/2-1} g(n)e^{-j2\pi nr/(N/2)}, \quad (1.68)$$

gdje je uvedena oznaka $g(n) = x(n) + x(n + N/2)$. Slično se dobija i za neparne indekse $k = 2r + 1$:

$$X(2r + 1) = \sum_{n=0}^{N/2-1} h(n)e^{-j2\pi nr/(N/2)}, \quad (1.69)$$

gdje je uvedena oznaka $h(n) = (x(n) - x(n + N/2))e^{-j2\pi n/N}$. Na ovaj način se DFT od N tačaka razbija na 2 DFT-a od $N/2$ tačaka. U trećoj glavi biće procijenjena složenost ovog algoritma, koja je reda $N \log_2 N$, što predstavlja ogromno poboljšanje u smislu smanjena numeričke kompleksnosti, u odnosu na računanje DFT-a direktnim putem, za šta je procijenjena složenost reda N^2 . Šema potpunog razbijanja [1] po frekvenciji za slučaj $N = 8$ prikazana je na slici 1.5.

Glava 2

Vremensko-frekvencijska analiza

Iako Fourier-ova transformacija može značajno pojednostaviti analizu signala u odnosu na onu u vremenskom domenu, za određene klase signala FT ipak nije pravi izbor. Iako moduo Fourierove transformacije, to jest amplitudska karakteristika pruža značajne informacije o spektralnom sadržaju signala, odnosno, o tome kako su raspoređene komponente signala u frekvencijskom domenu, ona ne daje informacije o tome kako je spektralni sadržaj signala raspoređen u vremenu, to jest, informacije o trenucima pojavljivanja i trajanju komponenti u slučaju signala čiji je spektralni sadržaj vremenski promjenljiv. Takođe, u slučaju multikomponentnih signala FT ne može dati informaciju o širini spektra njihovih pojedinih komponenti. Neke od ovih informacija su djelimično sadržane u faznoj karakteristici, međutim, veoma teško se mogu iskoristiti. Navedene činjenice nijesu problematične u slučaju stacionarnih signala, kod kojih ne postoje promjene frekvencijskih komponenti signala tokom vremena. Međutim, kod nestacionarnih signala, koji su veoma zastupljeni u praksi, frekvencija signala se mijenja tokom vremena, a pojedine frekvencijske komponente mogu imati proizvoljno trajanje, i pojavljivati se u proizvoljnim trenucima. Već se posmatranjem svojstva (1.48) može uočiti da i kod pomjerenih signala oblika $x(t) = f(t - t_0)$ amplitudska karakteristika njegove Fourierove transformacije je jednaka amplitudskoj karakteristici signala $f(t)$, jer važi da je $|F(\omega)e^{-j\omega t_0}| = |F(\omega)|$. Ovakvi nedostaci analize u Fourier-ovom i u vremenskom domenu razlog su uvođenja vremensko-frekvencijskih (TF) reprezentacija signala [1], [13]-[26]. Grubo govoreći, vremensko-frekvencijske reprezentacije (TFR) mogu se klasifikovati na linearne, kvadratne i TFR višeg reda.

Vremensko-frekvencijske reprezentacije omogućavaju predstavljanje jednodimenzionog signala u dvodimenzionom domenu, vremenskom i frekvencijskom. Ukoliko TFR opisuje energiju signala, tada se označava kao distribucija. Ukoliko nije od interesa opis energije, već nekih drugih karakteristika signala, praksa je da se koristi se pojam reprezentacija. Do danas je razvijen veoma veliki broj reprezentacija u cilju rješavanja brojnih praktičnih i teorijskih problema, ali se ne može reći da postoji neka koja je najbolja i opšte primjenljiva [1]. U ovoj glavi biće predstavljene neke osnovne reprezentacije prvog i drugog reda, a kroz

analizu njihovih osobina biće uvedeni i osnovni koncepti vremensko-frekvencijske analize.

2.1 Linearne vremensko-frekvencijske reprezentacije

Linearnost je veoma poželjna osobina TF reprezentacija. Veoma je značajna u analizi i obradi multikomponentnih signala [11], [12]. Za vremensko-frekvencijsku reprezentaciju se može reći da je linearna, ukoliko je za linearnu kombinaciju signala:

$$x(t) = \sum_{i=1}^M a_i x_i(t) = a_1 x_1(t) + a_2 x_2(t) + a_3 x_3(t) + \dots + a_M x_M(t) \quad (2.1)$$

koji nazivamo multikomponentnim signalom, jednaka linearnoj kombinaciji odgovarajućih reprezentacija pojedinačnih signala:

$$TFR_x = \sum_{i=1}^M a_i TFR_{x_i} = a_1 TFR_{x_1} + a_2 TFR_{x_2} + a_3 TFR_{x_3} + \dots + a_M TFR_{x_M}. \quad (2.2)$$

TF reprezentacija koja posjeduje ovo svojstvo, i koja ima fundamentalan praktični i teorijski značaj u TF analizi jeste kratkotrajna Fourier-ova transformacija (STFT). Iako spada u klasu kvadratnih reprezentacija, spektrogram, koji predstavlja kvadratni moduo STFT, će biti predstavljen u ovom poglavlju.

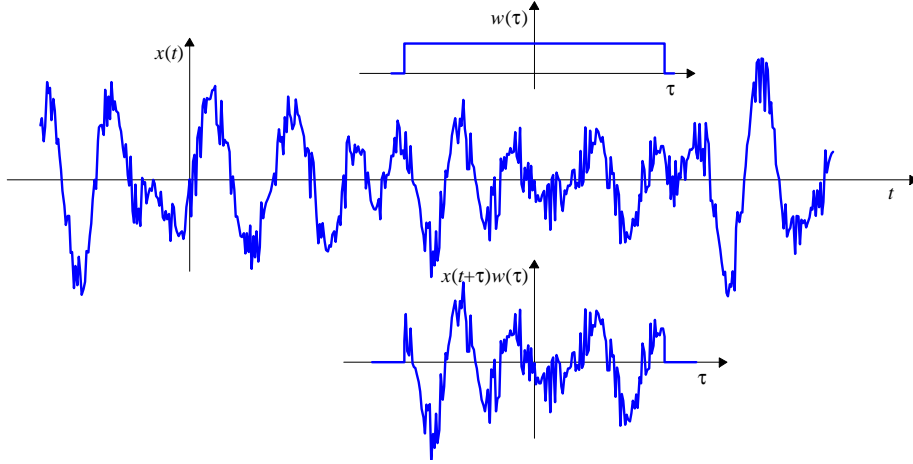
2.1.1 Kratkotrajna (Short-time) Fourierova transformacija

Kratkotrajna (Short-time) Fourierova transformacija (STFT) spada u klasu linearnih vremensko-frekvencijskih reprezentacija i definisana je sljedećim izrazom [1], [16], [18], [19]:

$$STFT(t, \Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t + \tau) w(\tau) e^{-j\Omega\tau} d\tau \quad (2.3)$$

U prethodnoj relaciji $w(\tau)$ predstavlja funkciju prozora, za koju je poželjno da bude parna funkcija sa maksimumom u tački $\tau = 0$. Njena uloga je vrlo specifična: za dati trenutak t ova funkcija lokalizuje i odsijeca dio signala koji obuhvata u tom trenutku. Zatim se za taj dio signala nalazi Fourierova transformacija, to jest, dobija se njegov spektralni sadržaj, u intervalu vremena definisanom širinom prozora. Ovo se ponavlja za svaki sljedeći trenutak, i tako se prozor pomjera duž čitavog signala. Na ovaj način se dobija reprezentacija signala u vremensko-frekvencijskoj ravni, to jest predstavlja se spektralni sadržaj signala i njegove promjene u vremenu, dok sama TF reprezentacija predstavlja dvodimenzionu funkciju od vremena i frekvencije. Ilustracija opisanog principa prikazana je na slici (2.1).

Posmatrajući relaciju (2.3) jasno je da u datom trenutku t ona predstavlja Fourier-ovu



Slika 2.1: Ilustracija lokalizacije signala primjenom funkcije prozora

transformaciju od $x(t+\tau)w(\tau)$, što znači da pored linearnosti ova transformacija posjeduje i druga slična svojstva Fourierove transformacije.

Tako na primjer, za STFT signala pomjerenog u vremenu, $x(t) = f(t - t_0)$, važi sljedeća osobina:

$$STFT_x(t, \Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t + \tau)w(\tau)e^{-j\Omega\tau} d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} f(t - t_0 + \tau)w(\tau)e^{-j\Omega\tau} d\tau = STFT_f(t-t_0, \Omega)$$

Ako je signal dat u obliku $x(t) = f(at)$ lako se pokazuje da važi sljedeće (svojstvo skaliranja):

$$\begin{aligned} STFT_x(t, \Omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t + \tau)w(\tau)e^{-j\Omega\tau} d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} f(at + a\tau)w(\tau)e^{-j\Omega\tau} d\tau \\ &= \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{\infty} f(at + \tau_1)w\left(\frac{\tau_1}{a}\right)e^{-j\Omega\frac{\tau_1}{a}} d\tau_1 = \frac{1}{a} STFT_f\left(at, \frac{\Omega}{a}\right) \end{aligned} \quad (2.4)$$

što je dokazano jednostavnim uvođenjem smjene $\tau_1 = a\tau$. Već spomenuto svojstvo linearnosti, koje je jasno i iz same definicije STFT kao integralne transformacije, može se dokazati za signal dat u obliku linearne kombinacije signala:

$$x(t) = \sum_{i=1}^m a_i x_i(t) = a_1 x_1(t) + a_2 x_2(t) + a_3 x_3(t) \dots + a_m x_m(t),$$

$$\begin{aligned}
STFT_x(t, \Omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t + \tau)w(\tau)e^{-j\Omega\tau} d\tau = a_1 \int_{-\infty}^{\infty} x_1(t + \tau)w(\tau)e^{-j\Omega\tau} d\tau \\
&+ a_2 \int_{-\infty}^{\infty} x_2(t + \tau)w(\tau)e^{-j\Omega\tau} d\tau + \dots + a_m \int_{-\infty}^{\infty} x_m(t + \tau)w(\tau)e^{-j\Omega\tau} d\tau \\
&= a_1 STFT_{x_1}(t, \Omega) + a_2 STFT_{x_2}(t, \Omega) + \dots + a_m STFT_{x_m}(t, \Omega)
\end{aligned}$$

Dakle, STFT signala datog u obliku linearne kombinacije signala jednaka je linearnoj kombinaciji STFT pojedinačnih signala.

2.1.2 Prozori i problem rezolucije kod STFT

Množenjem signala sa funkcijom prozora, dakle, omogućava da sve komponente koje se nalaze izvan vremenskog opsega trajanja funkcije prozora budu odbačene [1], [12]. Na taj način, za dati trenutak t funkcija prozora kontrolira koliki je udio signala relevantan za proračun STFT, zbog čega će STFT sadržati sve varijacije spektra dijela signala koji je lociran oko posmatranog trenutka. Odavde se može zaključiti da će bolji pregled vremenskih karakteristika spektralnih komponenti signala, ili tzv. bolja vremenska rezolucija, biti postignuta upotrebom prozora kratkog trajanja. U cilju sagledavanja uloge prozora u frekvencijskom domenu, biće navedena još jedna definicija STFT, koja se lako dobija korišćenjem definicionih relacija FT [1]:

$$STFT(t, \Omega) = \frac{e^{-j\Omega t}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\Theta)W^*(\Theta - \Omega)e^{j\Theta t} d\Theta. \quad (2.5)$$

Ukoliko se zanemari dio $e^{-j\Omega t}$, STFT se može predstaviti kao inverzna FT od $X(\Theta)W^*(\Theta - \Omega)$, koji se može tumačiti kao spektar signala $x(t)$ koji je ograničen prolaskom kroz filter propusnik opsega učestanosti $W^*(\Theta - \Omega)$, čija je centralna učestanost Ω , gdje je $W(\Omega)$ FT funkcije prozora $w(\tau)$. Dakle, može se zaključiti, slično kao za vremenski domen, da se bolja frekvencijska rezolucija postiže upotrebom prozora čiji je frekvencijski opseg uži [13].

U cilju ilustracije ovih činjenica, razmatraće se dva karakteristična slučaja, prozor idealno kratkog i prozor neograničeno dugačkog trajanja. Ukoliko je funkcija prozora delta impuls, odnosno $w(t) = \delta(t)$, tada je STFT proizvoljnog signala $x(t)$:

$$STFT(t, \Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t + \tau)\delta(t)e^{-j\Omega\tau} d\tau = x(t). \quad (2.6)$$

Dobija se da se STFT se svodi na moduo od signala, što znači da je ona zadržala sve vremenske karakteristike, međutim, ne postoje nikakve informacije o frekvencijskim

karakteristikama signala. Dakle, dobijena je idealna vremenska rezolucija, ali je frekvencijska izgubljena.

Suprotan slučaj je prozor neograničenog trajanja, $w(t) = 1$ za svako t . U ovom slučaju važiće:

$$STFT(t, \Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t + \tau) e^{-j\Omega\tau} d\tau = e^{j\Omega t} X(\Omega). \quad (2.7)$$

U ovom slučaju se moduo od STFT svodi na moduo od FT posmatranog signala, pa se zaključuje da se sada obezbjeđuje idealna frekvencijska rezolucija, ali se ne obezbjeđuje nikakva vremenska. To nas navodi na zaključak da bi širine prozora trebalo birati negdje između ova dva ekstremna slučaja. Kao što će biti pokazano, poboljšanjem rezolucije u jednom domenu pogoršava se rezolucija u drugom, pa je potrebno tražiti kompromisno rješenje ovog problema, što predstavlja glavni nedostatak STFT [1], [19].

U obradi signala su u upotrebi različiti oblici funkcija prozora, a njihova raznovrsnost je rezultat težnje da se konstruiše takav oblik prozora koji daje što je moguće bolju lokalizaciju signala u oba domena. Kao primjeri koji su korišćeni u radu, biće navedene dvije forme funkcije prozora: pravougaoni i Hanning-ov. Osim njih postoje i Hamming-ov, Gauss-ov, Blackman-ov i drugi [1]-[12]. Pravougaoni prozor je najjednostavniji oblik funkcije prozora. U vremenskom domenu dat je sljedećom relacijom [1]:

$$w(\tau) = \begin{cases} 1 & \text{za } |\tau| < T \\ 0 & \text{ostalo } \tau. \end{cases} \quad (2.8)$$

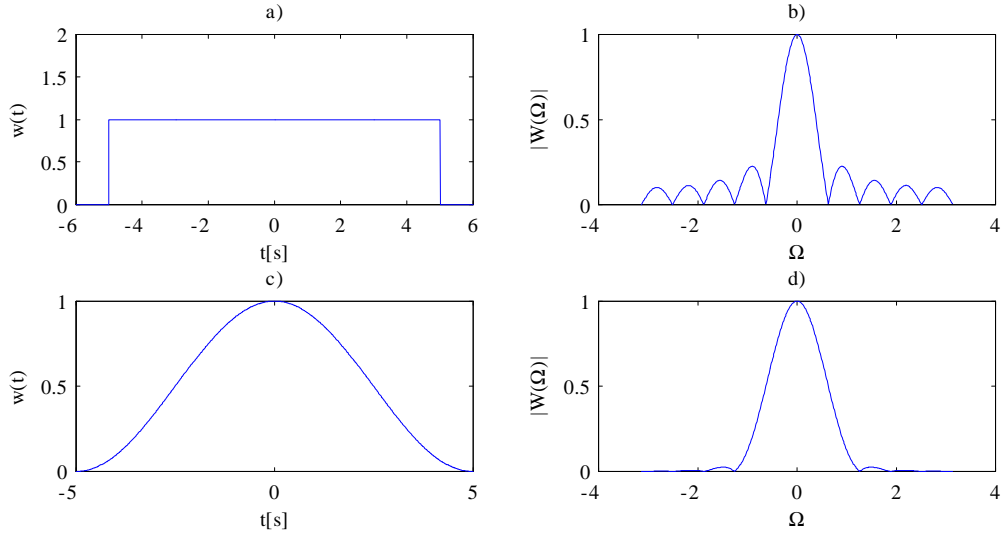
Fourier-ova transformacija ove funkcije je:

$$\begin{aligned} W_R(\Omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} w(\tau) e^{-j\Omega\tau} d\tau = \int_{-T}^T e^{-j\Omega\tau} d\tau = -\frac{1}{j\Omega} \int_{-j\Omega T}^{j\Omega T} e^y dy \\ &= -\frac{2}{2j\Omega} (e^{j\Omega T} - e^{-j\Omega T}) = \frac{2 \sin(\Omega T)}{\Omega}. \end{aligned}$$

Iako je u vremenskom domenu ovaj prozor strogo ograničen na interval $(-T, T)$, u frekvencijskom domenu vidimo da predstavlja funkciju teorijski neograničenog trajanja. Ukoliko bi se trajanje T smanjilo, jasno je da bi sinusoida u FT pravougaonog prozora $W_R(\Omega)$ imala manju učestanost, odnosno veću periodu, što znači da se trajanje glavne latice povećava, a važi i obrnuto.

Na slici 2.2. pod a) prikazan je izgled ovog prozora u vremenskom domenu, dok je na istoj slici pod b) prikazan njegov izgled u frekvencijskom domenu. Pored glavne laticе postoje značajne nenulte vrijednosti sporednih latica, što se negativno odražava na frekvencijsku lokalizaciju signala.

Drugi oblik funkcije prozora koji se znatno češće koristi je Hanning-ov prozor [1]. On se uvodi u cilju poboljšanja lokalizacije signala u frekvencijskom domenu. U pitanju je



Slika 2.2: Primjeri prozora u vremenskom i frekvencijskom domenu: a) pravougaoni prozor u vremenskom domenu; b) pravougaoni prozor u frekvencijskom domenu; c) Hanning-ov prozor u vremenskom; d) Hanning-ov prozor u frekvencijskom domenu

funkcija definisana na sljedeći način:

$$w(\tau) = \begin{cases} \frac{1}{2}(1 + \cos(\tau\pi/T)) & \text{za } |\tau| < T \\ 0 & \text{za ostalo } \tau \end{cases} \quad (2.9)$$

Odgovarajuća FT je:

$$\begin{aligned} W_H(\Omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} w(\tau)e^{-j\Omega\tau} d\tau = \frac{1}{2} \int_{-T}^T e^{-j\Omega\tau} d\tau + \frac{1}{4} \int_{-T}^T (e^{j\tau\pi/T} + e^{-\tau\pi/T})e^{-j\Omega\tau} d\tau \\ &= \frac{1}{2}W_R(\Omega) + \frac{1}{4} \int_{-T}^T e^{-j(\Omega-\pi/T)\tau} d\tau + \frac{1}{4} \int_{-T}^T e^{-j(\Omega+\pi/T)\tau} d\tau \\ &= \frac{1}{2}W_R(\Omega) + \frac{1}{4}W_R(\Omega - \pi/T) + \frac{1}{4}W_R(\Omega + \pi/T) \end{aligned} \quad (2.10)$$

Na osnovu prethodnih relacija, kao i zbog svojstva linearnosti, može se izvesti zaključak da se STFT u kojoj je korišćen Hanning-ov prozor može izraziti preko STFT u kojima je korišćen pravougaoni, na sljedeći način:

$$STFT(t, \Omega) = 0.5STFT_R(t, \Omega) + 0.25STFT_R(t, \Omega - \pi/T) + 0.25STFT_R(t, \Omega + \pi/T)$$

gdje je sa $STFT_R(t, \Omega)$ označena kratkotrajna FT računata sa pravougaonim prozorom. U opštem slučaju važi sljedeće [1]:

$$STFT(t, \Omega) = a_{-1}STFT_R(t, \Omega - \pi/T) + a_0STFT_R(t, \Omega) + a_1STFT_R(t, \Omega + \pi/T) \quad (2.11)$$

gdje su koeficijenti: $(a_{-1}, a_0, a_1) = (0.25, 0.5, 0.25)$ i $(a_{-1}, a_0, a_1) = (0.23, 0.27, 0.23)$ dati za Hanning-ov i Hamming-ov prozor respektivno.

Posmatrajući rezultat (2.10), može se uočiti da u frekvencijskom domenu postoji značajno brži pad amplitude sporednih latica sa rastom frekvencije, nego u slučaju pravougaonog prozora, što dovodi do zaključka da Hanning-ov prozor znatno bolje lokalizuje signal u frekvencijskom domenu. Vremenski oblik Hanning-ovog prozora i njegova Fourier-ova transformacija prikazani su na slici 2.2 pod c) i d) respektivno.

2.1.3 Rezolucija i princip neodređenosti

Na osnovu prethodnih izlaganja jasno je da sposobnost razdvajanja komponenti signala u vremensko-frekvencijskoj ravni direktno zavisi od rezolucije, dok rezolucija zavisi od odabira funkcije prozora. Takođe je uočeno da su trajanja ovih funkcija u vremenskom i frekvencijskom domenu obrnuto proporcionalna. Ukoliko se posmatra Fourier-ov transformacioni par $W(\Omega) = FT\{w(\tau)\}$ za proizvoljni signal $w(\tau)$, može se formulisati sljedeći zaključak: proizvod vremenskog i frekvencijskog trajanja predstavlja konstantnu vrijednost, što znači da bolja vremenska rezolucija uvijek znači goru frekvencijsku, i obrnuto [1], [11], [12]. Tako bolja vremenska rezolucija u slučaju funkcije prozora postiže se smanjivanjem vrijednosti T , a bolja frekvencijska njenim povećavanjem. Ovo se može uočiti i posmatranjem formula razmatranih prozora u frekvencijskom i vremenskom domenu i njihovih promjena sa promjenom vrijednosti T . U opštem slučaju, kada nije moguće precizno definisati trajanje signala u vremenskom i/ili frekvencijskom domenu (širina spektra), uvode se mjere trajanja date sljedećim formulama [1]:

$$d_T^2 = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \tau^2 |w(\tau)|^2 d\tau}{\int_{-\infty}^{\infty} |w(\tau)|^2 d\tau}, \quad D_w^2 = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \Omega^2 |W(\Omega)|^2 d\Omega}{\int_{-\infty}^{\infty} |W(\Omega)|^2 d\Omega}$$

Za bilo koji signal $w(\tau)$ koji zadovoljava da uslov da $w(\tau)\sqrt{\tau} \rightarrow 0$ za $\tau \rightarrow \pm\infty$ se može pokazati da važi [1], [12]:

$$d_T D_W \geq 1/2 \quad (2.12)$$

Prethodna tvrdnja poznata je kao princip neodređenosti u obradi signala [1], [11], [13]. Dakle, ranije razmatrani zaključci vezani za rezolucije kod STFT posljedica su principa neodređenosti.

2.1.4 Metod stacionarne faze i pojam trenutne frekvencije

Neka se posmatra generalna forma signala:

$$x(t) = A(t)e^{j\phi(t)} \quad (2.13)$$

U slučajevima kada se ne može naći jednostavna analitička forma FT (odnosno STFT), tada je moguće, pod određenim uslovima, koristiti metod stacionarne faze u cilju računanja njene aproksimacije. U slučaju kada je faza $\phi(t)$ signala $x(t)$ monotona funkcija, a amplituda $A(t)$ dovoljno glatka funkcija, tada važi sljedeća aproksimacija Fourier-ovog integrala [1], [11], [13]:

$$\int_{-\infty}^{\infty} A(t)e^{j\phi(t)}e^{-j\Omega t}dt \cong A(t_0)e^{j\phi(t_0)}e^{-j\Omega t_0}\sqrt{\frac{2\pi j}{\phi''(t_0)}} \quad (2.14)$$

gdje t_0 predstavlja rješenje jednačine: $\phi'(t_0) = \Omega$. Ako se posmatra integral sa lijeve strane jednačine (2.14), može se uočiti da ukoliko je faza $\phi(t) - \Omega t$ podintegralne funkcije stacionarna, odnosno ima prvi izvod jednak nuli, tada ona ima najveći uticaj na vrijednost integrala. Ovo važi stoga što se, aproksimativno gledajući, vrijednosti integrala na intervalima u kojima je faza nestacionarna usrednjavaju, pa integral cjelokupnog nestacionarnog dijela teži nuli. Ukoliko važi da je faza $\phi(t) - \Omega t$ stacionarna, to znači da se u datom trenutku $t = t_0$ faza $\phi(t)$ ponaša na isti način kao i Ωt . Drugim riječima, brzina promjene faze $\phi(t)$ jednaka je frekvenciji Ω u tom trenutku. To se matematički zapisuje na sljedeći način:

$$\left. \frac{d(\phi(t) - \Omega t)}{dt} \right|_{t=t_0} = 0 \quad (2.15)$$

ili

$$\phi'(t) = \Omega \quad (2.16)$$

Posljednja relacija predstavlja formalnu definiciju trenutne frekvencije (IF) [1], [16], [24], [25]. Metod stacionarne faze može ponuditi jedan oblik njene fizičke interpretacije. Potrebno je napomenuti da u slučaju multikomponentnih signala trenutna frekvencija gubi fizičku, ali zadržava matematičku interpretaciju.

Neka se signal $x(t) = A(t)e^{j\phi(t)}$ unutar nekog konačnog intervala, definisanog širinom funkcije prozora $w(\tau)$ koja služi za lokalizaciju signala u vremenu, odnosno frekvenciji, može smatrati stacionarnim. Dodatno, neka je pretpostavljeno da su promjene amplitude unutar tog intervala zanemarljivo male, i da su varijacije faze približno linearne. Tada se može, za τ koje se mijenja unutar granica prozora, pisati sljedeće:

$$A(t + \tau) \approx A(t), \quad \phi(t + \tau) \approx \phi(t) + \phi'(t)\tau. \quad (2.17)$$

Stoga važi i

$$x(t + \tau) = A(t)e^{j\phi(t)}e^{j\phi'(t)\tau}, \quad (2.18)$$

što znači da za τ koje se mijenja unutar spomenutih granica, signal predstavlja čistu sinusoidu učestanosti $\phi'(t)$ (budući da u prethodnom izrazu stoji uz τ), faze $\phi(t)$ (pomjeraaj u odnosu na datu vrijednost τ) i amplitude $A(t)$. Dakle, prvi izvod faze $\phi'(t)$ predstavlja

upravo frekvenciju signala unutar posmatranog intervala oko trenutka t , pa se stoga i može opravdano zvati trenutnom frekvencijom [1]. Dodatno, metod stacionarne faze pored ovog fizičkog tumačenja trenutne frekvencije, može pružiti i tumačenje same Fourier-ove transformacije. Naime, integral u (2.14) predstavlja Fourier-ovu transformaciju signala $x(t)$, što znači da na vrijednost tog integrala u datom trenutku t signal utiče na onoj frekvenciji za koju važi da je $\phi'(t) = \Omega(t)$. Ovim se povezuje spektralni sadržaj signala na frekvenciji Ω sa vremenskim oblikom signala u trenutku t [1].

Neka se posmatra slučaj linearno frekvencijski modulisanog (LFM) signala:

$$x(t) = e^{jat^2} \quad (2.19)$$

gdje se za dovoljno veliko a može koristiti metod stacionarne faze:

$$\begin{aligned} STFT(t, \Omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{ja(t+\tau)^2} w(\tau) e^{-j\Omega\tau} d\tau = e^{jat^2} e^{j(2at-\Omega)\tau_0} e^{ja\tau_0^2} w(\tau_0) \sqrt{\frac{2\pi j}{(2at^2)''}} \\ &= e^{jat^2} e^{j(2at-\Omega)\tau_0} e^{ja\tau_0^2} w(\tau_0) \sqrt{\frac{2\pi j}{4a}} \end{aligned} \quad (2.20)$$

Kako je već pokazano da važi da je $\phi'(\tau_0) = \Omega$, odnosno za fazu $a(t + \tau)^2$ važi da je $2a(t + \tau_0) = \Omega$, slijedi da je $2a(t + \tau_0) = (\Omega - 2at)/2a$. Ako se ovo uvrsti u gornju relaciju, dobija se:

$$STFT(t, \Omega) = w\left(\frac{\Omega - 2at}{2a}\right) \sqrt{\frac{\pi j}{a}} e^{jat^2} e^{-j(2at-\Omega)^2/4a}. \quad (2.21)$$

Moduo ove STFT (u kojem ne postoje eksponencijalni članovi) pokazuje da u slučaju prozora dovoljno širokog da se može primijeniti metod stacionarne faze, širina STFT oko centralne frekvencije $\Omega = 2at$ iznosi $4aT$ ukoliko je funkcija prozora širine $2T$. Dovoljno širok prozor omogućava da se obuhvati dovoljno širok dio signala tako da varijacije faze u tom širokom dijelu budu dovoljno velike, pa se faza može smatrati brzopromjenljivom funkcijom u odnosu na amplitudu, što je uslov koji je potreban da bi se mogao primijeniti metod stacionarne faze. U slučaju užih prozora u vremenskom domenu (užih u odnosu na varijacije faze), širina STFT zavisice od širine Fourier-ove transformacije funkcije prozora. Stoga će ukupna širina STFT biće jednaka sumi širine Fourier-ove transformacije funkcije prozora i širine uzrokovane varijacijom frekvencije, u posmatranom slučaju $4aT$. Ovo razmatranje govori da u slučaju linearno frekvencijski modulisanih signala postoji širina prozora koja daje najužu moguću STFT, i svaka dalja promjena širine prozora može samo degradirati tu optimalnu rezoluciju.

2.1.5 Uticaj viših izvoda faze na STFT

Neka se posmatra frekvencijski modulisan signal konstantne amplitude, dat opštom formulom

$$x(t) = Ae^{j\phi(t)}, \quad (2.22)$$

gdje je $\phi(t)$ diferencijabilna funkcija. Njegova trenutna frekvencija, se definiše kao $\Omega = \phi'(t)$. STFT signala $x(t)$ računa se izrazom:

$$STFT(t, \Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} Ae^{j\phi(t+\tau)} w(\tau) e^{-j\Omega\tau} d\tau$$

Pomjerena faza iz posmatrane STFT, $\phi(t+\tau)$, može se razviti u Tejlorov red, u okolini tačke t :

$$\phi(t+\tau) = \phi(t) + \phi'(t)\tau + \phi''(t)\frac{\tau^2}{2} + \dots$$

Tada se STFT može zapisati kao:

$$\begin{aligned} STFT(t, \Omega) &= Ae^{j\phi(t)} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j(\phi'(t)\tau + \phi''(t)\frac{\tau^2}{2!} + \dots)} w(\tau) e^{-j\Omega\tau} d\tau \\ &= Ae^{j\phi(t)} FT \left\{ e^{j\phi'(t)\tau} \right\} *_{\Omega} FT \left\{ e^{j\phi''(t)\frac{\tau^2}{2!} + \dots} \right\} *_{\Omega} FT \{w(\tau)\} = \\ &= 2\pi Ae^{j\phi(t)} \delta(\Omega - \phi'(t)) *_{\Omega} FT \left\{ e^{j\phi''(t)\frac{\tau^2}{2!} + \dots} \right\} *_{\Omega} W(\Omega) \end{aligned}$$

gdje $*_{\Omega}$ označava konvoluciju u frekvencijskom domenu. Konvolucija u frekvencijskom domenu javlja se kao posljedica ranije spomenutog svojstva Fourier-ove transformacije, koje govori da množenju u vremenskom domenu odgovara konvolucija u frekvencijskom. Zbog članova

$$FT \left\{ e^{j\phi''(t)\frac{\tau^2}{2!} + j\phi'''(t)\frac{\tau^3}{3!} + \dots} \right\}$$

dolazi do negativne pojave rasipanja oko trenutne frekvencije $\delta(\Omega - \phi'(t))$. Takođe, i funkcija prozora izaziva očekivano rasipanje. Koncentracija $\delta(\Omega - \phi'(t))$ se naziva idealnom jer za datu tačku (t, Ω) u vremensko-frekvencijskoj ravni predstavlja tačno jednu vrijednost.

2.1.6 Spektrogram

Kvadratni moduo STFT naziva se spektrogram i on u suštini predstavlja njenu energetska verziju, jer prikazuje distribuciju, odnosno raspodjelu energije signala u vremensko-frekvencijskoj ravni [1], [13]-[26]:

$$SPEC(t, \Omega) = |STFT(t, \Omega)|^2 \quad (2.23)$$

U opštem slučaju, spektrogram ne zadržava poželjno svojstvo linearnosti koje posjeduje STFT, što se može jednostavno dokazati matematički. Neka se posmatra signal oblika:

$$x(t) = \sum_{i=1}^M x_i(t). \quad (2.24)$$

Njegov spektrogram u opštem slučaju nije jednak sumi spektrograma pojedinih komponenti:

$$\begin{aligned} SPEC_x(t, \Omega) &= |STFT_x(t, \Omega)|^2 = STFT_x(t, \Omega)STFT_x^*(t, \Omega) \\ &= \sum_{i=1}^m |STFT_{x_i}(t, \Omega)|^2 + \sum_{j=1}^m \sum_{\substack{k=1 \\ j \neq k}}^m STFT_{x_j}(t, \Omega)STFT_{x_k}^*(t, \Omega) \\ &= \sum_{i=1}^m SPEC_{x_i}(t, \Omega) + \sum_{j=1}^m \sum_{\substack{k=1 \\ j \neq k}}^m STFT_{x_j}(t, \Omega)STFT_{x_k}^*(t, \Omega), \end{aligned} \quad (2.25)$$

jer desni dio relacije (2.25) predstavlja kros-članove, neželjene komponente koje nastaju usljed interakcije pojedinačnih signala [1], [15]. Ovo znači da ukoliko postoji preklapanje komponenti u vremensko-frekvencijskoj ravni, tada svojstvo linearnosti STFT kod spektrograma nije očuvano. Međutim, ukoliko važi da je:

$$STFT_{x_j}(t, \Omega)STFT_{x_k}^*(t, \Omega) = 0$$

za $j \neq k$ i to za svaku tačku (t, Ω) u vremensko-frekvencijskoj ravni, tada se može govoriti o linearnosti spektrograma.

2.1.7 Diskretna STFT

Da bi se STFT mogla numerički izračunavati, potrebno je izvršiti njenu diskretizaciju. Pođimo od izraza za STFT analognog signala $x_a(t)$. Diskretizacija po vremenu se obavlja odabiranjem signala $x_a(t)$ sa korakom Δt , tako da je $t = m\Delta t$. Takođe je neophodno diskretizovati i promjenljivu: $\tau = n\Delta t$. Stoga se STFT može aproksimativno zapisati kao:

$$STFT(t, \Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x_a(t + \tau)w(\tau)e^{-j\Omega\tau} d\tau \approx \sum_{m=-\infty}^{\infty} x_a(n\Delta t + m\Delta t)w(m\Delta t)e^{-j\Omega m\Delta t} \Delta t \quad (2.26)$$

Kako bi se dobila STFT u funkciji od indeksa diskretnog vremena (pri čemu je i dalje kružna učestanost kontinualna), neophodno je kontinualnu promjenljivu vremena svesti na vremenski indeks n , odnosno kašnjenje na m , što se, u skladu sa teoremom o odabiranju

zapisuje:

$$x_a((n+m)\Delta t)\Delta t = x(n+m),$$

dok je kružnu učestanost neophodno normalizovati, i time svesti na interval od $-\pi$ do π : $\omega = \Omega\Delta t$.

Time se dobija STFT diskretnog signala, koja je periodična po frekvenciji sa osnovnom periodom 2π , što je posljedica periodičnosti kompleksne sinusoide [1]. Stoga se dobija izraz:

$$STFT(n, \omega) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x_a(n+m)w(m)e^{-\omega m}. \quad (2.27)$$

Da bi se spriječilo preklapanje STFT perioda, shodno teoremi o odabiranju treba da bude zadovoljeno da je perioda odabiranja: $\Delta t = \pi/\Omega_0 \leq \pi/\Omega_m$, gdje je Ω_m maksimalna frekvencija u spektru signala $x_a(n+m)w(m)$. Iako funkcija prozora ima beskonačan spektar, može se pretpostaviti da je uvijek iznad neke učestanosti Ω_m moguće zanemariti frekvencijske komponente od $x_a(n+m)w(m)$, a da se time ne degradira kvalitet signala. Pošto se koristi prozor konačne širine $N = T/\Delta t$, signal je vremenski ograničen, što znači da se može diskretizovati i u frekvenciji. Potrebno je, kao u slučaju DFT-a, uzimati broj odbiraka veći ili jednak od N . Ukoliko se uzima tačno N odbiraka, tada važi da je $\omega = k\frac{2\pi}{N}$:

$$STFT(n, k) = \sum_{m=-N/2}^{N/2-1} x(n+m)w(m)e^{-j\frac{2\pi}{N}km}. \quad (2.28)$$

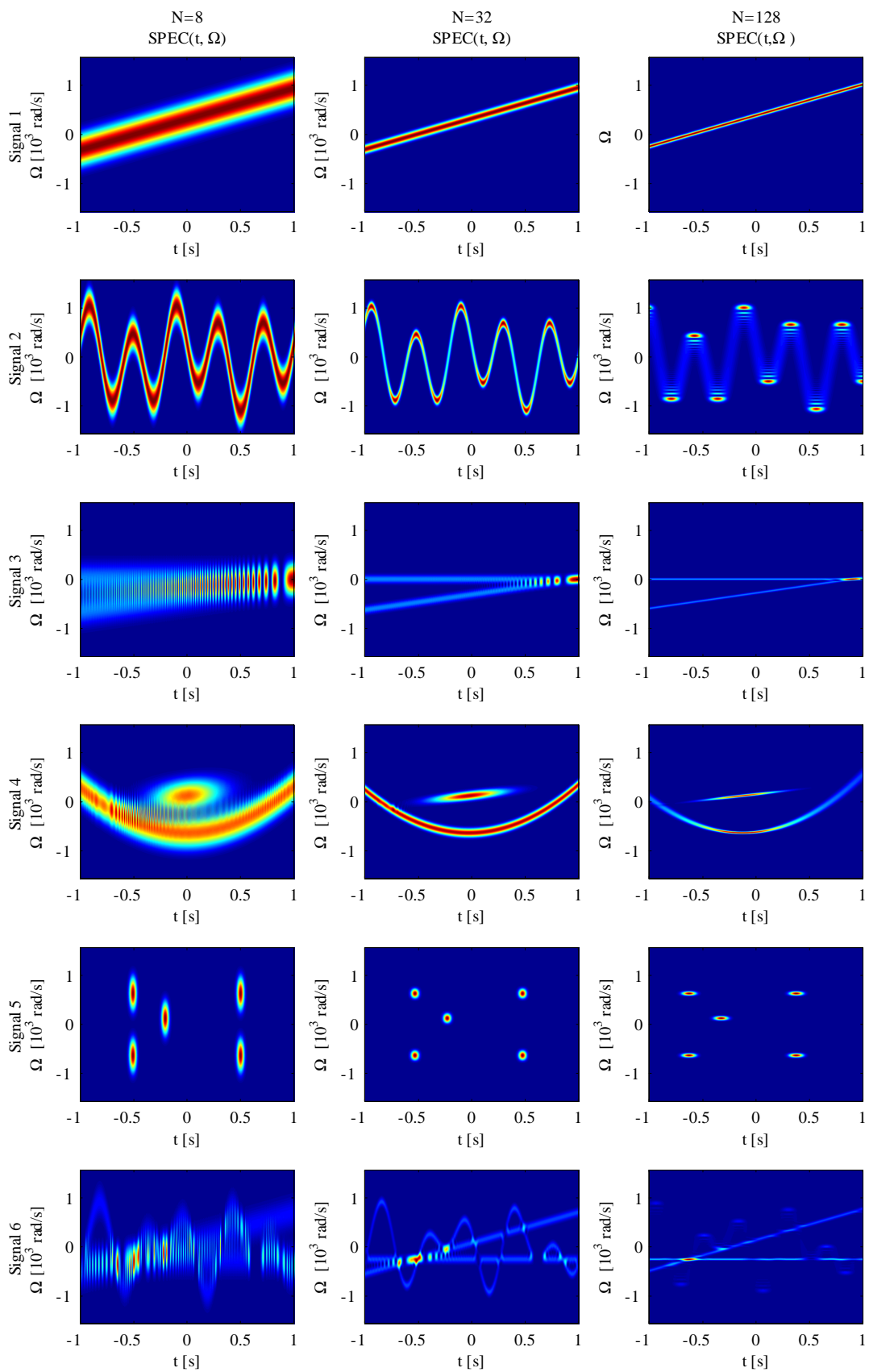
Izraz (2.28) predstavlja diskretnu formu Short-time Fourier-ove transformacije [1], [19]. Ovaj izraz se može računati i primjenom algoritama za brzo izračunavanje, diskretne Fourier-ove transformacije:

$$STFT(n, k) = FFT\{x(n+m)w(m)\}. \quad (2.29)$$

što je od fundamentalne važnosti za numeričke implementacije STFT-a [1]. Operator $FFT\{\cdot\}$ označava primjenu FFT algoritma za računanje datog DFT-a.

2.2 Vremensko-frekvencijske reprezentacije drugog reda

Među kvadratnim vremensko-frekvencijskim reprezentacijama naročito su interesantne one koje nude mogućnost da se pomoću njih obezbijedi prikaz raspodjele energije u vremensko-frekvencijskoj ravni. Zato su takve reprezentacije u literaturi poznate kao distribucije. Iako i spektrogram spada u ovu klasu, zbog njegove uske veze sa STFT, opisan je ranije. Glavni razlog uvođenja drugih kvadratnih reprezentacija jeste mana spektrograma koja se ogleda u tome da loše koncentriše energiju signala.



Slika 2.3: Spektrogrami signala (2.70)-(2.75): prva kolona - sa prozorom širine $N = 8$ (16 ms); druga kolona - sa prozorom širine $N = 32$ (64 ms); treća kolona - sa prozorom širine $N = 128$ (256 ms);

Prilikom definisanja neke vremensko-frekvencijske distribucije često kao glavni uslov stoji da ona predstavlja gustinu energije signala. Drugim riječima, energija signala unutar malog intervala vremena Δt i malog intervala frekvencije $\Delta\Omega$ na bazi neke distribucije $P(t, \Omega)$ može se definisati kao:

$$E [t + \Delta t, \Omega + \Delta\Omega] = P(t, \Omega)\Delta t\Delta\Omega. \quad (2.30)$$

Zbog principa neodređenosti nemoguće je definisati energiju u određenoj tački (t, Ω) , što i predstavlja povod za definisanje dodatnih uslova, koje je poželjno da distribucije zadovoljavaju, koji su poznati kao marginalni uslovi. Prvi marginalni uslov zahtijeva da je trenutna snaga signala jednaka integralu $P(t, \Omega)$ po kružnoj učestanosti Ω za određeni trenutak vremena t . Drugi uslov koji treba ispuniti distribucija $P(t, \Omega)$ jeste da je spektralna gustina energije jednaka integralu $P(t, \Omega)$ po vremenu t za određenu vrijednost kružne učestanosti Ω . Analitički, ovi uslovi se mogu zapisati izrazima koji slijede. Energetski uslov:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} P(t, \Omega) dt d\Omega = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = E_x. \quad (2.31)$$

vremenski marginalni uslov:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} P(t, \Omega) d\Omega = |x(t)|^2. \quad (2.32)$$

i frekvencijski marginalni uslov:

$$\int_{-\infty}^{\infty} P(t, \Omega) dt = |X(\Omega)|^2. \quad (2.33)$$

U slučaju zadovoljenja bilo kojeg marginalnog uslova, zadovoljen je i energetski uslov. Takođe se uočava da marginalni uslovi ne govore ništa o lokalnoj distribuciji energije u tački (t, Ω) .

2.2.1 Rihaczek-ova distribucija

Rihaczek-ova distribucija biće spomenuta u cilju uočavanja nekih opštih koncepata, a biće korisna za dalja razmatranja. Ona se definiše na sljedeći način [1]:

$$RD(t, \Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)x^*(t - \tau)e^{-j\Omega\tau} d\tau. \quad (2.34)$$

Ova distribucija, iako bi trebalo da reprezentuje gustinu energije signala, ima kompleksne vrijednosti, i rijetko se koristi za reprezentaciju nestacionarnih signala [1], [19].

Jednačina (2.34) može se posmatrati i kao Fourier-ova transformacija funkcije: $R(t, \tau) = x(t)x^*(t - \tau)$ koja se može shvatiti kao autokorelaciona funkcija signala $x(t)$.

2.2.2 Wigner-ova distribucija

Wigner-ova distribucija (WD) spada u klasu kvadratnih TF reprezentacija, i ima veliki teorijski i praktičan značaj [1], [12]-[26]. Konceptualno je preuzeta iz kvantne mehanike. U opštem slučaju, lokalna autokorelaciona funkcija, gdje je razlika između argumenata u signalu i njegovoj konjugovano-kompleksnoj formi jednaka τ može se definisati na sljedeći način:

$$R(t, \tau) = x\left(t + \left(\alpha + \frac{1}{2}\right)\tau\right)x^*\left(t + \left(\alpha - \frac{1}{2}\right)\tau\right), \quad (2.35)$$

tako da se za $\alpha = -1/2$ dobija Rihaczek-ova distribucija. Može se postaviti uslov za pronalaženje odgovarajućeg parametra α , tako da kvadratna reprezentacija dobijena kao FT ove autokorelacione funkcije posjeduje odgovarajuća poželjna svojstva. Ova FT je u literaturi poznata kao Generalisana Wigner-ova distribucija [1]. Budući da je veoma poželjno dobiti reprezentaciju koja je realna, a ne kompleksna funkcija, odnosno da Fourier-ova transformacija autokorelacione funkcije bude realna funkcija, potrebno je postaviti uslov Hermitske simetrije: $R(t, \tau) = R^*(t, \tau)$. Uslov će biti zadovoljen za slučaj kada je $\alpha = 0$, a vremensko-frekvencijska reprezentacija koja se dobija kao Fourier-ova transformacija ovakve autokorelacione funkcije naziva se Wigner-ova distribucija. Dakle, ona se definiše kao:

$$WD(t, \Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x\left(t + \frac{\tau}{2}\right)x^*\left(t - \frac{\tau}{2}\right)e^{-j\Omega\tau} d\tau. \quad (2.36)$$

Koristeći ranije opisane osobine FT, i polazeći od izraza za inverznu FT, dobija se izraz za Wigner-ovu distribuciju u frekvencijskom domenu [1]:

$$WD(t, \Omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X\left(\Omega + \Theta/2\right)X^*\left(\Omega - \Theta/2\right)e^{j\Theta t} d\Theta.$$

Može se pokazati da Wigner-ova distribucija zadovoljava marginalne uslove, a time i energetski uslov: kako $x(t + \frac{\tau}{2})x^*(t - \frac{\tau}{2})$ predstavlja inverznu FT od Wigner-ove distribucije, to za $\tau = 0$ važi sljedeće:

$$x(t)x^*(t) = |x(t)|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} WD(t, \Omega) d\Omega, \quad (2.37)$$

a slično se dokazuje i drugi marginalni uslov.

Posmatrajmo LFM signal $x(t) = Ae^{jat^2/2}$. Cilj je pokazati da Wigner-ova distribucija idealno koncentriše energiju signala duž trenutne frekvencije. Autokorelaciona funkcija biće jednaka:

$$\begin{aligned} R(t, \tau) &= x\left(t + \frac{\tau}{2}\right)x^*\left(t - \frac{\tau}{2}\right) = A^2 e^{ja\left(t + \frac{\tau}{2}\right)^2/2} e^{-ja\left(t - \frac{\tau}{2}\right)^2/2} \\ &= A^2 e^{ja\left(t^2 + jat\tau + \frac{\tau^2}{4}\right)/2} e^{-ja\left(t^2 - jat\tau + \frac{\tau^2}{4}\right)/2} = A^2 e^{jat\tau}, \end{aligned} \quad (2.38)$$

dok se Wigner-ova distribucija svodi na:

$$WD(t, \Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} A^2 e^{jat\tau} e^{-j\Omega\tau} d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} A^2 e^{-j(\Omega - at)\tau} d\tau = 2\pi A^2 \delta(\Omega - at) \quad (2.39)$$

što predstavlja idealnu koncentraciju energije ovog signala duž trenutne frekvencije $\Omega = \phi'(t)$. Za signal oblika $x(t) = A(t)e^{j\phi(t)}$ idealna vremensko-frekvencijska reprezentacija se definiše kao:

$$ITF(t, \Omega) = 2\pi |A(t)|^2 \delta(\Omega - \phi'(t)) \quad (2.40)$$

jer energiju signala idealno koncentriše duž trenutne frekvencije.

Wignerova distribucija multikomponentnih signala

Iz definicije Wignerove distribucije uočavamo da je u pitanju nelinearna transformacija, tako da sigurno nije za očekivati da je Wigner-ova distribucija linearne kombinacije signala jednaka linearnoj kombinaciji Wigner-ovih distribucija pojedinih signala. Naime, kao posljedica međusobne interferencije signala, kod ove reprezentacije dolazi do pojave nepoželjnih kros-članova.

Neka je cilj pronaći Wigner-ovu distribuciju signala

$$x(t) = \delta(t - t_1) + e^{j\Omega_1 t}. \quad (2.41)$$

Nađimo prvo Wigner-ovu distribuciju za delta impuls $x_1(t) = \delta(t - t_1)$. Autokorelaciona funkcija funkcija biće jednaka:

$$R_1(t, \tau) = x\left(t + \frac{\tau}{2}\right)x^*\left(t - \frac{\tau}{2}\right) = \delta\left(t - t_1 + \frac{\tau}{2}\right)\delta\left(t - t_1 - \frac{\tau}{2}\right). \quad (2.42)$$

Odmah se zaključuje da će ovaj proizvod imati nenultu vrijednost jedino za $t - t_1 + \tau/2 = t - t_1 - \tau/2$, odnosno za $\tau = 0$, jer se vrši integracija po τ . Wigner-ova distribucija

biće sljedećeg oblika:

$$\begin{aligned}
WD_1(t, \Omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} x_1(t + \frac{\tau}{2})x_1^*(t - \frac{\tau}{2})e^{-j\Omega\tau} d\tau \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_1 + \tau/2)\delta(t - t_1 - \tau/2)e^{-j\Omega\tau} d\tau = \delta(t - t_1)
\end{aligned} \tag{2.43}$$

U cilju nalaženja Wigner-ove distribucije kompleksne sinusoide $x_2(t) = e^{j\Omega_1 t}$ može se napisati izraz za odgovarajuću autokorelacionu funkciju:

$$R_2(t, \tau) = x_2(t + \tau/2)x_2^*(t - \tau/2) = e^{j\Omega_1(t+\tau/2)}e^{-j\Omega_1(t-\tau/2)} = e^{j\Omega_1\tau}, \tag{2.44}$$

dok će njena Wignerova distribucija biti jednaka:

$$\begin{aligned}
WD_2(t, \Omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} x_2(t + \frac{\tau}{2})x_2^*(t - \frac{\tau}{2})e^{-j\Omega\tau} d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\Omega_1\tau}e^{-j\Omega\tau} d\tau \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j(\Omega-\Omega_1)\tau} d\tau = 2\pi\delta(\Omega - \Omega_1).
\end{aligned} \tag{2.45}$$

Izrazi (2.43) i (2.45) zapravo predstavljaju idealne vremensko-frekvencijske reprezentacije analiziranih signala. Međutim, WD ukupnog signala će pored navedenih komponenti sadržati dodatne nepoželjne članove. Naime, njegova autokorelaciona funkcija će biti jednaka:

$$\begin{aligned}
R(t, \tau) &= x(t + \tau/2)x^*(t - \tau/2) = \delta(t - t_1 + \tau/2)\delta(t - t_1 - \tau/2) \\
&\quad + \delta(t - t_1 + \tau/2)e^{-j\Omega_1(t-\tau/2)} + \delta(t - t_1 - \tau/2)e^{j\Omega_1(t+\tau/2)} \\
&\quad + e^{-j\Omega_1(t-\tau/2)}e^{j\Omega_1(t+\tau/2)}.
\end{aligned} \tag{2.46}$$

Odgovarajuća Wigner-ova distribucija će biti, imajući u vidu prethodne rezultate:

$$\begin{aligned}
WD(t, \Omega) &= \delta(t - t_1) + \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_1 + \tau/2)e^{-j\Omega_1(t-\tau/2)}e^{-j\Omega\tau} d\tau \\
&\quad + \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_1 - \tau/2)e^{j\Omega_1(t+\tau/2)}e^{-j\Omega\tau} d\tau + 2\pi\delta(\Omega - \Omega_1) \\
&= \delta(t - t_1) + e^{-j\Omega_1(2t-t_1)}e^{-2j\Omega(t_1-t)} + e^{j\Omega_1(2t-t_1)}e^{-j2\Omega(t-t_1)} + 2\pi\delta(\Omega - \Omega_1).
\end{aligned}$$

Prvi i posljednji član u prethodnom izrazu se, očigledno, odnose na originalne članove signala. Dva preostala člana su, očigledno, nepoželjna. U opštem slučaju, ako se posmatra

linearna kombinacija signala:

$$x(t) = \sum_{i=1}^m x_i(t) = x_1(t) + x_2(t) + x_3(t) + \dots + x_m(t).$$

Wigner-ova distribucija će biti jednaka:

$$\begin{aligned} WD(t, \Omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t + \frac{\tau}{2})x^*(t - \frac{\tau}{2})e^{-j\Omega\tau} d\tau = \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^m \int_{-\infty}^{\infty} x_j(t + \frac{\tau}{2})x_k^*(t - \frac{\tau}{2})e^{-j\Omega\tau} d\tau \\ &= \sum_{j=1}^m \int_{-\infty}^{\infty} x_j(t + \frac{\tau}{2})x_j^*(t - \frac{\tau}{2})e^{-j\Omega\tau} d\tau \\ &+ \sum_{j=1}^m \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^m \int_{-\infty}^{\infty} x_j(t + \frac{\tau}{2})x_k^*(t - \frac{\tau}{2})e^{-j\Omega\tau} d\tau, \end{aligned} \quad (2.47)$$

gdje se uočavaju auto-članovi - korisne komponente u distribuciji, odnosno, komponente signala koje smo željeli da reprezentujemo u vremensko-frekvencijskoj ravni, date sa:

$$WD_{at}(t, \Omega) = \sum_{j=1}^m \int_{-\infty}^{\infty} x_j(t + \frac{\tau}{2})x_j^*(t - \frac{\tau}{2})e^{-j\Omega\tau} d\tau. \quad (2.48)$$

i kros-članove, neželjene komponente date izrazom:

$$WD_{cross-terms}(t, \Omega) = \sum_{j=1}^m \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^m \int_{-\infty}^{\infty} x_j(t + \frac{\tau}{2})x_k^*(t - \frac{\tau}{2})e^{-j\Omega\tau} d\tau. \quad (2.49)$$

Oni su posljedica kvadratne prirode Wignerove distribucije [1]. Pojava kros-članova je glavna mana WD, jer oni predstavljaju komponente u TF ravni koje ne odgovaraju komponentama signala.

Sopstvene interferencije kod Wigner-ove distribucije

Sopstvene interferencije (inner inferences) predstavljaju još jednu negativnu pojavu kod Wigner-ove distribucije, koja se ogleda u tome da nastaju neželjena rasipanja koncentracije, odnosno neželjene komponente, čak i u slučaju monokomponentnih signala. One potiču od nestacionarnosti samog signala. Do ove pojave neće dolaziti u slučaju stacionarnih signala i linearnih FM signala, jer je već istaknuto da je Wigner-ova distribucija u tom slučaju idealna TF reprezentacija. Neka se posmatra nelinearni FM signal:

$$x(t) = Ae^{j\phi(t)}, \quad (2.50)$$

Wignerova distribucija razmatranog signala je:

$$WD(t, \Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x\left(t + \frac{\tau}{2}\right)x^*\left(t - \frac{\tau}{2}\right)e^{-j\Omega\tau} d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} A^2 e^{j\phi\left(t+\frac{\tau}{2}\right)} e^{-j\phi\left(t-\frac{\tau}{2}\right)} e^{-j\Omega\tau} d\tau \quad (2.51)$$

Faza $\phi(t + \tau)$ može se razviti u Tejlorov red u okolini tačke t :

$$\phi(t + \tau) = \phi(t) + \phi'(t)\tau + \phi''(t)\frac{\tau^2}{2} + \dots$$

a Wigner-ova distribucija se tada može predstaviti sljedećim izrazom:

$$WD(t, \Omega) = A^2 \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\left(\phi(t)+\phi'(t)\frac{\tau}{2}+\phi''(t)\frac{\tau^2}{4\cdot 2!}+\dots\right)} e^{-j\left(\phi(t)-\phi'(t)\frac{\tau}{2}+\phi''(t)\frac{\tau^2}{4\cdot 2!}-\dots\right)} e^{-j\Omega\tau} d\tau. \quad (2.52)$$

Članovi sa parnim redom izvoda: $\phi(t)$, $\phi''(t)\frac{\tau^2}{4\cdot 2!}\dots$ će se anulirati, tako da izraz za WD postaje:

$$\begin{aligned} WD(t, \Omega) &= A^2 \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\left(\phi'(t)\tau + 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\phi^{(2k+1)}(t)}{(2k+1)!} \left(\frac{\tau}{2}\right)^{(2k+1)}\right)} e^{-j\Omega\tau} d\tau \\ &= 2\pi A^2 \delta(\Omega - \phi'(t)) *_{\Omega} FT \left\{ 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\phi^{(2k+1)}(\tau)}{(2k+1)!} \left(\frac{\tau}{2}\right)^{2k+1} \right\}. \end{aligned} \quad (2.53)$$

Rasipanje idealne koncentracije izazivaju, očigledno, samo neparni izvodi faze što je poboljšanje ove reprezentacije u odnosu na STFT gdje su bili prisutni svi izvodi.

2.2.3 Diskretna i pseudo-Wignerova distribucija

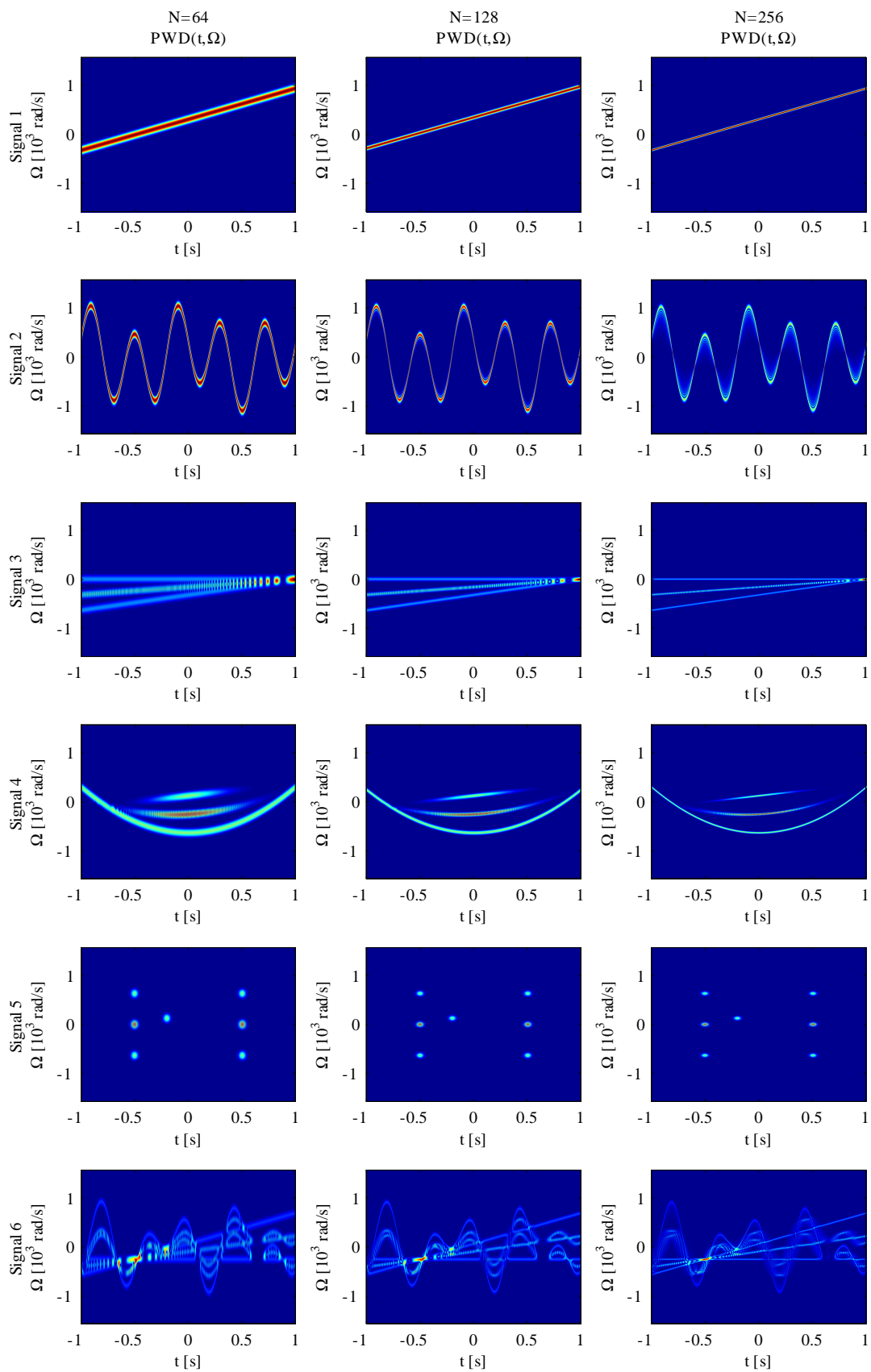
U cilju pronalazjenja diskretne forme Wigner-ove distribucije, bitne sa stanovišta numeričkih implementacija, signal $x(t)$ treba odabrati sa korakom Δt :

$$WD(n\Delta t, \Omega) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x\left(n\Delta t + \frac{m\Delta t}{2}\right)x^*\left(n\Delta t - \frac{m\Delta t}{2}\right)e^{-j\Omega m\Delta t}(m\Delta t). \quad (2.54)$$

Slično kao i u razmatranju diskretizacije STFT, nakon odabiranja i uvođenja diskretne frekvencije ω jednoznačno definisane u intervalu $[-\pi, \pi]$ dobija se:

$$WD(m, \omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x\left(m + \frac{n}{2}\right)x^*\left(m - \frac{n}{2}\right)e^{-j\omega n}.$$

Ako signal ima konačan broj odbiraka N , tada se diskretna FT odabira tako da je



Slika 2.4: Pseudo-Wigner-ove distribucije signala (2.70)-(2.75): prva kolona - sa prozorom širine $N = 64$; (64 ms) druga kolona - sa prozorom širine $N = 128$ (128 ms); treća kolona - sa prozorom širine $N = 256$ (256 ms).

$\omega = k\frac{2\pi}{N}$. Dobija se diskretna forma WD:

$$WD(n, k) = \sum_{n=-N/2}^{N/2-1} x(n + \frac{m}{2})s^*(n - \frac{m}{2})e^{-jk\frac{2\pi}{N}m}.$$

U cilju implementacije Wignerove distribucije uvodi se funkcija prozora koja zapravo povlači i konačnu vrijednost kašnjenja τ . U kontinualnom domenu pseudo-forma Wignerove distribucije (PWD) data je sljedećim izrazom:

$$PWD(t, \Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} w(\frac{\tau}{2})w^*(-\frac{\tau}{2})x(t + \frac{\tau}{2})x^*(t - \frac{\tau}{2})e^{-j\Omega\tau}d\tau \quad (2.55)$$

Diskretna forma PWD u vremenskom domenu može se jednostavno izvesti uvođenjem smjene $v = \tau/2$ kada prethodni izraz postaje:

$$PWD(t, \Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} w(v)w^*(-v)x(t + v)x^*(t - v)e^{-j\Omega 2v}d\tau. \quad (2.56)$$

Ovaj izraz, nakon diskretizacije promjenljivih $t = m\Delta t$ i $\tau = n\Delta t$, uz uslov zadovoljenja teoreme o odabiranju postaje:

$$PWD(n, \Omega) = 2 \sum_{n=-N}^{N-1} w(m\Delta t)w^*(-m\Delta t)x((n + m)\Delta t)x^*((n - m)\Delta t)e^{-j2m\Omega\Delta t}\Delta t, \quad (2.57)$$

odakle se odgovarajućim smjenama dobija diskretna forma PWD u vremenskom domenu:

$$PWD(n, \omega) = 2 \sum_{n=-N}^{N-1} w(m)w^*(-m)x(n + m)x^*(n - m)e^{-j2m\omega}. \quad (2.58)$$

Diskretizacijom prethodnog izraza po frekvenciji, uz zapažanje da je u ovom slučaju signal neophodno preodabrati tako da ima bar dva puta više odbiraka od uslova koji predviđa teorema o odabiranju, uvođenjem indeksa diskretne frekvencije tako da važi $\omega = k\frac{2\pi}{N}$ odakle se dobija:

$$PWD(n, k) = 2 \sum_{n=-N}^{N-1} w(n)w^*(-n)x(n + m)s^*(n - m)e^{-j\frac{2\pi}{N}km}. \quad (2.59)$$

Izraz (2.59) predstavlja diskretnu formu pseudo Wigner-ove distribucije. Ovdje naglasimo da će se u izlaganju koje slijedi koristiti ovaj oblik Wigner-ove distribucije.

2.2.4 S-metod

Kratkotrajna Fourier-ova transformacija, odnosno spektrogram loše koncentriše komponente signala, osim u slučaju stacionarnih signala. Sa druge strane, sa izuzetkom slučajeva kada se komponente signala preklapaju u vremensko-frekvencijskoj ravni, kros komponente se ne pojavljuju. Wigner-ova distribucija, koja zadovoljava dosta poželjnih osobina TF reprezentacija i distribucija, između ostalog jako dobro koncentriše komponente signala, a u slučaju LFM signala daje idealnu reprezentaciju. Njen glavni nedostatak predstavlja pojava kros-komponenti u slučaju multikomponentnih signala.

Istraživanjem veze između ovih reprezentacija i u težnji da se sačuva što više njihovih poželjnih osobina, razvijen je S-metod [1], [11], [12], [15]. Pseudo-Wigner-ova distribucija može se računati na sljedeći način:

$$PWD(t, \Omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} STFT(t, \Omega + \Theta) STFT^*(t, \Omega - \Theta) d\Theta. \quad (2.60)$$

Prethodna relacija dovela je do definicije S-metoda:

$$SM(t, \Omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} P(\Theta) STFT(t, \Omega + \Theta) STFT^*(t, \Omega - \Theta) d\Theta, \quad (2.61)$$

gdje $P(\Theta)$ predstavlja frekvencijski prozor konačnog trajanja, najčešće pravougaoni, za koji važi da je $P(\Theta) = 0$, $|\Theta| > L_p$, pa se može dalje pisati:

$$SM(t, \Omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-L_p}^{L_p} P(\Theta) STFT(t, \Omega + \Theta) STFT^*(t, \Omega - \Theta) d\Theta. \quad (2.62)$$

Za $P(\Theta) = \pi\delta(\Theta)$ S-metod se svodi na spektrogram, dok se za $P(\Theta) = 1$ on svodi na pseudo-Wigner-ovu distribuciju. Dok je kod S-metoda akcenat stavljen na očuvanje auto-članova, marginalni uslovi ne moraju biti zadovoljeni [1], [12].

U slučaju multikomponentnih signala S-metod omogućava dobijanje takve reprezentacije signala kod koje je za svaki auto-član postignuta koncentracija pseudo-Wigner-ove distribucije, bez kros-članova, uz pravilan odabir širine frekvencijskog prozora $P(\Theta)$. Parametar L_p treba odabrati tako da je prozor $P(\Theta)$ dovoljno širok da omogući potpunu integraciju (2.62) duž autočlanova, ali da je uži od rastojanja između auto-članova, kako bi se izbjegli kros-članovi. Dakle, integracijom u izrazu (2.62) će se poboljšavati koncentracija auto-članova sve dok Θ ne postane dovoljno veliko tako da $STFT(t, \Omega + \Theta)$ pripada jednoj komponenti, a $STFT^*(t, \Omega - \Theta)$ drugoj. Tada bi integracijom njihovog proizvoda došlo do pojave kros-člana. U slučaju preklapanja komponenti u nekom trenutku t , do pojave kros članova će doći samo između te dvije

komponente, za taj trenutak t , kao u slučaju spektrograma.

Neka se posmatra multikomponentni signal

$$x(t) = \sum_{m=1}^M x_m(t). \quad (2.63)$$

Pretpostavimo da STFT svakog od monokomponentnih signala $x_m(t)$ pripada regionu $D_m(t, \Omega)$, $m = 1, \dots, M$, i da se ovi regioni ne preklapaju. Takođe, neka je dužina m -tog regiona po frekvenciji Ω označena sa $2B(t)$, a centralna frekvencija sa $\Omega_{0m}(t)$. Pod ovim pretpostavkama, važiće da je

$$SM_x(t, \Omega) = \sum_{m=1}^M PWD_{x_m}(t, \Omega), \quad (2.64)$$

za širinu pravougaonog prozora $P(\Theta)$, definisanu sa [1]:

$$L_p(t, \Omega) = \begin{cases} B_m(t) - |\Omega - \Omega_{0m}(t)|, & (t, \Omega) \in D_m(t) \\ 0, & \text{ostalo } (t, \Omega). \end{cases} \quad (2.65)$$

Diskretna realizacija S-metoda

Diskretna forma S-metoda data je sljedećim relacijama [1]:

$$SM(n, k) = \sum_{i=-L_d}^{L_d} P(i) STFT(n, k+i) STFT^*(n, k-i) \quad (2.66)$$

$$SM(n, k) = |STFT(n, k)|^2 + 2 \operatorname{Re} \left[\sum_{i=1}^{L_d} STFT(n, k+i) STFT^*(n, k-i) \right], \quad (2.67)$$

gdje je pretpostavljen pravougaoni prozor $P(i) = 1$, $-L_d \leq i \leq L_d$. Suma u prethodnoj relaciji omogućava poboljšanje koncentracije spektrograma, do postizanja koncentracije pseudo-Wigner-ove distribucije.

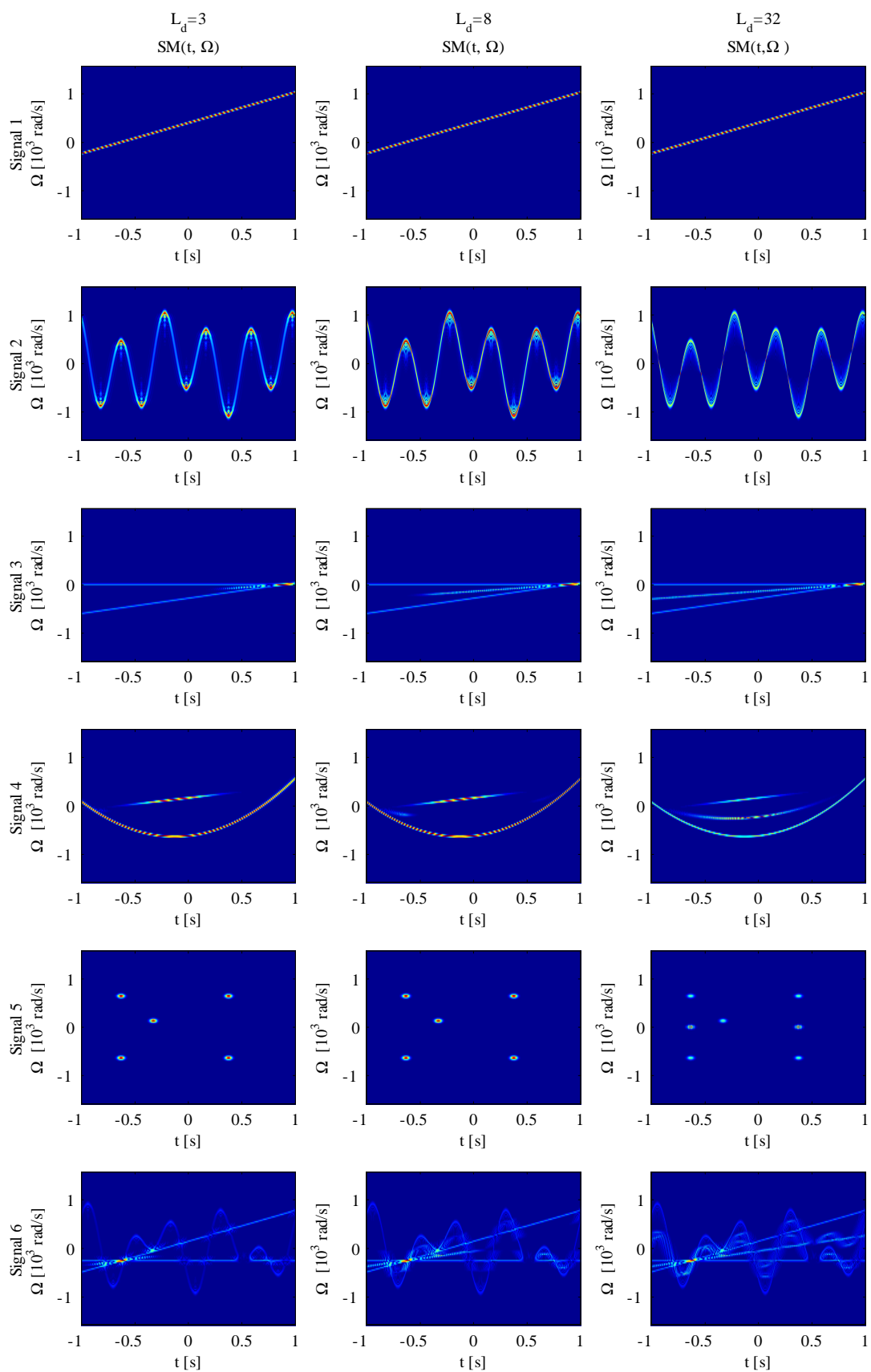
Dok je za spektrogram period odabiranja signala u skladu sa teoremom o odabiranju, iz (2.59) je jasno da je za PWD neophodan duplo manji period odabiranja. S-metod zahtijeva isti period odabiranja kao i spektrogram, što je još jedna značajna prednost u odnosu na Wigner-ovu distribuciju.

Rekurzivna relacija S-metoda, računatog sa pravougaonim prozorom $P(i)$ glasi [1]:

$$SM(n, k; L_d) = SM(n, k; L_d - 1) + 2 \operatorname{Re} [STFT(n, k+i) STFT^*(n, k-i)], \quad (2.68)$$

gdje je

$$SM(n, k; 0) = |STFT(n, k)|^2. \quad (2.69)$$



Slika 2.5: S-metod signala (2.70)-(2.75) računat sa različitim vrijednostima parametra L_d

STFT u prvom koraku može biti realizovana korišćenjem FFT algoritama, ili rekurzivnim putem, kao što će biti predstavljeno u sljedećoj glavi, što indicira i izuzetnu jednostavnost hardverske realizacije S-metoda.

2.3 Primjeri

Osnovni koncepti predstavljenih reprezentacija biće ilustrovani karakterističnim signalima. Signali su posmatrani u opsegu $-1 \leq t \leq 1$ [s] i odabrani su sa periodom odabiranja $\Delta t = 0.002$ [s], tako da je zadovoljena teorema o odabiranju. U slučaju Wigner-ove distribucije signali su preodabrani, tako da imaju duplo manju periodu odabiranja. Posmatrane su Fourier-ove transformacije, spektrogrami, pseudo-Wigner-ove distribucije i S-metod ovih signala. Takođe, na slici 2.6 su prikazani signali u vremenskom domenu (njihov realni i imaginarni dio). Slika 2.7 prikazuje FT ovih signala. Slika 2.3 prikazuje spektrograme ovih signala, sa prozorima širine $N = 8$ (16 ms) $N = 32$ (64 ms) i $N = 128$ (256 ms) (prva, druga i treća kolona, respektivno). Slika 2.4 prikazuje pseudo-Wigner-ove distribucije ovih signala, sa širinama prozora $N = 64$ (64 ms), $N = 128$ (128 ms) i $N = 256$ (256 ms). Slika 2.5 prikazuje S-metod ovih signala, računat korišćenjem STFT sa dužinom prozora $N = 128$ (256 ms), sa vrijednostima parametra $L_d = 3$, $L_d = 8$ i $L_d = 32$. Analizirani signali su:

Signal 1: Posmatra se monokomponentni linearno frekvencijski modulisan signal:

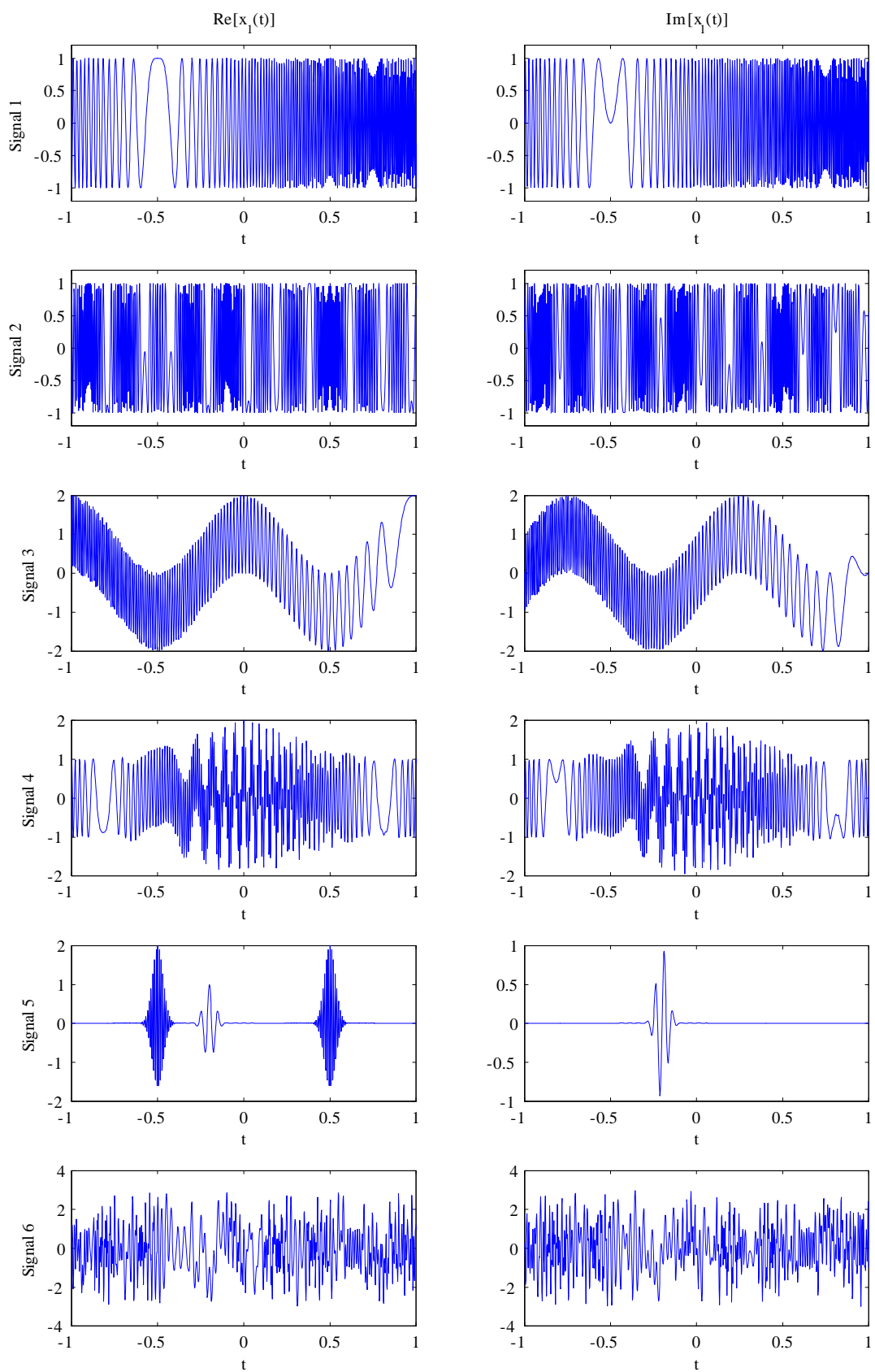
$$x_1(t) = e^{j40\pi(t+0.5)^2}. \quad (2.70)$$

Sa slike 2.7 uočljivo je da se na osnovu njegovog spektra ne može uočiti linearna promjena frekvencije tokom vremena. Na osnovu slike 2.6 uočava se da ni u vremenskom domenu nije moguće uočiti takve promjene. Na slikama 2.3 i 2.4 (prve vrste) jasno je uočljiva ova linearna promjena. Očigledno, prozor dužine 8 i 32 kviri lokalizaciju ovog signala u TF ravni, što ilustruje važnost pravilnog odabira širine prozora. Pseudo Wigner-ova distribucija najbolji prikaz daje za slučaj najšireg prozora, jer je tada uticaj prozora najmanji, i PWD je teorijski najbliža WD. Sa slike 2.5 (prva vrsta) uočljiva je izuzetno dobra koncentracija signala primjenom S-metoda, za svaki od odabranih parametra L_d .

Signal 2: Drugi signal je frekvencijski modulisani signal:

$$x_2(t) = e^{j50 \cos(5\pi t) + j50 \sin(2\pi t)}. \quad (2.71)$$

Na osnovu Fourier-ovog spektra na slici 2.7 ne mogu se uočiti bitne karakteristike frekvencijskih komponenti, izuzev frekvencijskih opsega. Na osnovu prikaza signala u vremenskom domenu na slici 2.6 (druga vrsta) teško se mogu donijeti zaključci vezani za analizu njegovih parametara. Spektrogram sa prozorom najmanje širine na slici 2.3



Slika 2.6: Realni i imaginarni dio signala (2.70)-(2.75)

(druga vrsta) daje lošu lokalizaciju signala, prozor najveće širine (128 odbiraka) takođe loše lokalizuje signal, dok se najbolji rezultat postiže prozorom širine 32. Sa druge strane, PWD na slici 2.4 (druga vrsta) u slučaju kratkog prozora (širine 64) daje relativno dobru lokalizaciju, odnosno lokalizaciju sličnu spektrogramu sa prozorom širine 32, dok u slučaju prozora veće širine lokalizacija se nešto poboljšava, ali počinju da se javljaju neželjene komponente kao posljedica unutrašnjih interferencija, koje u slučaju prozora 256 postaju još izraženije. Kod S-metoda na slici 2.5 (druga vrsta) može se zaključiti da se izuzetno dobra koncentracija, uz veoma suzbijenu pojavu unutrašnjih interferencija postiže za $L_d = 3$ i $L_d = 8$. Za slučaj kada je $L_d = 32$ S-metod postaje teorijski bliži WD, pa se uočava izraženija pojava unutrašnjih interferencija.

Signal 3: Treći signal je primjer dvokomponentnog signala, sastavljen od jedne kompleksne sinusoide i jednog LFM signala:

$$x_3(t) = e^{j50\pi(t-1)^2} + e^{j\pi t}. \quad (2.72)$$

Posmatranjem vremenskog domena, na slici 2.6 (treća vrsta) moguće je donijeti određene zaključke o sinusoidalnoj komponenti razmatranog signala. Međutim, analiza u vremenskom domenu ne predstavlja adekvatan izbor za LFM komponentu signala. Primjer dobro ilustruje osnovne nedostatke spektrograma i Wigner-ove distribucije. Fourier-ov spektar sa slike 2.7 ne daje relevantne informacije o LFM signalu, dok se na osnovu njega može analizirati sinusoida. Spektrogram na slici 2.3, treća vrsta, sa prozorom najmanje širine, 8, veoma loše lokalizuje signal. Dodatno, u tom slučaju, usljed velikih interferencija zbog širine prozora u frekvencijskom domenu dolazi do izražene pojave kros članova - spektrogram ne razdvaja dobro komponente. Blago poboljšanje postiže se u slučaju prozora širine 32, iako su kros komponente još uvijek izražene. Prozor širine 128 daje najbolji rezultat i dobro razdvaja komponente, relativno dobro lokalizujući signal. Primjer i pojavu kros članova kod PWD, koji su veoma izraženi, na polovini rastojanja autočlanova u TF ravni (slika 2.4, treća vrsta). Najbolja koncentracija autočlanova postiže se za najširi prozor od 256 odbiraka, dok se kod prozora manje širine zapaža njegov loš uticaj na lokalizaciju u frekvencijskom domenu. S-metod ovog signala, koji je prikazan na slici 2.5 (treća vrsta) ima slabo izraženu pojavu kros-komponente, zbog velike blizine auto-članova za $L_d = 3$. Međutim, sa povećanjem parametra L_d kros komponenta postaje sve izraženija, što je moguće uočiti na posmatranoj slici.

Signal 4: Ovaj signal je takođe dvokomponentan, i sastoji se od polinomijalno-fazno modulisanog (PPS) signala trećeg reda i sinusoide sa Gauss-ovom amplitudom:

$$x_4(t) = e^{j100\pi t^3 - 200j\pi t} + e^{-5t^2} e^{j40\pi(t+0.5)^2}. \quad (2.73)$$

U Fourier-ovom domenu na slici 2.7 nije moguće protumačiti da se signal sastoji od dvije komponente. Vremenski domen (slika 2.6), takođe ne omogućava jednostavnu

analizu ovog multikomponentnog signala. I u ovom slučaju, kod spektrograma na slici 2.3 u četvrtoj vrsti, sa prozorom dužine 8 uočava se pojava kros članova, jer je FT funkcije prozora previše široka da bi razdvojila komponente. Bolji rezultati postižu se kod spektrograma čiji je prozor širine 32. Kod spektrograma sa najširim prozorom postiže se relativno zadovoljavajuća koncentracija PPS signala, ali je lokalizacija Gauss-ovog signala u vremenu loša. Četvrta vrsta na slici 2.4 ilustruje još jednom pojavu kros komponenti kod PWD. Kros-članovi se pojavljuju na polovini geometrijskog rastojanja između auto-članova. Pojava kros-komponenti u slučaju S-metoda pojačava se sa povećanjem L_d . Za $L_d = 3$ gotovo da nema pojave kros-komponenti (slika 2.5).

Signal 5: Broj komponenti ovog multikomponentnog signala je 5. U pitanju su kratkotrajni Gauss-ovi signali:

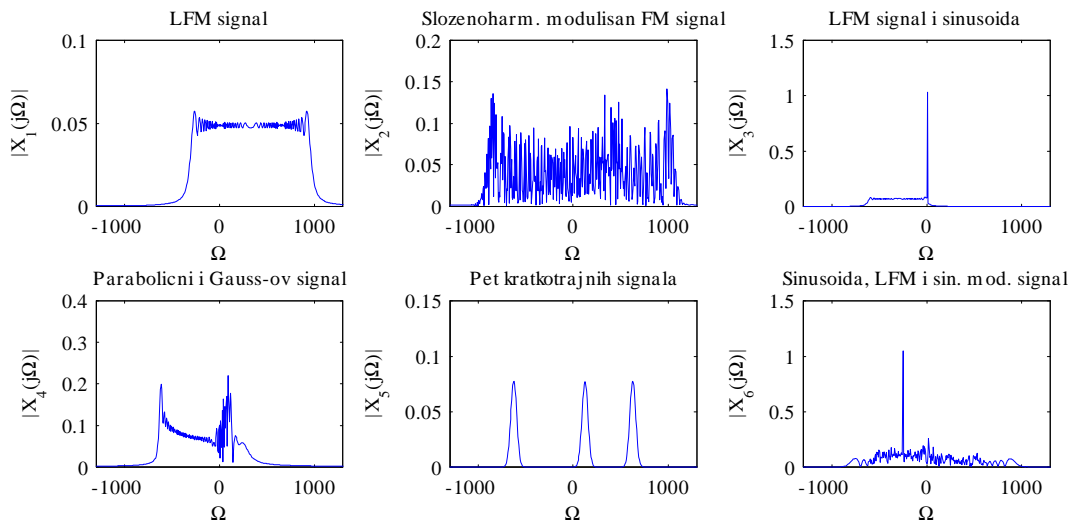
$$x_5(t) = e^{-500(t+0.2)^2} e^{j40\pi(t+0.2)} + e^{-500(t-0.5)^2} e^{j200\pi(t-0.5)} + e^{-500(t+0.5)^2} e^{j200\pi(t+0.5)} \\ + e^{-500(t+0.5)^2} e^{-j200\pi(t+0.5)} + e^{-500(t-0.5)^2} e^{j200\pi(t+0.5)}. \quad (2.74)$$

Izbor ovih signala je specifičan: druga i treća komponenti nalaze se na istoj frekvenciji, ali se pojavljuju u različitim trenucima. Četvrta i peta komponenta pojavljuju se u istim trenucima, ali na različitim frekvencijama. Prva komponenta ne preklapa se sa ostalima ni po vremenu niti po frekvenciji. Signal odlično ilustruje činjenicu da se analizom samo u vremenu, ili analizom samo u frekvencijskom domenu ne mogu postići dobri rezultati. Ako se posmatra samo vremenski domen na slici 2.6, može se diskutovati o pojavi tri komponente (realni dio, peta vrsta na slici). Preostale dvije komponente su maskirane. Ako se posmatra njegova FT na slici 2.7, takođe se uočavaju tri komponente, dok su dvije maskirane. Vrsta broj 5 na slici 2.3 prikazuje spektrograme ovog signala. U slučaju prozora širine 8 izražena je loša frekvencijska lokalizacija. U slučaju prozora širine 128 frekvencijska lokalizacija je poboljšana, ali je vremenska pogoršana. Ovim se eksperimentalno potvrđuje i princip neodređenosti. PWD ovog signala, prikazane u petoj vrsti slike 2.4, auto-članove koncentrišu mnogo bolje od spektrograma. Dva kros-člana su veoma izražena, dok su preostali kros-članovi zamaskirani. Za $L_d = 3$ i $L_d = 8$, na slici 2.5 u petoj vrsti, koja predstavlja S-metod datog signala nema pojave kros-komponenti, dok se za $L_d = 32$ one pojavljuju.

Signal 6: Šesti eksperimentalni signal je sastavljen od sinusoide, LFM-a i složenoharmonijski modulisanog FM signala:

$$x_6(t) = e^{-j80\pi t} + e^{j100\pi(t+0.1)^2} + e^{j50(\cos(3\pi t) + j30 \sin(5\pi t))}. \quad (2.75)$$

Na osnovu amplitudskog spektra FT na slici 2.7 teško da se mogu izvući informacije o signalu. Slično važi i za vremenski domen (slika 2.6, šesta vrsta). Kod spektrograma u posljednjoj vrsti slike 2.3 očekivano se za najmanju širinu prozora od 8 odbiraka ne dobija dobra reprezentacija signala. Takođe, suviše širok prozor od 128 odbiraka oštećuje



Slika 2.7: Fourier-ove transformacije signala (2.70)-(2.75)

komponente sinusodalnog FM signala, dok se, uz pojavu kros-članova, najbolji rezultat postiže prozorom od 32 odbirka. PWD u posljednjoj vrsti slike 2.4 trpi veoma izraženu pojavu kros-članova, koji intenzitetom pojave i brojnošću ne zaostaju za auto-članovima. Kod S-metoda prikazanog na slici 2.5 u šestoj vrsti, najbolji rezultati, uz minimalnu pojavu kros-članova postižu se za $L_d = 3$. Sa povećanjem L_d postaje sve izraženija pojava kros članova.

Glava 3

Rekurzivno računanje STFT

Primjena vremensko-frekvencijske analize u praksi, naročito u domenu aplikacija u realnom vremenu (real-time) u velikoj mjeri može biti uslovljena numeričkom složenošću proračuna vremensko-frekvencijskih reprezentacija. Stoga istraživanje mogućnosti efikasnijeg proračuna predstavlja izuzetno zanimljivu i potencijalno primjenljivu temu za istraživanje. U ovoj glavi biće predstavljen metod za rekurzivno računanje diskretne Short Time Fourier-ove transformacije. Biće izvršena analiza numeričke složenosti klasičnog postupka za proračun ove transformacije primjenom brzih algoritama za računanje Diskretne Fourier-ove transformacije, kao i analiza numeričke složenosti predloženog rekurzivnog postupka. Dodatno, biće sprovedena analiza vrijednosti koraka pomjeranja prozora za koje postoji ušteda u broju operacija pri korišćenju predloženog metoda, i ilustrativno predstavljena procentualna ušteda u broju operacija za slučaj prozora širine 1024 odbirka. Zbog potencijalnog nastanka sistematske greške usljed rekurzivne prirode proračuna, ova greška biće eksperimentalno provjerena.

3.1 Klasični proračun STFT

Kao što je ranije pokazano (2.28), diskretna forma STFT data je sa:

$$STFT(n, k) = \sum_{m=-N/2}^{N/2-1} x(n+m)w(m)e^{-j\frac{2\pi}{N}km} \quad (3.1)$$

gdje N predstavlja dužinu funkcije prozora u diskretnom vremenskom domenu.

Izraz (3.1) može se računati korišćenjem algoritama za brzo računanje DFT-a, tzv. FFT algoritama. Ova činjenica može se matematički predstaviti na sljedeći način:

$$STFT(n, k) = DFT \{x(n+m)w(m)\}. \quad (3.2)$$

Može se uvesti sljedeća oznaka za DFT reda N :

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} = DFT_N\{x(n)\}, \quad (3.3)$$

gdje N predstavlja broj tačaka u kojima se računa DFT. Reprezentativan primjer algoritma za brzo računanje DFT je ranije razmatrani algoritam razbijanja po frekvenciji. Kao što je rečeno, ako se FFT računa u $N = 2^m$ tačaka, tada se po ovom algoritmu ovaj DFT razbija na dva od $N/2$ članova, jedan za parne indekse frekvencije, $k = 2r$ i drugi za neparne, $k = 2r + 1$, pa se za STFT u datom trenutku n vrši proračun DFT po formulama:

$$\begin{aligned} X_N(2r) &= DFT_{N/2}\{x(n) + x(n + N/2)\} \\ X_N(2r + 1) &= DFT_{N/2}\{x(n) - x(n + N/2)\} \cdot e^{-j2\pi n/N}, \end{aligned}$$

a zatim se ove DFT od $N/2$ članova razbijaju na DFT od $N/4$ članova itd. Tako se početna DFT od N članova dijeljenjem na pola u m koraka razbija u potpunosti do elementarnog množenja i sabiranja.

3.1.1 Numerička složenost računanja primjenom FFT algoritama

Sada će biti sprovedena analiza numeričke kompleksnosti izraza (3.2). Neka je sa T_N označen broj operacija za N odbiraka signala (odnosno prozora). Neka je pretpostavljeno da je $N = 2^m$, gdje je m pozitivan cio broj. Algoritam razbijanja po frekvenciji za posmatrano N koje je stepen dvojke radi jako brzo. U jednom stepenu FFT-a postoji N sabiranja. Množenje signala sa jediničnim pravougaonim prozorom može se zanemariti u analizi broja operacija. Množenja sa članovima 1 i -1 takođe se mogu zanemariti u ovoj analizi. Iz tog razloga je tokom date iteracije (za dati trenutak n) potrebno uraditi $N/2 - 1$ množenja. Pošto se DFT sa N članova razbija na dva DFT-a sa $N/2$ članova, ukupan broj operacija u jednoj iteraciji biće jednak:

$$T_N = 2T_{N/2} + N + N/2 - 1 \quad (3.4)$$

Kako važi sljedeće:

$$N = 2^m, \quad N/2 = 2^{m-1}, \quad (3.5)$$

dobijena diferencna jednačina se može zapisati kao:

$$T_m - 2T_{m-1} = \frac{3}{2}2^m - 1. \quad (3.6)$$

Karakteristična jednačina homogenog dijela je $\lambda - 2 = 0$. Odgovarajuće homogeno rješenje je oblika $T_h = A2^m$, gdje je A konstanta. Zbog jednostavnijeg određivanja partikularnog rješenja, zanemarićemo oduzimanje jedinice od nehomogenog dijela jednačine. Partikularno rješenje, zbog poklapanja nule karakteristične jednačine sa izložiocem u nehomogenom dijelu biće oblika $T_p = am2^m$, gdje je a konstanta. Nakon uvrštavanja partikularnog rješenja u polaznu jednačinu (3.6) dobija se konstanta $a = \frac{2}{3}$. Određivanje druge nepoznate konstante vrši se uz početni uslov $T_0 = 0$, i dobija se da je $A = 0$. Stoga je rješenje jednačine (3.6): $T_m = \frac{3}{2}m2^m$. Kako je, na osnovu (3.5) $m = \log_2 N$, uz zanemarivanje množenja jedinicom u zadnjem koraku razbijanja, dolazi se do sljedećeg broja operacija potrebnih za računanje STFT u jednom trenutku n , pomoću DFT primjenom brzih algoritama, imajući u vidu (3.5):

$$T_N = N\left(\frac{3}{2}\log_2 N - 1\right) + 1 \quad (3.7)$$

STFT se može računati za svaki diskretni trenutak vremena n u slučaju signala velike nestacionarnosti, dok se kod relativno stacionarnih signala, odnosno signala kod kojih su varijacije frekvencije u vremenu dosta male unutar korišćenog prozora, STFT može računati nakon svakih l odbiraka, gdje je l pozitivan cio broj. Ako se STFT računa u trenutku n , tada je sljedeći trenutak u kojem se ona računa $n + l$. Ovakav pristup se često primjenjuje u praksi.

Iako izraz (3.2) omogućava računanje STFT primjenom brzih algoritama za DFT, u slučaju aplikacija u realnom vremenu, gdje je neophodno da se rezultati proračuna dobijaju na najbrži mogući način, postoji motivacija za uvođenje metoda za ubrzavanje računanja STFT. Jedan pristup ovoj problematici je rekurzivni metod. Rekurzivno računanje STFT bitno je sa stanovišta hardverske implementacije ove, i nekih drugih vremensko-frekvencijskih reprezentacija. Cilj je smanjiti numeričku kompleksnost izraza (3.1), to jest ukupnog broja operacija potrebnih za njegovo računanje.

3.2 Rekurzivni metod za računanje STFT

U literaturi je poznato da je izraz (3.1) u slučaju jediničnog pravougaonog prozora $w(m)$ dužine N odbiraka može računati po formuli:

$$\begin{aligned} STFT_R(n, k) &= \left[x\left(n + \frac{N}{2} - 1\right) - x\left(n - \frac{N}{2} - 1\right) \right] (-1)^k e^{j2\pi k/N} \\ &\quad + STFT(n - 1, k) e^{j2\pi k/N} \end{aligned} \quad (3.8)$$

Za računanje STFT u trenutku n koristi se STFT izračunata u trenutku $n - 1$, kao i dva odbirka signala u trenutcima $n + N/2 - 1$ i $n - N/2 - 1$.

U slučaju da funkcija prozora $w(m)$ predstavlja Hanning-ov ili Hamming-ov, već je

rečeno da se STFT može izračunati pomoću STFT dobijene za pravougaoni prozor na sljedeći način:

$$STFT(n, k) = a_{-1}STFT_R(n, k - 1) + a_0STFT_R(n, k) + a_1STFT_R(n, k + 1)$$

gdje su koeficijenti: $(a_{-1}, a_0, a_1) = (0.25, 0.5, 0.25)$ $(a_{-1}, a_0, a_1) = (0.23, 0.27, 0.23)$ dati za Hanning-ov i Hamming-ov prozor respektivno.

Spomenuta analiza odnosi se na rekurzivno računanje STFT za svaki uzastopni trenutak n , gdje je naredni trenutak dat sa $n + l$, gdje je $l = 1$.

Neka je sada l pozitivan cio broj koji predstavlja korak po vremenskom indeksu n . STFT treba računati u trenucima $n + l$. Cilj je doći do relacije ekvivalentne relaciji (3.8) koja će omogućiti rekurzivno računanje ovakve STFT. Potrebno je pokazati i za koje vrijednosti koraka l ima smisla računati STFT na ovaj način, to jest, kolika je maksimalna vrijednost koraka za koju postoji ušteda u numeričkoj kompleksnosti korišćenjem rekurzivnog pristupa za računanje STFT, u odnosu na njeno računanje primjenom FFT algoritama.

Izraz (3.1), u slučaju jediničnog pravougaonog prozora $w(m)$ može se napisati na sljedeći način:

$$STFT(n, k) = \sum_{m=-N/2-l}^{N/2-l-1} x(n+m)e^{-j\frac{2\pi}{N}km} + \sum_{m=N/2-l}^{N/2-1} x(n+m)e^{-j\frac{2\pi}{N}km} - \sum_{m=-N/2-l}^{-N/2} x(n+m)e^{-j\frac{2\pi}{N}km}$$

Uvođenjem smjene: $m_1 = m + l$ u prvoj sumi, smjene $m_1 = m - N/2 + l$ u drugoj sumi i smjene $m_1 = m + N/2 + l$ u trećoj dobija se:

$$STFT(n, k) = \sum_{m_1=-N/2}^{N/2-1} x(n-l+m_1)e^{-j\frac{2\pi}{N}k(m_1-l)} + \sum_{m_1=0}^{l-1} x(n+m_1-l+N/2)e^{-j\frac{2\pi}{N}k(m_1+N/2-l)} - \sum_{m_1=0}^{l-1} x(n+m_1-l-N/2)e^{-j\frac{2\pi}{N}k(m_1-N/2-l)}$$

gdje prva suma predstavlja STFT računatu u trenutku $n - l$, pomnožena sa članom

$e^{j2\pi lk/N}$, što nakon sređivanja dovodi do formule:

$$STFT(n, k) = e^{j2\pi lk/N} STFT(n-l, k) + (-1)^k e^{-j2\pi k/N} \sum_{m=0}^{l-1} x(n+m-l+N/2) e^{-j\frac{2\pi}{N} km} - (-1)^k e^{-j2\pi k/N} \sum_{m=0}^{l-1} x(n+m-l-N/2) e^{-j\frac{2\pi}{N} km} \quad (3.9)$$

Izraz (3.9) pokazuje da je STFT u trenutku n moguće računati pomoću STFT računate u trenutku $n-l$ i dodatnih $2l$ odbiraka signala $x(n)$. Može se uočiti da se za $l=1$ formula (3.9) svodi na formulu (3.8).

3.2.1 Analiza broja računskih operacija

Sada je potrebno naći numeričku kompleksnost predložene rekurzivne formule (3.9). Može se uočiti da je u jednoj iteraciji postoji $N \cdot l$ operacija za jednu sumu od l članova, isto toliko operacija za drugu sumu od l članova, kao i N množenja eksponencijalnog člana $e^{j2\pi lk/N}$ sa STFT računatom u trenutku $n-l$. Dodatno, neopodno je odraditi $2N$ sabiranja (odnosno oduzimanja) samih suma. Dakle, ukupan broj operacija potreban za računanje izraza (3.9) za posmatrani trenutak n iznosi:

$$T_N = (2l + 3)N \quad (3.10)$$

Sada se može pronaći vrijednost koraka l za koju će postojati ušteda u broju operacija (3.10) računanjem STFT po formuli (3.9) u odnosu u odnosu na broj operacija pri računanju primjenom FFT algoritama, dat izrazom (3.7). Dobija se da ušteda u broju operacija predloženim metodom postoji ukoliko korak u vremenu l zadovoljava sljedeći uslov:

$$l < \frac{3}{4} \log_2 N - 2 \quad (3.11)$$

Za različite vrijednosti širine prozora N u tabeli 3.1. date su maksimalne vrijednosti koraka l za koje postoji ušteda u broju operacija.

Tabela 3.1: Maksimalne vrijednosti koraka l za koje postoji ušteda u broju operacija primjenom predloženog rekurzivnog metoda u zavisnosti od dužine prozora u STFT

N	l_{max}
128	3
256	4
512	4
1024	5

Tabela 3.2: Procentualni dobitak u broju operacija primjenom predloženog rekurzivnog metoda u odnosu na broj operacija direktnom primjenom FFT-a za računanje STFT, za $N = 1024$

l	dobitak
1	65.24%
2	50%
3	35.71%
4	21.43%
5	7.14%

U tabeli 3.2 predstavljena je procentualna ušteda u broju računskih operacija primjenom uvedene formule, za širinu prozora $N = 1024$ odbirka. Uočavamo se da za veće vrijednosti koraka l ušteda u broju operacija postaje sve manja, zato što sume od l članova u formuli (3.9) postaju sve veće, to jest, neophodno je izvršavati sve više sabiranja u svakoj iteraciji.

3.2.2 Analiza greške usled rekurzije

Numerički eksperimenti pokazali su da greška koja se akumulira zbog rekurzivne prirode formule (3.9) ima jako male vrijednosti i linearno raste sa brojem iteracija, što znači da i u slučaju signala jako velike dužine postoji opravdanost za korišćenje predloženog rekurzivnog metoda.

Primjer 4.1 Posmatra se signal $s(n)$ koji predstavlja kompleksni bijeli Gausov šum od 100000 odbiraka, pri čemu su varijanse realnog i kompleksnog dijela jednake jedinici. Realni i imaginarni dio ovog šuma su statistički nezavisne veličine. Uzeto je da je prozor širine $N = 128$ odbiraka, a korak $l = 3$. Greška se računa kao srednja vrijednost kvadrata modula razlike između $STFT(n, k)$ računane po formuli (3.2) i $STFT_{rek}(n, k)$ računane po formuli (3.9), odnosno:

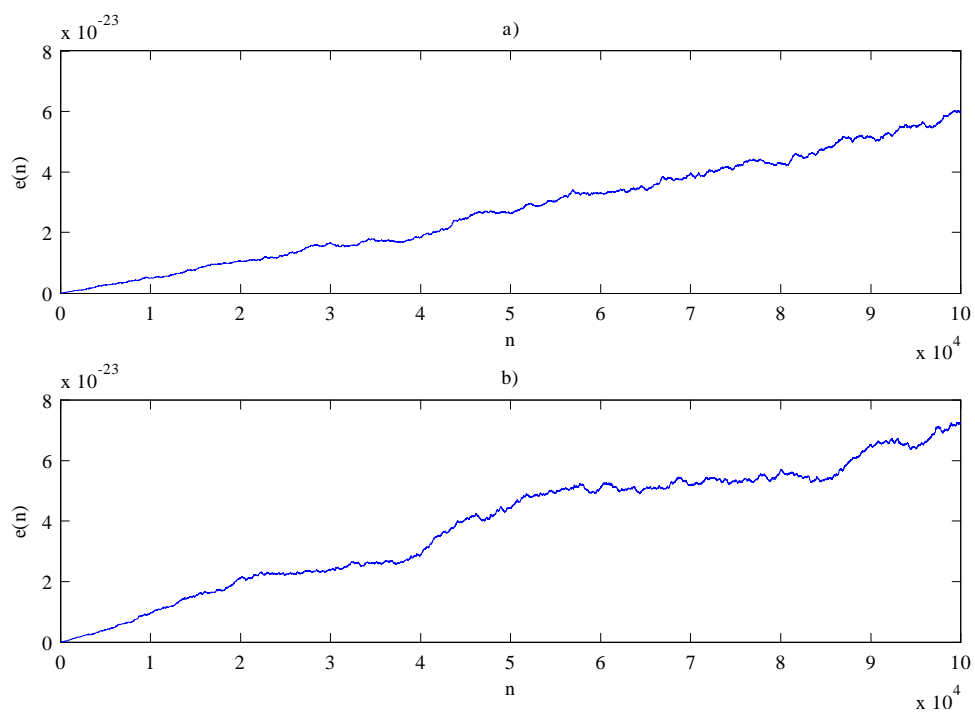
$$e(n) = E[|STFT(n, k) - STFT_{rek}(n, k)|^2]$$

Na slici 3.1 pod a) prikazana je greška iz opisanog eksperimenta.

Primjer 4.2 Posmatra se greška $e(n)$ za signal

$$x(n) = s(n) + \exp(5000j \sin(2\pi n/20000)),$$

pri čemu je $s(n)$ kompleksni šum istih karakteristika kao u prethodnom eksperimentu. Na slici 3.1 pod b) prikazana je greška iz opisanog eksperimenta. U oba slučaja uočava se linearni karakter rasta greške, dok je njena maksimalna vrijednost reda 10^{-23} .



Slika 3.1: Numerička greška koja nastaje pri računanju STFT po predloženom rekurzivnom postupku. Posmatrani signal je: a) bijeli Gauss-ov šum, b) sinusoidalno frekvencijski modulisan signal kome je dodat šum analiziran pod a)

Glava 4

Algoritam za određivanje periode micro-Doppler-a

Svoju značajnu primjenu vremesko-frekvencijska analiza ima u obradi radarskih signala [27]-[31]. U ovoj glavi biće predstavljen algoritam za jednostavno određivanje periode micro-Doppler-a, primjenom STFT. Budući da je već predstavljen metod za njeno rekurzivno izračunavanje, postoji opravdanost primjene ovakvog algoritma u radarskim aplikacijama u realnom vremenu, imajući u vidu ranije sprovedene analize numeričke kompleksnosti.

Određivanje periode micro-Doppler-a može imati veliku primjenu u problematici određivanja osobina, identifikacije i klasifikacije nepoznatih meta.

4.1 Pojam micro-Doppler-a i TF analiza

Radari su uređaji koji služe za detektovanje objekata, njihovog pravca kretanja i udaljenosti primjenom elektromagnetnih talasa na radio frekvencijama. Radar emituje radio talas sa usmjerene antene. Svi objekti u dometu radara apsorbuju jedan dio ove energije, dok se drugi dio reflektuje. Radari posjeduju prijemni dio, koji reflektovane signale prima, a zatim na osnovu njihovih karakteristika određuje karakteristike objekata i njegovog kretanja. Objekat koji se posmatra naziva se meta. U reflektovanom signalu, u odnosu na poslato, došlo je do promjena određenih karakteristika - amplitude, frekvencije, pojavljuje se kašnjenje, i slično, što se u radarskoj tehnici koristi za određivanje karakteristika mete i njenog kretanja. Pojava micro-Doppler-a (m-D) u radarskim signalima nastaje kao posljedica mehaničkih vibracija ili rotacija radarskih meta i njihovih dijelova. Manifestuje se u obliku frekvencijskih modulacija regularnog Doppler-ovog pomjeraja u primljenom signalu. Doppler-ov pomjeraj (shift) je pomjeranje komponenti u frekvencijskom domenu, nastalo kao posljedica poznatog Doppler-ovog efekta (koji se manifestuje promjenom frekvencije usljed relativnog kretanja predajnika i prijemnika), i koje se u radarskoj tehnici od velikog značaja sa stanovišta primjene [21]-[31]. Ove

modulacije, koje se detektuju u vidu varijacije frekvencije Doppler-a poznate su pod nazivom micro-Doppler [27]-[31]. Budući da je micro-Doppler veoma vezan za same karakteristike mete, može se koristiti za njihovu identifikaciju. Da bi se mogao analizirati, m-D mora biti odvojen od tzv. rigid-body-ja, odnosno stacionarnog dijela radarskog signala. Algoritmi koji se za ovo koriste već su predloženi u literaturi.

Pojednostavljeni model radarskog signala sa m-D efektom koji nastaje kao posljedica rotacionog kretanja djelova mete ili reflektora koji vibriraju po sinusoidalnom zakonu može se predstaviti na sljedeći način:

$$s(t) = \exp(j2\pi f_0 t + j \frac{A}{f_\nu} \sin(2\pi f_\nu t + \varphi)). \quad (4.1)$$

Trenutna frekvencija je prvi izvod faze ovog signala po vremenu:

$$f(t) = \frac{d\phi(t)}{dt} = \frac{1}{2\pi} (f_0 + A \cos(2\pi f_\nu t + \varphi) = f_0 + f_p(t)), \quad (4.2)$$

gdje f_0 predstavlja Doppler-ovu frekvenciju nastalu zbog kretanja mete, dok je $f_p(t) = A \cos(2\pi f_\nu t + \varphi)$ dio koji se odnosi na m-D, koji je nastao kao posljedica vibrirajućih (ili rotirajućih) djelova radarske mete. Cilj ovog razmatranja je estimacija frekvencije f_ν . Iako je u ovom modelu korišćen sinusoidalni signal za periodični dio IF , biće pokazano da se može procijeniti frekvencija proizvoljnog peirodičnog dijela (m-D).

Kao što je u prethodnim razmatranjima rečeno, vremensko-frekvencijske reprezentacije koncentrišu energiju signala duž trenutne frekvencije u TF ravni. Neka se posmatra diskretni zašumljeni signal $x(n) = s(n) + \mu(n)$, gdje je deterministički dio $s(n)$ predstavlja odgovarajuću diskretnu verziju kontinualnog FM signala (4.1). Takođe, neka je pretpostavljeno da je $\mu(n)$ kompleksni, stacionarni proces srednje vrijednosti nula, sa statistički nezavisnim realnim i imaginarnim dijelom, koji imaju jednake varijanse, σ^2 . Ukupna varijansa ovog šuma je, dakle $2\sigma^2$. Takođe, neka je $TFR(n, k)$ vremensko-frekvencijska reprezentacija signala $x(n)$.

Kao što je već pokazano u drugoj glavi teze, diskretna vremensko-frekvencijska reprezentacija je 2D funkcija od vremena i frekvencije, odnosno matrica dimenzija $N \times L$, gdje je N dužina (trajanje) signala, a L predstavlja broj diskretnih frekvencijskih tačaka. m-D se pojavljuje kao periodični dio trenutne frekvencije u $TFR(n, k)$. Njegovi djelovi se periodično ponavljaju tokom vremena, i to ponavljanje se može detektovati direktno u TF ravni. Potrebno je izdvojiti dio TF ravni, i zatim ga pomjerati duž vremenskog indeksa n , pri tome ga poredeći, za svaki trenutak n , sa dijelom TF ravni koji u tom trenutku pokriva. Na taj način mogu se detektovati vremenski trenuci u kojima se izdvojeni dio TF ravni ponavlja.

Neka se posmatra prvo slučaj nezašumljenog signala, tj. $x(n) = s(n)$. Neka je odabran dovoljno širok dio reprezentacije $TFR(n, k)$, odnosno, njena podmatrica sa

dovoljno velikim brojem kolona i istim brojem vrsta. Zatim se tako izdvojena podmatrica pomjera u vremenu n preko originalne $TFR(n, k)$. Izdvojeni dio (podmatrica) se množi sa odgovarajućim dijelom $TFR(n, k)$ iste veličine, za posmatrani trenutak n , i svaki član dobijenog proizvoda se sabira. Zatim se ovaj postupak ponavlja za svaki trenutak n . Spomenuta suma će se koristiti kao mjera sličnosti između izdvojenog dijela, i odgovarajućeg dijela $TFR(n, k)$ za dati trenutak n , jer će biti najveća kada su ovi djelovi isti, ili skoro isti. Iza ovog zaključka leži činjenica da su TF reprezentacije koncentrisane oko trenutne frekvencije, što znači da su im vrijednosti najveće oko nje, dok su u ostalim tačkama bliske ili jednake nuli. Ukoliko se IF u izdvojenom dijelu potpuno poklapa sa IF u odgovarajućem dijelu $TFR(n, k)$ za dato n , tada će svaka tačka na trenutnoj frekvenciji i u njenoj okolini biti pomnožena sa istim vrijednostima. Međutim, ukoliko se posmatrane IF ne poklapaju, većina tačaka iz jedne matrice biće pomnožena sa malim vrijednostima, ili nulama iz druge matrice.

U slučaju zašumljenog signala $x(n) = s(n) + \mu(n)$, stoji činjenica da će se bijeli Gauss-ov šum uniformno rasporediti duž cijele TF ravni. Pošto su sve tačke, uključujući i one na trenutnoj frekvenciji uniformno kontaminirane šumom, to neće promijeniti činjenicu da će razmatrana mjera sličnosti biti i dalje najveća na mjestima poklapanja IF. Kao što će kasnije biti pojašnjeno, ovo je razlog zbog kojeg će predloženi algoritam davati veoma dobre rezultate i u prisustvu jakog šuma.

4.2 Predloženi algoritam

Algoritam za estimaciju periode m-D može se predstaviti sljedećim koracima:

Korak 1. Izračunati vremensko-frekvencijsku reprezentaciju $TFR(n, k)$ signala $x(n)$. $TFR(n, k)$ je matrica dimenzija $N \times L$.

Korak 2. Odabrati dio $TFR(n, k)$, koji predstavlja matricu dimenzija $p \times L$, sastavljenu od prvih p kolona matrice $TFR(n, k)$. Za svaki diskretni trenutak n izračunati mjeru sličnosti:

$$M(n) = \sum_{l=0}^{p-1} \sum_{k=0}^{L-1} TFR(l, k)TFR(n+l, k). \quad (4.3)$$

Korak 3. Pronaći lokalne maksimume u nizu $M(n)$ koji su iznad praga određenog sa $\Theta M(0)$, odnosno elemente niza $M(n)$ koji zadovoljavaju uslov:

$$M(n) > \Theta M(0) = \Theta \sum_{l=0}^{p-1} \sum_{k=0}^{L-1} TFR^2(l, k). \quad (4.4)$$

Korak 4. Za svaki maksimum interpolirati tačke oko maksimuma parabolom, i pronaći poziciju maksimuma u toj interpolaciji. Parabolička interpolacija omogućava potencijalno povećanje tačnosti estimacije tražene periode. Naime, budući da se razmatra

diskretni signal $x(n)$, postoji mogućnost da na mreži diskretnih indeksa n ne postoje sve tačke za koje bi poklapanje posmatranog dijela TFR i njenog odgovarajućeg dijela koji se koristi za proračun (4.3) bilo najveće, zbog same prirode odabiranja signala. Ove tačke se mogu nalaziti negdje pored postojećih tačaka lokalnih maksimuma, između diskretnih trenutaka n . U tom slučaju će u Koraku 3 biti odabran skup lokalnih maksimuma u nizu $M(n)$, među kojima ima onih koji se nalaze okolinama trenutaka gdje je spomenuto poklapanje vrijednosti najveće. Parabolička interpolacija omogućava da se kroz posmatrani skup tačaka oko detektovanih lokalnih maksimuma provuče parabola koja će, ukoliko je trenutak preklapanja na mreži indeksa n imati maksimum baš u toj tački, a ukoliko to nije slučaj, detekcijom njenog maksimuma se pronalazi pravi trenutak, koji nije na mreži. Upotreba paraboličke interpolacije naročito dobija na značaju kada se $TFR(n, k)$ ne računa za svaki trenutak n , već između susjednih tačaka proračuna postoji rastojanje l_k . Tada vjerovatnoća da se maksimumi ne nalaze na mreži indeksa n za koje je reprezentacija računata raste sa povećavanjem koraka l_k .

Korak 5. Rastojanje između dva uzastopna maksimuma predstavlja diskretnu periodu micro-Doppler-a, $T_\nu = 1/f_\nu$. Njena vrijednost u sekundama [s] dobija se množenjem sa korakom odabiranja Δt koji je korišćen pri diskretizaciji kontinualnog signala $s(t)$.

Broj kolona p treba da bude odabran tako da za signal koji ima aproksimativno m perioda, broj kolona p bude aproksimativno 25/ m procenata od ukupnog broja kolona u matrici $TFR(n, k)$. Ovaj zaključak je dobijen heuristički, i predstavlja preporuku, a upotrebljivi rezultati mogu biti dobijeni i ako pogriješimo u odabiru broja kolona p . Aproksimaciju m broja perioda moguće je dobiti direktno posmatrajući TF reprezentaciju. Na primjer, ukoliko je broj perioda razmatrane TFR oko 2, parametar p treba da bude 10% od ukupnog broja kolona matrice $TFR(n, k)$, u slučaju procijenjene četiri periode on treba da bude 5% i tako dalje.

Nivo praga Θ zavisi od odnosa signal-šum u signalu $x(n)$. Veće vrijednosti praga se mogu koristiti za veće vrijednosti SNR, dok se prag treba spustiti u slučaju nižih SNR.

4.2.1 Analiza numeričke složenosti

Numerička složenost algoritma biće procijenjena za slučaj kada je $TFR(n, k) = STFT(n, k)$. Za signal dužine N odbiraka, i prozor dužine L odbiraka složenost proračuna STFT primjenom FFT algoritama procijenjena je u trećoj glavi teze (3.7). Za slučaj kada se proračun vrši sa korakom l_k po vremenskom indeksu n ona iznosi:

$$T_s = \frac{N}{l_k} (L(\frac{3}{2} \log_2 L - 1) + 1). \quad (4.5)$$

Numerička složenost primjenom predloženog rekurzivnog algoritma (3.9), pri čemu se

proračun vrši sa korakom l_k između trenutaka n iznosi:

$$T_s = (2l_k + 3) \frac{LN}{l_k}. \quad (4.6)$$

U koraku 2 postoji pL množenja i isto toliko sabiranja, pa je broj operacija u ovom koraku jednak $2pL$. Pošto je u Koraku 3 algoritma neophodno pronaći lokalne maksimume, neophodno je izvršiti bar N operacija sabiranja prilikom kretanja kroz niz (inkrementiranje indeksa niza). Broj operacija potrebnih za interpolaciju parabolom, imajući u vidu da se ona vrši na osnovu bliskih tačaka, biće zanemaren. Računanje rastojanja između dva susjedna maksimuma zahtijeva svega jednu operaciju pa i to može biti zanemareno.

Dakle, procjena ukupnog broja operacija razmatranog algoritma iznosi:

$$T_N = T_s + 2pL \frac{N}{l_k} + \frac{N}{l_k}. \quad (4.7)$$

U slučaju kada se koristi STFT računata primjenom FFT algoritama, procjena složenosti je:

$$T_{STFT} = \frac{N}{l_k} (L(\frac{3}{2} \log_2 L - 1) + 1) + 2pL \frac{N}{l_k} + \frac{N}{l_k}. \quad (4.8)$$

U slučaju kada se koristi rekurzivna STFT računata po formuli (3.9) procjena složenosti iznosi:

$$T_{RSTFT} = (2l_k + 3) \frac{LN}{l_k} + 2pL \frac{N}{l_k} + \frac{N}{l_k}. \quad (4.9)$$

Maksimalna ušteda u broju operacija primjenom rekurzivnog metoda za računanje STFT (3.9) u odnosu na računanje primjenom FFT algoritama data je u tabeli 3.1. Poredeći (4.8) i (4.9) zaključuje se da je ušteda ista i u predloženom algoritmu. Procentualna ušteda u broju operacija za prozor širine $L = 1024$ uz $p = 50$ data je u tabeli 4.1. Vrijeme izvršavanja algoritma, za signal dužine $M = 2256$ i prozor širine $L = 256$ odbiraka dato je u tabeli 4.2 za nekoliko različitih koraka l . Za svaku vrijednost koraka proračun je ponovljen 100 puta, a zatim su dobijeni rezultati usrednjeni. Teorijski je očekivano, na osnovu rezultata u tabeli 3.1 da do uštede u broju operacija dođe u slučaju kada je $l \leq 4$. Potrebno je napomenuti da je u dobijeno vrijeme izvršavanja uključeno i vrijeme potrebno za poziv pomoćnih funkcija pri računanju algoritama. Simulacija je izvršena na računaru sa procesorom Intel(R) Core(TM) i3-2330M sa 2.20GHz i 4GB RAM-a.

4.3 Primjeri

U primjerima će biti korišćena STFT, kao ilustrativna TF reprezentacija. Budući da može biti realizovana rekurzivno, u skladu sa razmatranjima u prethodnoj glavi, njeno

Tabela 4.1: Procentualna ušteda u broju operacija algoritma za estimaciju periode m-D-a primjenom predloženog rekurzivnog metoda u odnosu na broj operacija direktnom primjenom FFT-a za računanje STFT, za $L = 1024$

l	ušteda
1	63.83%
2	49.65%
3	35.46%
4	21.27%
5	7.09%

Tabela 4.2: Vrijeme izvršavanja algoritma za računanje periode m-D-a primjenom FFT algoritama za računanje STFT i primjenom rekurzivne STFT u prvom koraku za signal dužine $N = 2256$ odbiraka i prozor širine $L = 256$ odbiraka

l	1	2	3	4	5	6
FFT	0.64s	0.24s	0.10s	0.05s	0.03s	0.01s
RSTFT	0.31s	0.20s	0.19s	0.18s	0.17s	0.17s

korišćenje na ovom mjestu predstavlja i ilustraciju primjene ranije uvedenih rekurzivnih algoritama. Za testiranje su korišćeni sintetički signali koji posjeduju karakteristike realnih radarskih signala u kojima postoji efekat m-D.

Primjer 4.1. Razmatra se zašumljeni sinusoidalno modulirani FM signal sa periodičnom IF koja reprezentuje pojavu m-D efekta:

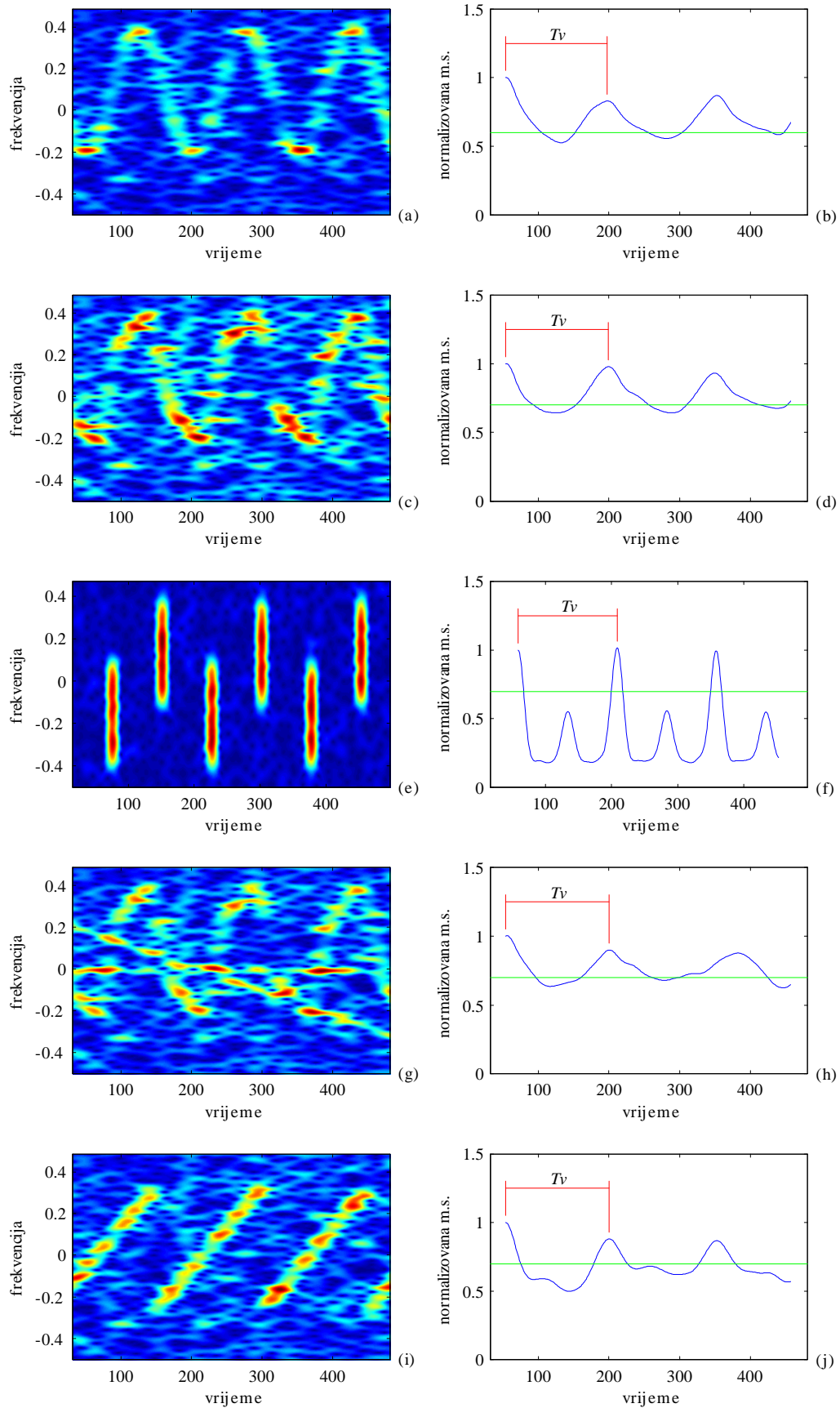
$$x(n) = \exp(j0.6 \sin(2\pi f_v n + \pi/3)/f_v/2 + j0.2\pi n) + \nu(n) \quad (4.10)$$

dužine $N = 512$, čija je diskretna frekvencija modulacije $f_v = 1/150$ (frekvencija m-D). Signal je kontaminiran bijelim kompleksnim Gauss-ovim šumom srednje vrijednosti nula. Odnos signal šum je 10 dB. Posmatranjem modula STFT na slici 4.1 pod a) može se zaključiti da je aproksimirani broj perioda micro-Doppler-a 3. Posmatranjem STFT ovog zašumljenog signala perida m-D se ne može precizno odrediti, zbog loše koncentracije usljed funkcije prozora STFT-a, kao i zbog oštećenja nastalih usled prisustva šuma. Procijenjeni broj kolona je $p = 43$. Normalizovana mjera sličnosti prikazana je na istoj slici pod b). Rastojanje između dva uzastopna maksimuma iznosi $T_v = 149.3451$.

Primjer 4.2. Posmatra se zašumljeni FM signal opisan relacijom:

$$x(n) = \exp(j0.6 \sin(2\pi n/f_v + \pi/3)) \times \exp(j0.1 \sin(6\pi n/f_v + \pi/3)/(f_v/2) + j0.2\pi n) + \nu(n) \quad (4.11)$$

čija je $f_v = 1/150$, gdje je $SNR = 10$ dB a šum je bijeli, kompleksan i Gauss-ov, kao u primjeru 4.1 Na slici 4.1 pod c) prikazan je $|STFT(n, k)|$ posmatranog signala (4.11). Ovaj primjer takođe ilustruje činjenicu da određivanje periode IF nije jednostavno vizuelnim



Slika 4.1: Estimacija periode micro-Doppler-a. Prva kolona: $|STFT(n, k)|$ signala iz primjera 4.1-4.5 ; druga kolona: dobijene normalizovane mjere koncentracije.

posmatranjem TF reprezentacije. Normalizovana mjera sličnosti prikazana je na istoj slici pod d). Dobijena perioda $T_v = 149.3450$ predstavlja rastojanje između dva uzastopna maksimuma, kao što je označeno na slici.

Primjer 4.3. Na slici 4.1 pod e) data je $|STFT(n, k)|$ zašumljenog FM signala čija je IF periodična. Predloženi algoritam je upotrijebljen za određivanje periode m-D. FM signal je oštećen kompleksnim, bijelim Gauss-ovim šumom, pri čemu je $SNR=35$ dB. Za razliku od prethodnih primjera, u ovom slučaju se pored maksimalnih vrijednosti mjere sličnosti (ista slika, pod f)) kao funkcije od n pojavljuju značajno velike vrijednosti u drugim trenucima, izvan maksimuma. Ovaj primjer ilustruje koliko može biti značajno pravilno odabiranje praga. Prag je odabran tako da sprečava uticaj spomenutih vrijednosti na estimaciju periode. Procijenjena vrijednost periode je $T_v = 149.9558$.

Primjer 4.4. Razmatra se multikomponentni zašumljeni FM signal $x(n) = x_1(n) + x_2(n) + x_3(n) + \nu(n)$, gdje je $f_v = 1/150$. Signal se sastoji od jednog LFM signala čija IF nije periodična:

$$x_1(n) = 0.5 \exp(-j\pi 0.6n^2/512 + j0.5\pi n), \quad (4.12)$$

jedne kompleksne sinusoide čija je frekvencija 0 (dakle, konstantna):

$$x_2(n) = 0.5 \exp(j0), \quad (4.13)$$

i od jedne komponente sa periodičnom IF:

$$x_3(n) = \exp(j0.6 \sin(2\pi f_v n + \pi/3))/(f_v/2) \times \exp(j0.1 \sin(6\pi f_v n + \pi/3)/3)/(f_v/2) \times \exp(j0.2\pi n). \quad (4.14)$$

Signal je zašumljen kompleksnim bijelim Gauss-ovim šumom, pri čemu je $SNR = 10$ dB. Slika 4.1 pod g) prikazuje $|STFT(n, k)|$ zašumljenog signala $x(n)$, dok je odgovarajuća mjera sličnosti data na istoj slici pod h). Kao što je i očekivano, neperiodične komponente signala $x(n)$ su poremetile maksimume mjere sličnosti, ali, sa pogodnim odabirom praga, algoritam i dalje veoma dobro određuje periodu m-D. Njena estimirana vrijednost je $T_v = 150.0735$.

Primjer 4.5. Posmatra se vremenski ograničen čirp signal $s(n)$, kod kojeg je $f_v = 1/150$:

$$s(n) = \begin{cases} \exp(j0.6\pi f_v n^2 - j0.5\pi n), & 0 \leq n \leq T_v \\ 0, & \text{ostalo } n \end{cases}$$

Neka je dat diskretni zašumljeni signal $x(n)$ koji se sastoji od 5 signala $s(n)$:

$$x(n) = \sum_{m=0}^4 s(n - m/f_v) + \nu(n).$$

Signal je kontaminiran bijelim kompleksnim Gauss-ovim šumom, sa $SNR = 10$ dB.

Slika 4.1 pod i) prikazuje $|STFT(n, k)|$ signala $x(n)$ u prvih 512 tačaka, dok je na istoj slici pod j) prikazana normalizovana mjera sličnosti. Period m-D $T = 149.4715$ je procijenjen kao rastojanje između dva uzastopna maksimuma.

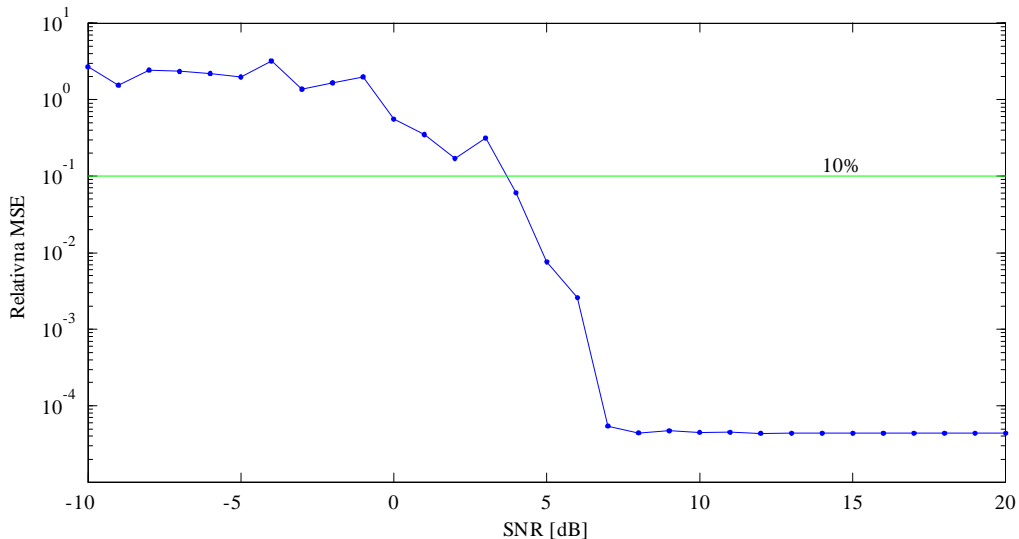
4.4 Eksperimentalna MSE analiza

Predloženi algoritam je testiran u uslovima kompleksnog bijelog Gauss-ovog šuma, statistički nezavisnim realnim i imaginarnim dijelom. Vršena je procjena periode m-D signala (4.11) iz primjera 4.2, gdje je $f_v = 1/150$ frekvencija micro-Doppler-a. SNR je variran u opsegu od -10 dB do 20 dB. Za svaku vrijednost SNR-a eksperiment je ponovljen po 100 puta. U algoritmu je korišćena parabolična interpolacija. Računata je relativna vrijednost greške u procjeni frekvencije m-D, data odnosom procijenjene i zadate vrijednosti, a zatim su rezultati usrednjavani za svaku pojedinačnu vrijednost SNR-a. Slika 4.2 prikazuje dobijenu srednju kvadratnu vrijednost relativne greške u procjeni frekvencije micro-Doppler-a. Relativna greška računata je po formuli:

$$MSE = E \left[\left| \frac{T_\nu}{T_t} \right|^2 \right] \quad (4.15)$$

gdje je sa T_ν označena estimirana vrijednost periode m-D primjenom predloženog algoritma, a sa $T_t = 1/f_\nu$ je označena prava (zadata) vrijednost ove periode u signalu iz eksperimenta.

Na slici je označeno da je do vrijednosti SNR od oko 4 dB dobijena greška maksimalno 10%. Daljim smanjivanjem SNR-a greška se povećava.



Slika 4.2: Rezultati MSE analize predloženog algoritma. Horizontalna linija označava do koje najniže vrijednosti SNR-a je MSE ispod 10%

Glava 5

Estimacija prvog izvoda faze i definisanje novih reprezentacija

Vremensko-frekvencijske reprezentacije mogu biti definisane na bazi estimacije prvog izvoda faze korišćenjem različitih relacija za aproksimaciju. U tu svrhu neophodno je uvesti koncept idealne TF reprezentacije. Opravdanost takvog matematičkog pristupa biće pokazana kroz primjer nekih kvadratnih distribucija. Bolja tačnost aproksimacije izvoda povlači i veću koncentraciju signala duž trenutne frekvencije u reprezentaciji baziranoj na ovoj aproksimaciji. Primjenom ovog postupka biće definisana nova vremensko-frekvencijska reprezentacija, koja posjeduje poboljšanje u smislu koncentracije signala u TF ravni, na račun numeričke kompleksnosti. Nakon toga, u cilju smanjenja pojave nepoželjnih kros-članova, biće predložena implementacija reprezentacije bazirana na konceptima ograničenih konvolucija, odnosno bazirana na pristupu koji se koristi u S-metodu. Na kraju, biće predložena implementacija reprezentacije rekurzivnim putem, bazirana na konceptima rekurzivne STFT prezentovane u trećoj glavi, i konceptima S-metoda, koja objedinjuje smanjenje numeričke složenosti i očuvanje visoke koncentracije auto-članova originalne reprezentacije, uz značajno smanjenje pojave kros-komponenti.

5.1 Idealna vremensko-frekvencijska reprezentacija

Neka se posmatra generalna forma monokomponentnog signala

$$x(t) = A(t)e^{j\phi(t)}, \quad (5.1)$$

pod pretpostavkom da su varijacije amplitude signala značajno manje u odnosu na varijacije faze, odnosno, $|A'(t)| \ll |\phi'(t)|$. Idealna vremensko-frekvencijska reprezentacija na najbolji mogući način koncentriše energiju signala u vremensko-frekvencijskoj ravni duž njegove trenutne frekvencije, koja je definisana kao prvi izvod faze signala po vremenu,

odnosno [1]:

$$\Omega(t) = \frac{d\phi(t)}{dt}. \quad (5.2)$$

Dakle, u skladu sa prethodnom definicijom trenutne frekvencije, idealna vremensko-frekvencijska reprezentacija bi trebalo da na trenutnoj frekvenciji predstavlja delta impuls, odnosno, njena definicija je

$$ITF(t, \Omega) = 2\pi |A(t)|^2 \delta(\Omega - \phi'(t)). \quad (5.3)$$

Jedan od aktuelnih problema u vremensko-frekvencijskoj analizi jeste pronalaženje takve reprezentacije, koja je po svojim karakteristikama što je moguće bliža ITF. Problem se može intrerpretirati i na sljedeći način: potrebno je pronaći transformaciju signala koja će se koristiti za dobijanje reprezentacije oblika (5.3). Lako se određuje da je ITF Fourier-ova transformacija funkcije oblika:

$$R(t, \tau) = |A(t)|^2 e^{j\phi'(t)\tau}, \quad (5.4)$$

jer važi sljedeće:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} R(t, \tau) e^{-j\omega\tau} d\tau &= \int_{-\infty}^{\infty} |A(t)|^2 e^{j\phi'(t)\tau} e^{-j\Omega\tau} d\tau \\ &= |A(t)|^2 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j(\Omega - \phi'(t))\tau} d\tau = 2\pi |A(t)|^2 \delta(\Omega - \phi'(t)). \end{aligned} \quad (5.5)$$

5.2 Kvadratne reprezentacije

Primjeri poznatih distribucija: Wigner-ove i Rihaczek-ove ilustruju opravdanost ovakvog teorijskog pristupa. Poznato je da se prvi izvod može računati na sljedeći način:

$$\Omega'(t) \approx \frac{\phi(t) - \phi(t - \tau)}{\tau} = \frac{d\phi(t)}{dt} + O(\phi''(t)), \quad (5.6)$$

gdje $O(\phi''(\tau))$ označava da je greška u aproksimaciji prvog izvoda faze reda veličine drugog izvoda faze po promjenljivoj τ . Ako se izraz (5.6) uvrsti u formulu (5.4), dobija se funkcija oblika:

$$R(t, \tau) = |A(t)|^2 e^{j\phi'(t)\tau} = |A(t)|^2 e^{j\frac{\phi(t) - \phi(t - \tau)}{\tau}\tau} = A(t) e^{j\phi(t)} (A(t) e^{j\phi(t - \tau)})^* = x(t) x^*(t - \tau),$$

jer je $A(t) \approx A(t + \tau)$, čija je FT po promjenljivoj τ :

$$RD(t, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R(t, \tau) e^{-j\omega\tau} d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)x^*(t - \tau) e^{-j\omega\tau} d\tau. \quad (5.7)$$

zapravo Richaczek-ova distribucija. Kao što je poznato ova distribucija se već kod signala čija je faza polinom drugog reda karakteriše rasipanjem oko trenutne frekvencije, što je posljedica greške u aproksimaciji prvog izvoda faze.

Wigner-ova distribucija može se dobiti istim postupkom, na osnovu sljedeće aproksimacije prvog izvoda faze:

$$\Omega(t) \approx \frac{\phi(t + \frac{\tau}{2}) - \phi(t - \frac{\tau}{2})}{\tau} = \frac{d\phi(t)}{dt} + O(\phi'''(t))$$

Ponavljajući isti postupak, dobijamo, uz $A(t) \approx A(t + \tau)$:

$$\begin{aligned} R(t, \tau) &= A^2(t) e^{j\phi'(t)\tau} = A^2(t) e^{j\frac{\phi(t+\frac{\tau}{2}) - \phi(t-\frac{\tau}{2})}{\tau}\tau} \\ &= A(t) e^{j\phi(t+\frac{\tau}{2})} (A(t) e^{j\phi(t+\frac{\tau}{2})})^* = x(t + \frac{\tau}{2}) x^*(t - \frac{\tau}{2}) \end{aligned}$$

Fourier-ova transformacija prethodnog izraza predstavlja Wigner-ovu distribuciju:

$$WD(t, \Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R(t, \tau) e^{-j\Omega\tau} d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} x(t + \frac{\tau}{2}) x^*(t - \frac{\tau}{2}) e^{-j\Omega\tau} d\tau.$$

Uvođenjem prozora po τ u prethodnoj formuli, dobija se pseudo-Wigner-ova distribucija (PWD), oblika:

$$PWD(t, \Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} w(\frac{\tau}{2}) x(t + \frac{\tau}{2}) x^*(t - \frac{\tau}{2}) e^{-j\Omega\tau} d\tau$$

Kako iz formule vidimo da je sada greška u aproksimaciji prvog izvoda faze reda veličine trećeg izvoda faze, postaje jasno da će Wignerova distribucija za signale čija se faza može predstaviti polinomom najviše drugog reda, kao što je poznato u literaturi, dati idealnu koncentraciju, dok će za slučaj signala čija je faza polinom reda većeg od dva nastupiti očekivano rasipanje koncentracije.

5.3 Opšti pristup određivanju estimatora trenutne frekvencije

Aproksimacija prvog izvoda faze (IF) može se izvršiti korišćenjem [1]:

$$\Omega(t) \approx \frac{\sum_i b_i \phi(t + c_i \tau)}{\tau} = \frac{d\phi(t)}{dt} + O(\phi^{(p)}(\tau)). \quad (5.8)$$

Imajući u vidu prethodna razmatranja, i formulu za autokorelaciju (5.4) koja daje ITF, generalna forma odgovarajuće autokorelacione funkcije (5.8) bi glasila:

$$R(t, \tau) = \prod_i x^{b_i}(t + c_i\tau) \quad (5.9)$$

gdje je uz pretpostavku o sporopromjenljivoj amplitudi u odnosu na fazu bez gubitka opštosti razmatranja zanemarena amplituda signala $x(t)$. Generalna forma distribucije zasnovane na aproksimaciji (5.8) predstavlja FT autokorelacione funkcije (5.9):

$$GD(t, \Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R(t, \tau) e^{-j\Omega\tau} d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} \prod_i x^{b_i}(t + c_i\tau) e^{-j\Omega\tau} d\tau. \quad (5.10)$$

Razvojem u Tejlor-ov red izraza $b_i\phi(t + c_i\tau)$ u okolini tačke t , može se doći do koeficijenata b_i i c_i , na osnovu rezultujućeg sistema jednačina. Spomenuti razvoj u Tejlor-ov red se može zapisati kao:

$$b_i\phi(t + c_i\tau) \approx b_i\phi(t) + b_i\phi'(t)c_i\tau + b_i\phi''(t)\frac{(c_i\tau)^2}{2!} + b_i\phi'''(t)\frac{(c_i\tau)^3}{3!} + b_i\phi^{(4)}(t)\frac{(c_i\tau)^4}{4!} + \dots \quad (5.11)$$

Potrebno je postaviti uslove koje traženi koeficijenti treba da zadovoljavaju:

1. Suma koeficijenata uz $\phi(t)$ treba da bude jednaka nuli, kako bi se poništio direktan uticaj faze signala na datu reprezentaciju;
2. Suma koeficijenata uz $\phi'(t)$ treba da bude jednaka jedinici, jer je cilj estimacija prvog izvoda faze;
3. Suma koeficijenata uz ostale izvode faze u redu (5.11) treba da bude jednaka nuli (do željenog reda, odnosno željene tačnosti aproksimacije) kako bi se poništio uticaj viših izvoda faze do željenog reda.

5.4 Predložena reprezentacija višeg reda

Razmatranja iz prethodnih poglavlja poslužiće kao motivacija za posmatranje još jedne aproksimacije prvog izvoda faze, u cilju definisanja distribucije koja bi mogla dati idealnu koncentraciju i za slučaj signala čija se faza može predstaviti polinomima do reda četiri, što proširuje klasu signala za koje se mogu dobiti izuzetno dobre koncentracije u vremensko-frekvencijskoj ravni, u odnosu na rezultate dobijene primjenom Wigner-ove distribucije. Međutim, ova poboljšanja dobiće se na račun povećanja složenosti distribucije i problema koje to sa sobom može nositi.

Imajući u vidu generalnu formulu (5.8) za razvoj estimatora prvog izvoda, kao i uslove koje koeficijenti b_i i c_i treba da zadovoljavaju, dobijenih posmatranjem Tejlor-ovog reda

(5.11) i uzimajući u obzir željenu tačnost, dobija se sistem jednačina:

$$\begin{aligned}
 b_1 + b_2 + b_3 + b_4 &= 0 \\
 b_1c_1 + b_2c_2 + b_3c_3 + b_4c_4 &= 1 \\
 b_1c_1^2 + b_2c_2^2 + b_3c_3^2 + b_4c_4^2 &= 0 \\
 b_1c_1^3 + b_2c_2^3 + b_3c_3^3 + b_4c_4^3 &= 0.
 \end{aligned} \tag{5.12}$$

Dakle, uz navedene uslove, imajući u obziru pravila diferenciranja polinoma, ukoliko se faza signala može predstaviti polinomom maksimalno četvrtog reda, greška u aproksimaciji njenog prvog izvoda biće jednaka nuli, jer bi, na osnovu Tejlora-ovog reda (5.11) tek peti izvod faze (koji je jednak nuli) imao uticaj na njenu tačnost. Ukoliko reprezentacija treba da bude realna (odnosno da odgovarajuća autokorelaciona funkcija posjeduje Hermitsku simetriju), neophodno je da bude zadovoljeno:

$$\begin{aligned}
 b_1 &= -b_2, \quad c_1 = -c_2 \\
 b_3 &= -b_4, \quad c_3 = -c_4,
 \end{aligned}$$

pa se sistem jednačina svodi na:

$$b_1c_1 + b_3c_3 = \frac{1}{2} \tag{5.13}$$

$$b_1c_1^3 + b_3c_3^3 = 0. \tag{5.14}$$

Očigledno, u pitanju je sistem od dvije jednačine i četiri nepoznate. To znači da prethodni sistem može omogućiti razvijanje klase reprezentacija. Ukoliko se pretpostave vrijednosti $b_1 = 1$ i $b_3 = 8$ tada slijedi uz uslove za Hermitsku simetriju da je $b_2 = -b_1 = -1$ i $b_4 = -b_3 = -8$. Tada sistem jednačina (5.13) i (5.14) ima jedinstveno rješenje - koeficijente $c_1 = -1/6$ i $c_3 = 1/12$. Preostala dva koeficijenta dobijaju se iz uslova $c_2 = -c_1 = 1/6$ i $c_4 = -c_3 = -1/12$. Na osnovu formule za aproksimaciju (5.8) dobija se:

$$\begin{aligned}
 \Omega(t) &= \phi'(t) \approx \frac{\phi(t - \tau/6) - 8\phi(t - \tau/12) + 8\phi(t + \tau/12) - \phi(t + \tau/6)}{\tau} \\
 &= \frac{d\phi(t)}{dt} + O(\phi^{(5)}(\tau))
 \end{aligned} \tag{5.15}$$

Analogno prethodnim razmatranjima, dobija se funkcija:

$$R(t, \tau) = x(t - \frac{\tau}{6})x^{*8}(t - \frac{\tau}{12})x^8(t + \frac{\tau}{12})x^*(t + \frac{\tau}{6}), \tag{5.16}$$

čija Fourier-ova transformacija daje ITF, odnosno, dobija se idealna koncentracija duž trenutne frekvencije, kod onih signala čija je faza polinom maksimalno petog reda. Dobija

se, dakle, vremensko-frekvencijska reprezentacija definisana sljedećim izrazom:

$$\begin{aligned} PD(t, \Omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} R(t, \tau) e^{-j\Omega\tau} d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t - \frac{\tau}{6}) x^{*8}(t - \frac{\tau}{12}) x^8(t + \frac{\tau}{12}) x^*(t + \frac{\tau}{6}) e^{-j\Omega\tau} d\tau \end{aligned} \quad (5.17)$$

Budući da u realizacijama treba razmatrati konačno kašnjenje τ , može se definisati forma ove TF reprezentacije sa funkcijom prozora $w(\tau)$, ograničenog trajanja:

$$PD(t, \Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} w(\frac{\tau}{12}) x(t - \frac{\tau}{6}) x^{*8}(t - \frac{\tau}{12}) x^8(t + \frac{\tau}{12}) x^*(t + \frac{\tau}{6}) e^{-j\Omega\tau} d\tau \quad (5.18)$$

Sa stanovišta numeričkih implementacija, značajno je pronaći diskretnu formu ove reprezentacije. Uvođenjem smjene $v = \tau/12$ prethodni izraz postaje:

$$PD(t, \Omega) = 12 \int_{-\infty}^{\infty} w(v) x(t - 2v) x^{*8}(t - v) x^8(t + v) x^*(t + 2v) e^{-j12\Omega v} dv$$

Diskretizacija po vremenu se obavlja odabiranjem signala $x(t)$, tako da je $t = m\Delta t$, a takođe je neophodno diskretizovati i promjenljivu $\tau = n\Delta t$:

$$PD(n\Delta t, \Omega) = 12 \sum_{m=-\infty}^{\infty} w(m\Delta t) x((n - 2m)\Delta t) x^{*8}((n - m)\Delta t) \times \quad (5.19)$$

$$\times x^8((n + m)\Delta t) x^*((n + 2m)\Delta t) e^{-j12\Omega m\Delta t} \Delta t, \quad (5.20)$$

gdje je Δt period odabiranja. Nakon uvođenja odgovarajućih smjena za signale iz prethodne formule, i imajući u vidu definiciju diskretne frekvencije [5, 6] $\omega = \Omega\Delta t$, dolazi se do:

$$PD(n, \omega) = 12 \sum_{m=-\infty}^{\infty} w(m) x(n - 2m) \times x^{*8}(n - m) x^8(n + m) x^*(n + 2m) e^{-j12\omega m},$$

što predstavlja formu predložene TF reprezentacije za diskretne signale. Uočimo da je $PD(n, \omega)$ periodična po ω sa periodom $\pi/6$, i da period odabiranja ovdje treba da bude, u cilju sprečavanja aliasing-a $\Delta t = 1/(12f_{\max})$, gdje je f_{\max} maksimalna učestanost u spektru signala $x(n)$. To znači da će sa funkcijom prozora istog trajanja kao kod Wigner-ove distribucije, $PD(n, \omega)$ zahtijevati šest puta više odbiraka. Diskretizujući

frekvenciju pomoću $\omega = \pi k/6N$, dobija diskretna formu predložene reprezentacije:

$$PD(n, k) = 12 \sum_{m=-6N}^{6N-1} w(m)x(n-2m)x^{*8}(n-m)x^8(n+m)x^*(n+2m)e^{-\frac{j2\pi mk}{N}} \quad (5.21)$$

5.4.1 Osnovna svojstva predložene reprezentacije

Sada će biti navedene neke od osobina predložene reprezentacije. Prije svega, ona je realna, jer za funkciju $R(t, \tau)$ iz (5.16) važi svojstvo Hermitske simetrije, što je i iskorišćeno postavljanjem uslova za aproksimaciju $b_1 = -b_2$, $c_1 = -c_2$, $b_3 = -b_4$, $c_3 = -c_4$. Dakle, važiće:

$$R(t, \tau) = R^*(t, -\tau)$$

a poznato je da je Fourier-ova transformacija funkcije sa ovim svojstvom čisto realna funkcija. Zato se može pisati:

$$PD^*(t, \Omega) = PD(t, \Omega)$$

Još jedno bitno svojstvo jeste da za signal pomjeren u vremenu, $x_1(t) = x(t - t_0)$, važi da se dobija reprezentacija pomjerena za istu vrijednost u vremenu:

$$PD_{x_1}(t, \Omega) = PD_x(t - t_0, \Omega).$$

Lako se pokazuje i da za signal $x_1(t) = x(t)e^{j\Omega_0 t}$ važi sljedeće svojstvo (pomjeranje po frekvenciji):

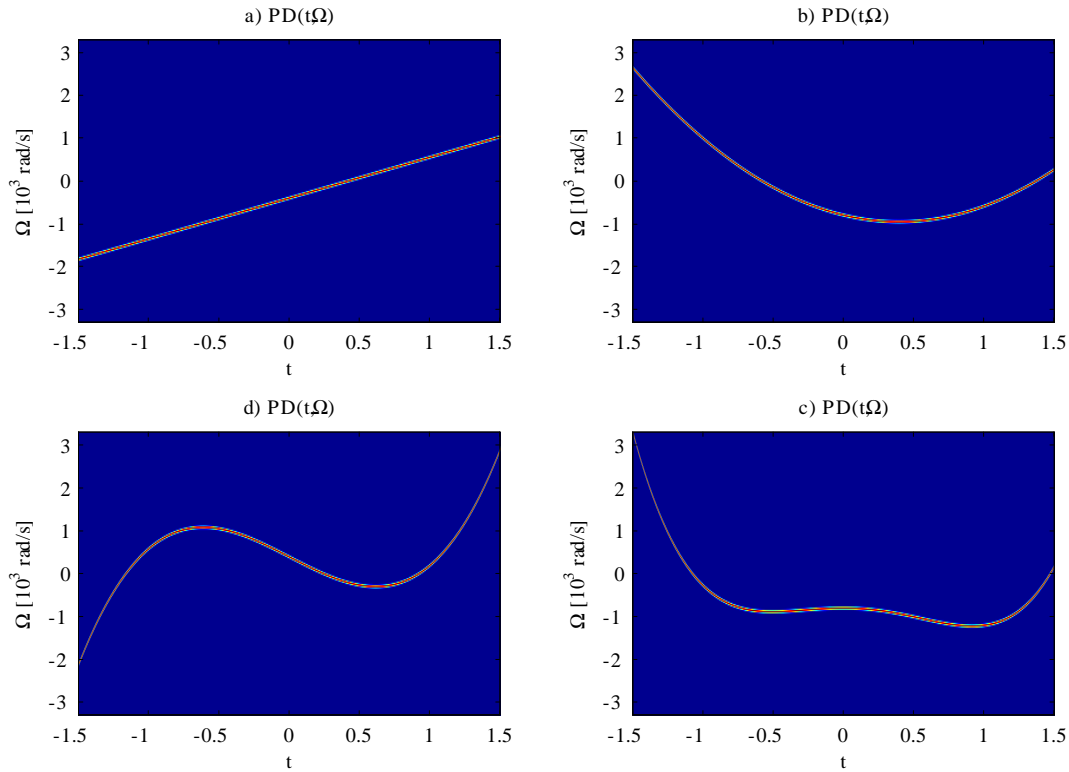
$$PD_{x_1}(t, \Omega) = PD_x(t, \Omega - \Omega_0).$$

5.4.2 Primjeri

Primjer 5.1. Posmatraju se kompleksni signali sa polinomijalnom fazom (PPS) u intervalu $-1.5 \text{ s} \leq t \leq 1.5 \text{ s}$. Signali su odabrani sa periodom odabiranja $\Delta t = 0.001$ gdje je korišćen Hanning-ov prozor širine 0.2s.

- PPS signal drugog reda (LFM): $x(t) = e^{18j\pi t^2 - 10j\pi t}$;
- PPS signal trećeg reda: $x(t) = e^{19jt^3 - 15j\pi t^2 - 20j\pi t}$;
- PPS signal četvrtog reda: $x(t) = e^{j32\pi t^4 - j32\pi t^2 + j10\pi t}$;
- PPS signal petog reda: $x(t) = e^{22j\pi t^5 - 10j\pi t^4 - 15j\pi t^3 - 20j\pi t}$.

Budući da je faza signala a) - d) polinom reda manjeg od četiri, na osnovu izložene teorije očekuje se idealna koncentracija duž trenutne frekvencije, što je i eksperimentalno



Slika 5.1: $PD(t, \Omega)$ karakterističnih polinomijalno-faznih signala iz primjera 5.1. Vrijeme je zadato u sekundama, a frekvencija u radijanima u sekundi.

potvrđeno. U posljednjem signalu faza je polinom petog reda, ali je i uprkos tome koncentracija signala i dalje dobra. Na slici 5.1 a) - d) prikazane su $PD(\Omega, t)$ ovih signala.

Primjer 5.2. Posmatra se signal sa složenoperiodičnom modulacijom:

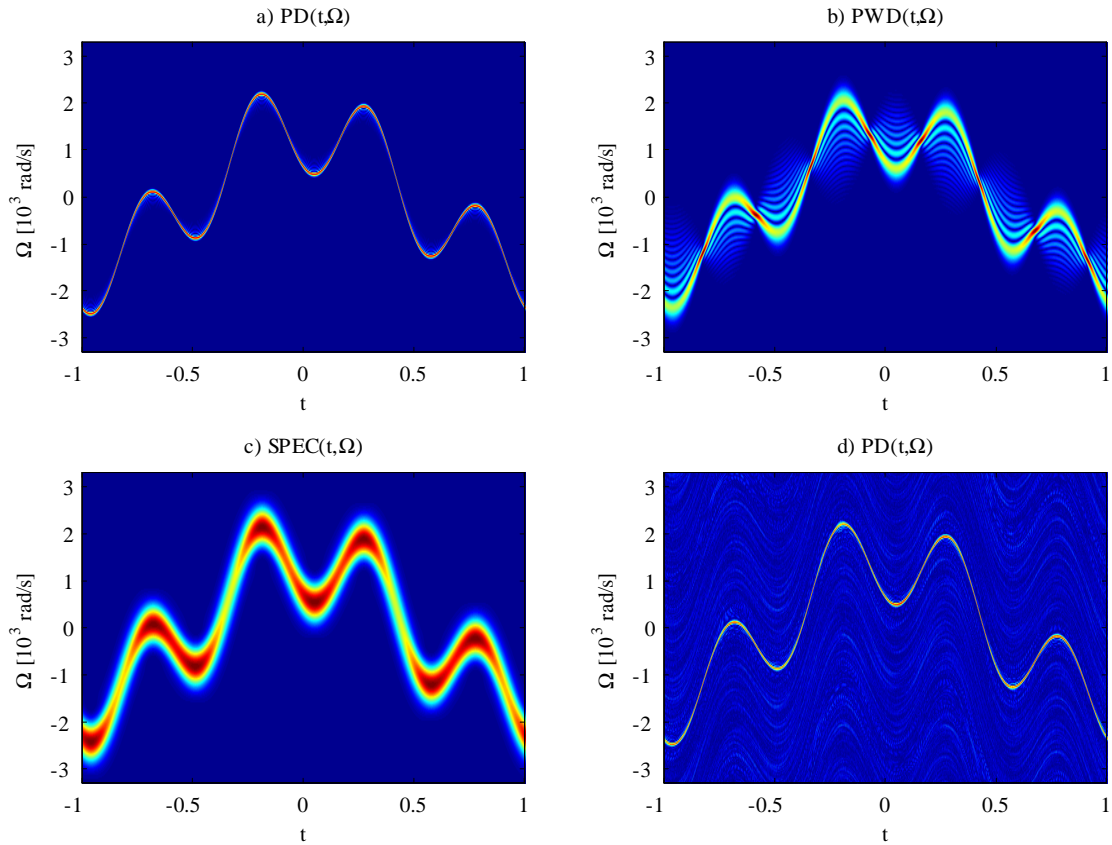
$$x(t) = e^{j12\pi \sin(\pi t) + j2\pi \cos(4\pi t + \pi/3)} \quad (5.22)$$

u intervalu $-1 \text{ s} \leq t \leq 1 \text{ s}$. Signal je odabran sa periodom odabiranja $\Delta t = 0.001 \text{ s}$.

$PD(\Omega, t)$ je prikazana na slici 5.2 pod a). Korišćen je Hanning-ov prozor trajanja 0.2s. Predložena reprezentacija i u ovom slučaju jako dobro koncentriše signal duž trenutne frekvencije. U cilju poređenja kvaliteta koncentracije, na slici (5.2) pod b) prikazan je spektrogram istog signala pododabranog sa faktorom 12, gdje je korišćen Hanning-ov prozor trajanja 0.08s, i pseudo-Wigner-ova distribucija (slika 5.2 pod c)) istog signala pododabranog sa faktorom 6, uz korišćenje Hanning-ovog prozora dužine 0.2s.

Ovo je slučaj signala čija faza ne može biti predstavljena polinomom konačnog reda, tako da ne očekujemo idealnu reprezentaciju signala. Sa slike 5.2 se ipak vidi da je ova reprezentacija daje veću koncentraciju u odnosu na spektrogram i Wigner-ovu distribuciju. Na slici 5.2 pod a) se može uočiti rasipanje koncentracije, koje je reda veličine petog izvoda faze. Za posmatrani signal ovaj izvod dat je formulom:

$$\phi^{(5)}(t) = 12\pi^6 \cos(\pi t) - 2048\pi^6 \sin(4\pi t + \pi/3).$$



Slika 5.2: a) $PD(t, \Omega)$ složenoperiodično modulisanog signala iz primjera 5.2; b) Spektrogram sinusoidalno modulisanog signala iz primjera 5.2; c) PWD sinusoidalno modulisanog signala iz primjera 5.2; d) $PD(t, \Omega)$ sinusoidalno modulisanog signala iz primjera 5.2 zašumljenog bijelim šumom.

Najveće rasipanje dobiće se kada je $|\phi^{(5)}(t)|$ maksimalan, jer niži izvodi faze nemaju uticaja na rasipanje.

Primjer 5.3. Posmatra se signal (5.22). Dodat je kompleksni bijeli Gausov šum srednje vrijednosti nula. Varijansa realnog i imaginarnog dijela šuma su jednake, a odnos signal šum je 20dB.

Izračunata $PD(t, \Omega)$ prikazana na slici 5.2 pod d). Korišćen je Hanning-ov prozor trajanja 0.25 s. Na slici 5.2 pod d) mogu se uočiti komponente koje predstavljaju kros-članove između korisnog signala i šuma. One su posljedica visokog reda reprezentacije.

5.5 Realizacije predložene reprezentacije

Veoma izražena pojava kros članova kod reprezentacije date izrazom (5.18), koji su posljedica njenog visokog reda, može biti značajno smanjena ili u nekim slučajevima potpuno eliminisana korišćenjem pristupa zasnovanog na S-metodu. Takođe, numeričku složenost implementacije je moguće smanjiti korišćenjem rekurzivne realizacije STFT date

izrazima (3.8) i (3.9).

5.5.1 Realizacija primjenom ograničenih konvolucija

Podimo od definicije pseudo forme reprezentacije $PD(t, \Omega)$, za slučaj jediničnog pravougaonog prozora $w(\tau) = 1$, $-T/2 \leq \tau \leq T/2$, koja je data sljedećim izrazom:

$$PD(t, \Omega) = \int_{-T/2}^{T/2} x(t - \frac{\tau}{6})x^{*8}(t - \frac{\tau}{12})x^8(t + \frac{\tau}{12})x^*(t + \frac{\tau}{6})e^{-j\Omega\tau} d\tau. \quad (5.23)$$

Imajući u vidu svojstvo (1.55) FT kontinualnog signala, prethodni izraz može se tumačiti kao konvolucija u frekvencijskom domenu, za posmatrani trenutak t :

$$PD(t, \Omega) = R_{x^2}(t, \Omega) *_{\Omega} R_{x^{16}}(t, \Omega), \quad (5.24)$$

gdje su uvedene sljedeće oznake:

$$R_{x^2}(t, \Omega) = FT\{x(t - \frac{\tau}{6})x^*(t + \frac{\tau}{6})\}, \text{ i} \quad (5.25)$$

$$R_{x^{16}}(t, \Omega) = FT\{x^{*8}(t - \frac{\tau}{12})x^8(t + \frac{\tau}{12})\}. \quad (5.26)$$

Izraz (5.25), takođe imajući u vidu svojstvo (1.55) FT kontinualnog signala, može se predstaviti konvolucijom:

$$R_{x^2}(t, \Omega) = STFT_{n1}(t, \Omega) *_{\omega} STFT_{p1}(t, \Omega), \quad (5.27)$$

gdje je $STFT_{n1}(t, \Omega) = FT\{x(t - \frac{\tau}{6})\}$ i $STFT_{p1}(t, \Omega) = FT\{x^*(t + \frac{\tau}{6})\}$.

Ukoliko se uvedu oznake $STFT_{n2}(t, \Omega) = FT\{x^*(t - \frac{\tau}{12})\}$ i $STFT_{p2}(t, \Omega) = FT\{x(t + \frac{\tau}{12})\}$, kao i:

$$WD_x(t, \Omega) = FT\{x^*(t - \frac{\tau}{12})x(t + \frac{\tau}{12})\} = STFT_{n2}(t, \Omega) *_{\omega} STFT_{p2}(t, \Omega), \quad (5.28)$$

izraz (5.26) ćemo predstaviti pomoću konvolucija po frekvenciji:

$$R_{x^{16}}(t, \Omega) = WD_x(t, \Omega) *_{\omega} WD_x(t, \Omega) *_{\omega} WD_x(t, \Omega) *_{\omega} WD_x(t, \Omega). \quad (5.29)$$

Pretpostavimo su komponente u $STFT_{p2}(t, \Omega)$ lokalizovane, tako da je vrijednost $STFT_{p2}(t, \Omega)$ na bilo kojoj frekvenciji Ω_0 u vezi sa drugim vrijednostima $STFT_{p2}(t, \Omega)$ samo unutar lokalnog frekvencijskog regiona $[\Omega_0 - \Omega_L/2, \Omega_0 + \Omega_L/2]$. Drugim riječima, to znači da vrijednosti $STFT_{p2}(t, \Omega)$ koje su daleko od Ω_0 nijesu u vezi sa vrijednošću $STFT_{p2}(t, \Omega)$ u tački Ω_0 . Primjer takvog signala je multikomponentni signal čije su vrijednosti unutar regiona koji su uži od opsega Ω_L . Tada vrijednosti jedne komponente

signala nijesu u vezi sa vrijednostima drugih komponenti tog signala, u posmatranom trenutku t . Treba primijetiti da ovdje nema pretpostavki o lokaciji centralnih frekvencija Ω_0 , koje se u slučaju nestacionarnih signala vremenski mijenjaju. Naglasimo da pretpostavka o lokalizaciji ne povlači i pretpostavku da su vrijednosti $STFT_{p2}(t, \Omega)$ različite od nule samo unutar spomenutog regiona $[\Omega_0 - \Omega_L/2, \Omega_0 + \Omega_L/2]$. U slučaju multikomponentnih signala svaka komponenta ima svoj odgovarajući region.

Uzimajući u obzir da se koristi simetričan jedinični pravougaoni prozor, ekvivalentna analiza važiće i za $STFT_{n2}(t, \Omega) = FT\{x^*(t - \frac{\tau}{6})\}$, za posmatrani trenutak t . Zbog pojave operatora konjugovanja i imajući u vidu definiciju FT (1.43) komponenta koja se u $STFT_{p2}(t, \Omega)$ nalazi na učestanosti Ω_0 nalaziće se na toj učestanosti i u $STFT_{n2}(t, \Omega)$. U cilju dobijanja izraza (5.29), prvo će biti analizirano dobijanje izraza na bazi definicije konvolucije (1.52):

$$\begin{aligned} WD_x(t, \Omega) &= STFT_{n2}^*(t, \Omega) *_{\omega} STFT_{p2}(t, \Omega) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} STFT_{p2}(t, \varpi) STFT_{n2}(t, \Omega - \varpi) d\varpi. \end{aligned} \quad (5.30)$$

Uvođenjem smjene $\varpi_1 = \Omega/2 - \varpi/2$ prethodni izraz postaje:

$$WD_x(t, \Omega) = \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} STFT_{p2}(t, \frac{\Omega}{2} + \frac{\varpi_1}{2}) STFT_{n2}(t, \frac{\Omega}{2} - \frac{\varpi_1}{2}) d\varpi_1. \quad (5.31)$$

Uzimajući u obzir uvedenu pretpostavku o lokalizaciji komponenti u $STFT_{p2}(t, \Omega)$ i $STFT_{n2}(t, \Omega)$, granice konvolucionog integrala mogu se promijeniti na sljedeći način (imajući u vidu da konvolucija širi frekvencijski region dva puta u odnosu na region u $STFT_{p2}(t, \Omega)$, odnosno $STFT_{n2}(t, \Omega)$ širine Ω_L):

$$WD_x(t, \Omega) = \frac{1}{4\pi} \int_{-\Omega_L}^{\Omega_L} STFT_{p2}(t, \frac{\Omega}{2} + \frac{\varpi}{2}) STFT_{n2}(t, \frac{\Omega}{2} - \frac{\varpi}{2}) d\varpi. \quad (5.32)$$

Prethodni izraz se može interpretirati kao ograničena konvolucija. Ekvivalentno razmatranjima vezanim za definiciju i značenje izraza za S-metod (2.62), postavljanje odgovarajućih granica u integralu (5.32) značajno će uticati na smanjenje pojave kros-članova između onih vrijednosti reprezentacije koje su udaljene više od $2\Omega_L$. Kako je region od interesa za $STFT_{p2}(t, \Omega)$, odnosno $STFT_{n2}(t, \Omega)$ bio $[\Omega_0 - \Omega_L/2, \Omega_0 + \Omega_L/2]$, region od interesa za izraz (5.32) postaje $[2\Omega_0 - \Omega_L, 2\Omega_0 + \Omega_L]$.

Ekvivalentno dosadašnjem razmatranju, u cilju dobijanja izraza (5.29) prvo je

potrebno odrediti sljedeći izraz:

$$\begin{aligned} R_{x^4}(t, \Omega) &= WD_x(t, \Omega) *_{\omega} WD_x(t, \Omega) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} WD_x(t, \varpi) WD_x(t, \Omega - \varpi) d\varpi. \end{aligned} \quad (5.33)$$

Uvodeći istu smjenu kao u prethodnom izvođenju, i imajući u vidu širinu konvolucije dvije reprezentacije $WD_x(t, \Omega)$, dobija se:

$$R_{x^4}(t, \Omega) = \frac{1}{4\pi} \int_{-2\Omega_L}^{2\Omega_L} WD_x(t, \frac{\Omega}{2} + \frac{\varpi}{2}) WD_x(t, \frac{\Omega}{2} - \frac{\varpi}{2}) d\varpi, \quad (5.34)$$

pri čemu je sada region od interesa: $[4\Omega_0 - 2\Omega_L, 4\Omega_0 + 2\Omega_L]$. Slično prethodnim razmatranjima, izraz:

$$\begin{aligned} R_{x^8}(t, \Omega) &= R_{x^4}(t, \Omega) *_{\omega} R_{x^4}(t, \Omega) = \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_{-4\Omega_L}^{4\Omega_L} R_{x^4}(t, \frac{\Omega}{2} + \frac{\varpi}{2}) R_{x^4}(t, \frac{\Omega}{2} - \frac{\varpi}{2}) d\varpi, \end{aligned} \quad (5.35)$$

ima region od interesa $[8\Omega_0 - 4\Omega_L, 8\Omega_0 + 4\Omega_L]$, dok ciljni izraz:

$$\begin{aligned} R_{x^{16}}(t, \Omega) &= R_{x^8}(t, \Omega) *_{\omega} R_{x^8}(t, \Omega) = \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_{-8\Omega_L}^{8\Omega_L} R_{x^8}(t, \frac{\Omega}{2} + \frac{\varpi}{2}) R_{x^8}(t, \frac{\Omega}{2} - \frac{\varpi}{2}) d\varpi \end{aligned} \quad (5.36)$$

ima region od interesa $[16\Omega_0 - 8\Omega_L, 16\Omega_0 + 8\Omega_L]$.

Pri određivanju izraza za računanje (5.27) neophodno je naći vezu regiona za $STFT_{n1}(t, \Omega)$ i $STFT_{p1}(t, \Omega)$ sa odgovarajućim regionima $[\Omega_0 - \Omega_L/2, \Omega_0 + \Omega_L/2]$ transformacija $STFT_{p2}(t, \Omega)$ i $STFT_{n2}(t, \Omega)$. Posmatranjem definicija $STFT_{n1}(t, \Omega) = FT\{x(t - \frac{\tau}{6})\}$ i $STFT_{p1}(t, \Omega) = FT\{x^*(t + \frac{\tau}{6})\}$ prvo se može zaključiti da će $STFT_{n1}(t, \Omega)$ i $STFT_{p1}(t, \Omega)$ imati komponente u istom regionu, imajući u vidu simetričnost jediničnog pravougaonog prozora i definiciju FT (1.43), kao što je to bio slučaj i sa $STFT_{n2}(t, \Omega)$ i $STFT_{p2}(t, \Omega)$. Stoga se može posmatrati $STFT_{p1}(t, \Omega) = FT\{x^*(t + \frac{\tau}{6})\}$ sa jedne strane, čiji je region potrebno povezati sa regionom $[\Omega_0 - \Omega_L/2, \Omega_0 + \Omega_L/2]$ koji odgovara $STFT_{p2}(t, \Omega) = FT\{x(t + \frac{\tau}{12})\}$. Zbog operatora konjugovanja, frekvencijska osa u $STFT_{p1}(t, \Omega)$ biće obrnuta u odnosu na frekvencijsku osu u $STFT_{p2}(t, \Omega)$, a uzimajući u obzir odnos kašnjenja $\frac{\tau}{12}$ i $\frac{\tau}{6}$, lako se zaključuje da će komponenti u $STFT_{p2}(t, \Omega)$ na centralnoj učestanosti Ω_0 odgovarati komponenta na centralnoj učestanosti $-2\Omega_0$ u $STFT_{p1}(t, \Omega)$, dok će njena

širina biti duplo veća u odnosu na širinu Ω_L komponente u $STFT_{p2}(t, \Omega)$. Stoga se zaključuje da je odgovarajući region od interesa za $STFT_{n1}(t, \Omega)$, odnosno $STFT_{p1}(t, \Omega)$: $[-2\Omega_0 - \Omega_L, -2\Omega_0 + \Omega_L]$.

Izraz (5.27) može biti računat na sljedeći način, na osnovu prethodnih razmatranja vezanih za ograničene konvolucije, i širine dobijenog regiona od interesa:

$$\begin{aligned} R_{x^2}(t, \Omega) &= STFT_{n1}(t, \Omega) *_{\omega} STFT_{p1}(t, \Omega) \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_{-2\Omega_L}^{2\Omega_L} STFT_{p1}(t, \frac{\Omega}{2} + \frac{\varpi}{2}) STFT_{n1}(t, \frac{\Omega}{2} - \frac{\varpi}{2}) d\varpi. \end{aligned} \quad (5.37)$$

Region od interesa za $R_{x^2}(t, \Omega)$, u odnosu na regione od interesa za $STFT_{p2}(t, \Omega)$, odnosno $STFT_{n2}(t, \Omega)$ stoga postaje: $[-4\Omega_0 - 2\Omega_L, -4\Omega_0 + 2\Omega_L]$.

Konačno, formula za realizaciju predložene reprezentacije (5.23) računa se kao ograničena konvolucija $R_{x^2}(t, \Omega)$ sa $R_{x^{16}}(t, \Omega)$, pri čemu treba za obje funkcije omogućiti integraciju duž dobijenih lokalnih regiona:

$$\begin{aligned} PD(t, \Omega) &= R_{x^2}(t, \Omega) *_{\Omega} R_{x^{16}}(t, \Omega) \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_{-8\Omega_L}^{8\Omega_L} R_{x^2}(t, -\frac{\Omega}{4} - \frac{\varpi}{4}) R_{x^{16}}(t, \Omega - \varpi) d\varpi. \end{aligned} \quad (5.38)$$

U cilju prezentovanja diskretne forme ovog pristupa, za fiksni trenutak t posmatraju odbirci signala $x(t - \frac{\tau}{6})$, $x^*(t + \frac{\tau}{6})$, $x^*(t - \frac{\tau}{12})$ i $x(t + \frac{\tau}{12})$, dobijeni diskretizacijom po promjenljivoj τ . Pretpostavlja se upotreba pravougaonog prozora $w(n)$ dužine N odbiraka. Procedura za računanje diskretne forme reprezentacije (5.23) opisana je sljedećim algoritmom:

Korak 1: Izračunati diskretne signale $x_{n1}(n)$, $x_{p1}(n)$, $x_{n2}(n)$ i $x_{p2}(n)$ odabiranjem signala $x(t - \frac{\tau}{6})$, $x^*(t + \frac{\tau}{6})$, $x^*(t - \frac{\tau}{12})$ i $x(t + \frac{\tau}{12})$ po promjenljivoj τ , respektivno. Zatim izračunati odgovarajuće FT označene sa: $STFT_{n1}(t, k) = DFT\{x_{n1}(n)\}$, $STFT_{p1}(t, k) = DFT\{x_{p1}(n)\}$, $STFT_{n2}(t, k) = DFT\{x_{n2}(n)\}$ i $STFT_{p2}(t, k) = DFT\{x_{p2}(n)\}$, za $-N/2 \leq k \leq N/2 - 1$.

Korak 2: Izračunati $WD_x(t, k) = DFT\{x_{n2}(n)x_{p2}(n)\}$ korišćenjem konvolucije:

$$WD_x(t, k) = \sum_p STFT_{p2}(t, p) STFT_{n2}(t, k - p). \quad (5.39)$$

Slično kao u analizi realizacije u analognom domenu, i ovdje uvedimo pretpostavku da su komponente u $STFT_{n1}(t, k)$, odnosno $STFT_{p1}(t, k)$ lokalizovane u domenu diskretne frekvencije, odnosno da je komponenta koja se nalazi na bilo kojoj diskretnoj frekvenciji k_0 povezana samo sa lokalnim komponentama unutar regiona $[k_0 - L, k_0 + L]$. Slično razmatranju u analognom domenu, komponenta na učestanosti k_0 se nalazi u istom regionu

i za $STFT_{n_1}(t, k)$ i za $STFT_{p_1}(t, k)$, pod pretpostavkom simetričnog pravougaonog prozora. To znači da će u sumi (5.39) za svako k biti korišćen samo region $[k - L, k + L]$. Pošto ovo razmatranje važi i za $STFT_{n_1}(t, k)$ i za $STFT_{p_1}(t, k)$, granice za p u (5.39) dobijaju se eliminisanjem k_0 iz sistema nejednačina: $k_0 - L \leq p \leq k_0 + L$ i $k_0 - L \leq k - p \leq k_0 + L$:

$$k/2 - L \leq p \leq k/2 + L. \quad (5.40)$$

Komponenta koja se nalazi na učestanosti k_0 u $STFT_{n_1}(t, k)$ i $STFT_{p_1}(t, k)$, u dobijenoj $WD_x(t, k)$ nalaziće se na učestanosti $2k_0$, u regionu: $[2k_0 - 2L, 2k_0 + 2L]$. Konvolucija $WD_x(t, k)$ će imati ukupno $2N - 1$ frekvencijskih odbiraka.

Korak 3: Ekvivalentnom procedurom kao u Koraku 2, potrebno je izračunati konvolucije:

$$R_{x^4}(t, k) = DFT\{WD_x^2(t, k)\} = \sum_p WD_x(t, p)WD_x(t, k - p), \quad (5.41)$$

$$R_{x^8}(t, k) = DFT\{R_{x^4}^2(t, k)\} = \sum_p R_{x^4}(t, p)R_{x^4}(t, k - p), \quad (5.42)$$

$$R_{x^{16}}(t, k) = DFT\{R_{x^8}^2(t, k)\} = \sum_p R_{x^8}(t, p)R_{x^8}(t, k - p). \quad (5.43)$$

Na osnovu slične analize kao u Koraku 2, za konvoluciju (5.41) se zaključuje da su granice za p date sa: $k/2 - 2L \leq p \leq k/2 + 2L$, pri čemu komponenta u $R_{x^4}(t, k)$ koja odgovara komponenti na učestanosti k_0 u $STFT_{n_1}(t, k)$ i $STFT_{p_1}(t, k)$, nalaziće se u regionu $[4k_0 - 4L, 4k_0 + 4L]$. Konvolucija $R_{x^4}(t, k)$ imaće $2N - 1 + 2N - 1 - 1 = 4N - 3$ frekvencijskih odbiraka. Slično, odgovarajuća komponenta u $R_{x^8}(t, k)$ nalaziće se u regionu $[8k_0 - 8L, 8k_0 + 8L]$, pri čemu su granice za p pri računanju izraza (5.42) date sa: $k/2 - 4L \leq p \leq k/2 + 4L$, dok rezultujuća konvolucija $R_{x^8}(t, k)$ ima $8N - 7$ odbiraka. Za konvoluciju $R_{x^{16}}(t, k) = DFT\{x_{n_2}^8(n)x_{p_2}^8(n)\}$ granice za p su: $k/2 - 8L \leq p \leq k/2 + 8L$. Odgovarajuća komponenta nalaziće se u regionu $[16k_0 - 16L, 16k_0 + 16L]$, dok je ukupan broj odbiraka $16N - 14$.

Korak 4: Sada je potrebno izračunati konvoluciju:

$$\begin{aligned} R_{x^2}(t, k) &= DFT\{STFT_{n_1}(t, k)STFT_{p_1}(t, k)\} = \\ &= \sum_p STFT_{n_1}(t, p)STFT_{p_1}(t, k - p). \end{aligned} \quad (5.44)$$

Na osnovu izložene analize u analognom domenu, slično kao u slučaju $STFT_{n_2}(t, k)$ i $STFT_{p_2}(t, k)$, važiće da se posmatrana komponenta iz $STFT_{n_1}(t, k)$ nalaziti u istom regionu i na istoj učestanosti kao odgovarajuća komponenta u $STFT_{p_1}(t, k)$. Odgovarajuća komponenta koja se u $STFT_{n_2}(t, k)$, odnosno u $STFT_{p_2}(t, k)$ nalazi na učestanosti k_0 , kao što je razmatrano u Koraku 2, u $STFT_{n_2}(t, k)$, odnosno $STFT_{p_2}(t, k)$ nalaziće se u regionu $[-2k_0 - 4L, -2k_0 + 4L]$. Prilikom računanja konvolucije (5.44), korišćenjem identične analize kao u Koraku 2, zaključuje se da će granice za p biti date

sa: $k/2 - 4L \leq p \leq k/2 + 4L$. Odgovarajuća komponenta od interesa nalaziće se u regionu $[-4k_0 - 8L, -4k_0 + 8L]$, dok je dobijeni broj odbiraka $2N - 1$.

Korak 5: U cilju dobijanja rezultujuće reprezentacije, neophodno je izračunati konvoluciju:

$$PD(t, k) = \sum_p R_{x^2}(t, p) R_{x^{16}}(t, k - p). \quad (5.45)$$

Pri računanju prethodnog izraza, potrebno je naglasiti da je bitan redosljed sumanada u konvoluciji, budući da su regioni od interesa za $R_{x^2}(t, p)$ i $R_{x^{16}}(t, k - p)$ različiti. Kako je za $R_{x^2}(t, p)$ region od interesa u intervalu $[-4k_0 - 8L, -4k_0 + 8L]$, a za $R_{x^{16}}(t, k - p)$ region odgovarajuće komponente je $[16k_0 - 16L, 16k_0 + 16L]$, to će granice za p biti dobijene eliminisanjem nepoznatog k_0 iz $-4k_0 - 8L \leq p \leq -4k_0 + 8L$ i $16k_0 - 16L \leq k - p \leq 16k_0 + 16L$:

$$-k/3 - \lceil 16L/3 \rceil \leq p \leq -k/3 + \lceil 16L/3 \rceil, \quad (5.46)$$

gdje je sa $\lceil \cdot \rceil$ označeno zaokruživanje na prvi veći cio broj, kako ne bi došlo do oštećenja odgovarajućih auto-članova. Kako bi sa sigurnošću tvrdili da su auto-članovi potpuno očuvani, mogu se uzeti, dakle, sljedeće granice: $-k/3 - 6L \leq p \leq -k/3 + 6L$.

Prethodni algoritam je izložen uz pretpostavku da se vrijednosti odbiraka $x_{n1}(n), x_{p1}(n), x_{n2}(n)$ i $x_{p2}(n)$ dobijaju diskretizacijom po promjenljivoj τ , pri čemu nije razmatrano na koji način se ona vrši. Prilikom računanja diskretne reprezentacije $PD(n, k)$, gdje je signal $x(n)$ dobijen diskretizacijom promjenjive t polaznog signala $x(t)$ u skladu sa teoremom o odabiranju, neophodne vrijednosti odbiraka koje se ne nalaze na vremenskoj osi n , a odgovaraju analognim signalima $x(t - \frac{\tau}{6}), x^*(t + \frac{\tau}{6}), x^*(t - \frac{\tau}{12})$ i $x(t + \frac{\tau}{12})$ mogu se dobiti odgovarajućom interpolacijom - dodavanjem nula u frekvencijskom domenu [1]-[4].

5.5.2 Rekurzivna realizacija uz primjenu ograničenih konvolucija

Iako prethodno izloženi algoritam omogućava značajno smanjenje pojave kros-komponenti pri računanju diskretne reprezentacije $PD(n, k)$, nije vođeno računa o njegovoj numeričkoj složenosti. Potreba za interpolacijom vrijednosti signala, koja za tačke dobijene po promjenljivoj τ podrazumijevaju preodabiranje 12 puta, negativno utiče na numeričku kompleksnost izložene procedure. Ovdje će biti izložen pristup zasnovan na rekurzivnoj STFT (3.9) koja je predstavljena u trećoj glavi teze, koncepta ograničenih konvolucija iz prethodnog algoritma, uz dodatno korišćenje rekurzivnog pristupa zasnovanog na S-metodu u cilju redukcije potrebe za interpolacijom signala, a time i uz značajno smanjenje numeričke složenosti. Dodatno, računanje zasnovano na (3.9) omogućava rekurzivni pristup i u slučajevima kada se odbirci ne računaju u

uzastopnim trenucima n , i uštedu u broju potrebnih operacija pod određenim uslovima.

Analiza pristupa će prvo biti obavljena za slučaj kontinualnih signala, u cilju dodatnog pojašnjenja pristupa zasnovanog na konceptima S-metoda i uspostavljanja veze sa prethodno opisanim algoritmom, a nakon toga će biti izložen novi algoritam za proračun diskretne reprezentacije $PD(n, k)$. I u ovom slučaju pođimo od definicije pseudo forme reprezentacije $PD(t, \Omega)$, za slučaj jediničnog pravougaonog prozora $w(\tau) = 1$, $-T/2 \leq \tau \leq T/2$, koja je data sljedećim izrazom:

$$PD(t, \Omega) = \int_{-T/2}^{T/2} x(t - \frac{\tau}{6})x^{*8}(t - \frac{\tau}{12})x^8(t + \frac{\tau}{12})x^*(t + \frac{\tau}{6})e^{-j\Omega\tau} d\tau. \quad (5.47)$$

U cilju računanja prethodnog izraza, prvo se mogu izračunati $STFT_{n2}^r(t, \Omega) = FT\{x^*(t - \frac{\tau}{3})\}$ i $STFT_{p2}^r(t, \Omega) = FT\{x(t + \frac{\tau}{3})\}$. Uz identičnu analizu kao u prethodnoj sekciji pri računanju (5.32) i (5.34), uz istu pretpostavku o lokalizaciji komponenti signala, redom se računaju:

$$\begin{aligned} WD_x^r(t, \Omega) &= STFT_{p2}^r(t, \Omega) *_{\Omega} STFT_{n2}^r(t, \Omega) \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_{-\Omega_L}^{\Omega_L} STFT_{p2}^r(t, \frac{\Omega}{2} + \frac{\varpi}{2})STFT_{n2}^r(t, \frac{\Omega}{2} - \frac{\varpi}{2})d\varpi \end{aligned} \quad (5.48)$$

$$\begin{aligned} R_{x^4}^r(t, \Omega) &= WD_x^r(t, \Omega) *_{\Omega} WD_x^r(t, \Omega) \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_{-2\Omega_L}^{2\Omega_L} WD_x^r(t, \frac{\Omega}{2} + \frac{\varpi}{2})WD_x^r(t, \frac{\Omega}{2} - \frac{\varpi}{2})d\varpi. \end{aligned} \quad (5.49)$$

U skladu sa izlaganjem u prethodnoj sekciji za računanje (5.34), odgovarajući region od interesa je $[4\Omega_0 - 2\Omega_L, 4\Omega_0 + 2\Omega_L]$. Napomenimo da je

$$R_{x^4}^r(t, \Omega) = FT\{x^{*2}(t - \frac{\tau}{3})x^2(t + \frac{\tau}{3})\}. \quad (5.50)$$

Uvedimo sada transformaciju koja se računa na sljedeći način:

$$R_{x^8}^r(t, \Omega) = FT\{x^{*4}(t - \frac{\tau}{6})x^4(t + \frac{\tau}{6})\} = \int_{-\infty}^{\infty} x^{*4}(t - \frac{\tau}{6})x^4(t + \frac{\tau}{6})e^{-j\Omega\tau} d\tau. \quad (5.51)$$

Ona se može preko $R_{x^4}^r(t, \Omega)$ izraziti na sljedeći način:

$$R_{x^8}^r(t, \Omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R_{x^4}^r(t, \Omega + \Theta)R_{x^4}^{r*}(t, \Omega - \Theta)d\Theta \quad (5.52)$$

U cilju dokazivanja prethodnog tvrđenja, uvrstimo izraz (5.50) u (5.52):

$$\begin{aligned}
R_{x^8}^r(t, \Omega) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x^{*2}(t - \frac{\tau_1}{3}) x^2(t + \frac{\tau_1}{3}) x^2(t - \frac{\tau_2}{3}) x^{*2}(t + \frac{\tau_2}{3}) \\
&\quad \times e^{-j\Omega(\tau_1 - \tau_2)} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\Theta(\tau_1 + \tau_2)} d\Theta d\tau_1 d\tau_2 \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x^{*2}(t - \frac{\tau_1}{3}) x^2(t + \frac{\tau_1}{3}) x^2(t - \frac{\tau_2}{3}) x^{*2}(t + \frac{\tau_2}{3}) \\
&\quad \times e^{-j\Omega(\tau_1 - \tau_2)} \delta(\tau_1 + \tau_2) d\tau_1 d\tau_2.
\end{aligned}$$

Kako se iz prethodnog zaključuje da je $\tau_1 = -\tau_2$, to prethodni izraz postaje:

$$R_{x^8}^r(t, \Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x^{*4}(t - \frac{\tau}{3}) x^4(t + \frac{\tau}{3}) e^{-j\Omega 2\tau} d\tau. \quad (5.53)$$

Uvođenjem smjene $\tau_1 = 2\tau$ u prethodni izraz, dobija se:

$$R_{x^8}^r(t, \Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x^{*4}(t - \frac{\tau_1}{6}) x^4(t + \frac{\tau_1}{6}) e^{-j\Omega \tau_1} d\tau_1. \quad (5.54)$$

Upoređujući izraze (5.51) i (5.54), zaključujemo da su identični, što je i trebalo pokazati. Slično kao u S-metodu (2.62), uvedimo pravougaoni jedinični frekvencijski prozor:

$$R_{x^8}^r(t, \Omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} P(\Theta) R_{x^4}^r(t, \Omega + \Theta) R_{x^4}^{r*}(t, \Omega - \Theta) d\Theta \quad (5.55)$$

Kako je region od interesa za $R_{x^4}^r(t, \Omega)$ dat sa $[4\Omega_0 - 2\Omega_L, 4\Omega_0 + 2\Omega_L]$, to će rezultujući izraz, shodno dosadašnjoj analizi biti:

$$R_{x^8}^r(t, \Omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-2\Omega_L}^{2\Omega_L} P(\Theta) R_{x^4}^r(t, \Omega + \Theta) R_{x^4}^{r*}(t, \Omega - \Theta) d\Theta. \quad (5.56)$$

Napomenimo da region od interesa postaje $[4\Omega_0 - 4\Omega_L, 4\Omega_0 + 4\Omega_L]$. Slična analiza važi i za računanje izraza:

$$\begin{aligned}
R_{x^{16}}^r(t, \Omega) &= FT\{x^{*8}(t - \frac{\tau}{12}) x^8(t + \frac{\tau}{12})\} \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-2\Omega_L}^{2\Omega_L} P(\Theta) R_{x^8}^r(t, \Omega + \Theta) R_{x^8}^{r*}(t, \Omega - \Theta) d\Theta,
\end{aligned} \quad (5.57)$$

uz region od interesa $[4\Omega_0 - 8\Omega_L, 4\Omega_0 + 8\Omega_L]$ u kojem se nalazi posmatrana komponenta.

U cilju računanja još jednog izraza potrebnog za realizaciju $PD(t, \Omega)$, definisanog sa:

$$SM_i^r(t, \Omega) = FT\{x(t - \frac{\tau}{6})x^*(t + \frac{\tau}{6})\} \quad (5.58)$$

koristiće se već izračunate transformacije $STFT_{n2}^r(t, \Omega) = FT\{x^*(t - \frac{\tau}{3})\}$ i $STFT_{p2}^r(t, \Omega) = FT\{x(t + \frac{\tau}{3})\}$. Na osnovu formule za S-metod (2.62) i analize računanja $R_{xs}^r(t, \Omega)$, zaključuje se da je transformaciju datu sa:

$$SM^r(t, \Omega) = FT\{x^*(t - \frac{\tau}{6})x(t + \frac{\tau}{6})\} \quad (5.59)$$

moguće računati kao:

$$SM^r(t, \Omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\Omega_L}^{\Omega_L} P(\Theta) STFT_{n2}^r(t, \Omega + \Theta) STFT_{p2}^{r*}(t, \Omega - \Theta) d\Theta. \quad (5.60)$$

Poređenjem (5.58) i (5.59) zaključuje se da se transformacija $SM_i^r(t, \Omega)$ dobija na iz $SM^r(t, \Omega)$ obrtanjem frekvencijske ose, odnosno, $SM_i^r(t, \Omega) = SM^r(t, -\Omega)$. Iz tog razloga, region od interesa je $[-\Omega_0 - \Omega_L/2, -\Omega_0 + \Omega_L/2]$.

Sada je početni izraz za $PD(t, \Omega)$ dat sljedećom konvolucijom:

$$PD(t, \Omega) = SM_i^r(t, \Omega) *_{\Omega} R_{x16}^r(t, \Omega). \quad (5.61)$$

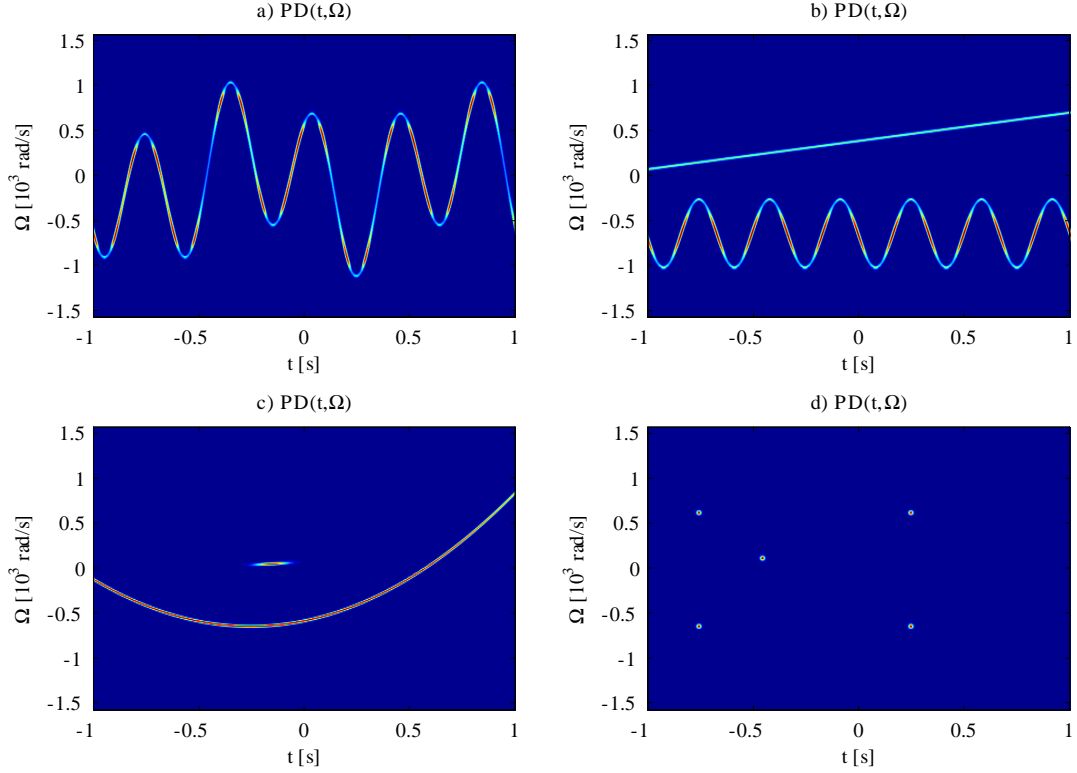
U diskretnom domenu, za signal $x(n)$ dobijen odabiranjem signala $x(t)$ u skladu sa teoremom o odabiranju, pri čemu je pretpostavljena upotreba pravougaonog simetričnog prozora $w(n)$ dužine N odbiraka, algoritam obuhvata sljedeće korake:

Korak 1: Interpolirati posmatrani dio signala obuhvaćen prozorom u trenutku n dodavanjem $2N$ nula u frekvencijskom domenu, u cilju dobijanja odbiraka signala, koji odgovaraju vrijednostima signala za sve vrijednosti kašnjenja $\tau/3$, koji su potrebne za računanje $STFT_{p2}^r(n, k) = DFT\{x_p(n)\}$ i $STFT_{n2}^r(n, k) = DFT\{x_n(n)\}$, gdje je k obuhvata vrijednosti $[-N/2, N/2 - 1]$, dok $x_p(n)$ i $x_n(n)$ su diskretni signali koji korespondiraju $x^*(t - \frac{\tau}{3})$, odnosno $x(t + \frac{\tau}{3})$. Izračunati $STFT_{p2}^r(n, k)$ i $STFT_{n2}^r(n, k)$ korišćenjem rekurzivne procedure (3.9). Pošto je nova dužina signala obuhvaćenog prozorom $3N$, naglasimo da je za proračune potrebno svega N odgovarajućih odbiraka.

Korak 2: Identično Koraku 2 iz algoritma u prethodnoj sekciji, izračunati, koristeći STFT računate u Koraku 1, uz identičnu analizu i pretpostavke o lokalizaciji komponenti:

$$WD_x^r(t, k) = \sum_p STFT_{p2}^r(n, p) STFT_{n2}^r(n, k - p), \quad (5.62)$$

za $k/2 - L \leq p \leq k/2 + L$.



Slika 5.3: $PD(t, \Omega)$ signala iz primjera 5.4 računata opisanim metodom ograničenih konvolucija

Korak 3: Izračunati, ekvivalentno izrazu (5.41) iz Koraka 3 prethodnog algoritma:

$$R_{x^4}^r(n, k) = DFT\{WD_x^{r2}(n, k)\} = \sum_p WD_x^r(n, p)WD_x^r(n, k - p) \quad (5.63)$$

Dobijena konvolucija $R_{x^4}^r(n, k)$ ima komponente lokalizovane u regionu $[4k_0 - 4L, 4k_0 + 4L]$.

Korak 4: Koristiti rekurzivnu proceduru za računanje diskretne forme izraza (5.55), koja, imajući u vidu izraze (2.67) i (2.68) glasi:

$$R_{x^8}^r(n, k) = |R_{x^4}^r(n, k)|^2 + 2 \operatorname{Re} \left[\sum_{i=1}^{L_{d1}} R_{x^4}^r(n, k + i) R_{x^4}^{r*}(n, k - i) \right] \quad (5.64)$$

$$R_{x^8}^r(n, k; L_{d1}) = R_{x^8}^r(n, k; L_{d1} - 1) + 2 \operatorname{Re} [R_{x^4}^r(n, k + i) R_{x^4}^{r*}(n, k - i)], \quad (5.65)$$

$$R_{x^8}^r(n, k; 0) = |R_{x^4}^r(n, k)|^2. \quad (5.66)$$

gdje je L_{d1} cio broj, definisan kao u S-metodu, pa ćemo za njega uzeti vrijednost $L_{d1} = 4L$ (polovina širine auto-člana, to jest regiona od interesa).

Korak 5: Slično kao u Koraku 4, koristiti rekurzivnu proceduru za računanje diskretne

forme izraza (5.43):

$$R_{x_{16}}^r(n, k; L_{d2}) = R_{x_{16}}^r(n, k; L_{d2} - 1) + 2 \operatorname{Re} [R_{x_s}^r(n, k + i)R_{x_s}^r(n, k - i)], \quad (5.67)$$

$$R_{x_{16}}^r(n, k; 0) = |R_{x_s}^r(n, k)|^2. \quad (5.68)$$

Korak 6: Izračunati rekurzivnim putem diskretnu formu izraza (5.59), u skladu sa (2.67) i (2.68):

$$SM(n, k; L_d) = SM(n, k; L_d - 1) + 2 \operatorname{Re} [STFT_{p2}^r(n, k + i)STFT_{p2}^{r*}(n, k - i)], \quad (5.69)$$

gdje je

$$SM(n, k; 0) = |STFT_x(n, k)|^2 \quad (5.70)$$

pri čemu se koristi $STFT_{p2}^r(n, k)$ računata u Koraku 1, gdje je $L_d = L$ i predstavlja širinu auto-člana. Nakon toga, treba uzeti frekvencijske odbirke u obrnutom redosljedu, u cilju dobijanja $SM^r(n, k) = SM(n, -k)$ u skladu sa razmatranjem za slučaj kontinualnih signala. Dobijeni region od interesa je $[-k_0 - 2L, -k_0 + 2L]$.

Korak 7: Izračunati rezultujuću konvoluciju:

$$PD(n, k) = \sum_p SM^r(n, p)R_{x_{16}}^r(t, k - p). \quad (5.71)$$

gdje se p nalazi u granicama, na osnovu razmatranja u (5.46): $-k/3 - 6L \leq p \leq -k/3 + 6L$.

Algoritam se može koristiti za računanje u uzastopnim trenucima n , ili preskakanjem l odbiraka.

Primjer 5.4. Posmatraju se signali intervalu $-1 \text{ s} \leq t \leq 1 \text{ s}$, odabrani sa periodom odabiranja $\Delta t = 0.002$ gdje je korišćen Hanning-ov prozor širine 0.512 s ($N = 256$ odbiraka).

- Monokomponentni složeno-periodično modulisan FM signal:

$$x_1(t) = e^{j50(\cos(5\pi t) + 50j \sin(2\pi t))}; \quad (5.72)$$

- Dvokomponentni FM signal sastavljen od jedne sinusoidalno modulisane i jedne linerano modulisane komponente:

$$x_2(t) = e^{-j(20 \sin(6\pi t) - 200\pi)}; \quad (5.73)$$

- Dvokomponentni signal sastavljen od jednog PPS signala trećeg reda i jednog LFM signala sa Gauss-ovom amplitudom:

$$x_3(t) = e^{j100\pi t^3 - j200\pi t} + e^{-10(t-0.1)^2} e^{j20\pi(t+0.4)^2}; \quad (5.74)$$

- Petokomponentni signal sastavljen od 5 LFM signala sa Gauss-ovom amplitudom:

$$x_5(t) = e^{-500(t+0.2)^2} e^{j40\pi(t+0.2)} + e^{-500(t-0.5)^2} e^{j200\pi(t-0.5)} + e^{-500(t+0.5)^2} e^{j200\pi(t+0.5)} \\ + e^{-500(t+0.5)^2} e^{-j200\pi(t+0.5)} + e^{-500(t-0.5)^2} e^{j200\pi(t+0.5)}. \quad (5.75)$$

Dobijene reprezentacije $PD(n, k)$ prikazane su na slici (5.3) a) - d), redom, računate za $L = 3$. Primjer ilustruje postizanje veoma visoke koncentracije signala u TF ravni. Nije uočljiva pojava unutrašnjih interferencija, kao ni pojava kros-članova u slučajevima multikomponentnih signala (na slikama b) - d)). Ovdje treba napomenuti da kros-komponente nastaju kada dolazi do presjeka auto-članova ili njihove velike blizine.

Analiza numeričke složenosti predloženog metoda realizacije

Cilj je dobiti numeričku složenost izraza (5.71), za posmatrani trenutak n . Složenost će biti procijenjena za slučaj računanja reprezentacije u trenucima n sa razmakom l , što predstavlja opšti slučaj (za $l = 1$ računanje se vrši u uzastopnim trenucima). Pretpostavljena je upotreba pravougaonog jediničnog prozora $w(n)$. U Koraku 1 predloženog algoritma neophodno je izvršiti proračun dva STFT-a rekurzivnim putem, čija složenost, imajući u vidu (3.9) i (3.10) iznosi: $T_{N1} = 2(2l + 3)N$, gdje je l korak između trenutaka n u kojima se proračun vrši.

U drugom koraku potrebno je izračunati konvoluciju oblika (5.39). Kako se granice za p kreću od $-L$ do L (u pitanju je $2L + 1$ vrijednosti), a posmatra se N frekvencijskih tačaka, to je složenost ovog koraka $T_{N2} = 2NL + N$. Nadalje, u našoj analizi ćemo smatrati da su iz rezultujućih konvolucija uzeti isključivo frekvencijski odbirci od interesa za proračun kranje reprezentacije, dakle, ukupno N odbiraka, dok su ostali odbirci odbačeni. Konvolucija iz trećeg koraka zahtijevaće, zbog duplo veće širine regiona od interesa, $T_{N3} = 4NL + N$ operacija. U Koraku 4, složenost računanja $|R_{x^4}^r(n, k)|^2$ u izrazu (5.64) iznosi N (broj množenja $R_{x^4}^r(n, k)$ i $R_{x^4}^{r*}(n, k)$), dok suma u istom izrazu ima složenost reda NL_{d1} uz dodatnih N množenja konstantom 2. Dakle, ukupna numerička složenost Koraka 4 iznosi $T_{N4} = 2N + NL_{d1}$. Identičnom analizom dobija se složenost proračuna u koraku 5: $T_{N5} = 2N + NL_{d2}$. Slično, uz $L_d = L$, numerička složenost proračuna u Koraku 6 iznosi: $T_{N6} = 2N + NL$. Konvolucija u Koraku 7 zahtijeva N množenja sumanada i njihovo sumiranje, u najgorem slučaju, imajući u vidu izraz (5.46). Složenost koraka 7, dakle, u najgorem slučaju iznosi $T_{N7} = 12NL + N$.

Rezultujuća procjena složenosti proračuna izraza (5.71), ne računajući interpolaciju biće:

$$T_{Npd} = T_{N1} + T_{N2} + T_{N3} + T_{N4} + T_{N5} + T_{N6} + T_{N7} \\ = 2(2l + 3)N + 19NL + 9N + NL_{d1} + NL_{d2}. \quad (5.76)$$

Numerička složenost interpolacije, koja u slučaju prozora širine N , dodavanjem $2N$ nula u frekvencijskom domenu, iznosi, na osnovu (5.1):

$$T_{in} = N\left(\frac{3}{2}\log_2 N - 1\right) + 2 + 3N\left(\frac{3}{2}\log_2 3N - 1\right). \quad (5.77)$$

Posljednji član u prethodnom izrazu potiče od IDFT frekvencijskih odbiraka sa dodatnih $2N$ nula.

Ukupna složenost predloženog algoritma, uzimajući u obzir i interpolaciju iznosi:

$$\begin{aligned} T_N = T_{Npd} + T_{in} &= 2(2l + 3)N + 19NL + 9N + NL_{d1} + NL_{d2} \\ &+ N\left(\frac{3}{2}\log_2 N - 1\right) + 2 + 3N\left(\frac{3}{2}\log_2 3N - 1\right) \end{aligned} \quad (5.78)$$

Kako je teorijski najnepovoljniji slučaj $L_{d1} = 4L$ i $L_{d2} = 8L$, prethodni izraz postaje:

$$\begin{aligned} T_N = T_{Npd} + T_{in} &= 2(2l + 3)N + 31NL + 9N \\ &+ N\left(\frac{3}{2}\log_2 N - 1\right) + 2 + 3N\left(\frac{3}{2}\log_2 3N - 1\right) \end{aligned} \quad (5.79)$$

Ukoliko se reprezentacija $PD(n, k)$ računa pomoću predloženog rekurzivnog algoritma, ali uz korišćenje FFT algoritama u prvom koraku, složenost se, korišćenjem izraza (3.7) može procijeniti sljedećim izrazom:

$$\begin{aligned} T_N = T_{Npd} + T_{in} &= 2N\left(\frac{3}{2}\log_2 N - 1\right) + 2 + 31NL + 9N \\ &+ N\left(\frac{3}{2}\log_2 N - 1\right) + 2 + 3N\left(\frac{3}{2}\log_2 3N - 1\right) \end{aligned} \quad (5.80)$$

Budući da izraz (5.79) linearno zavisi od složenosti T_{N1} , u odnosu na složenost u slučaju proračuna $PD(n, k)$ istim algoritmom, ali uz korišćenje FFT algoritama u Koraku 1 (5.80), ušteda u broju operacija zavisiće direktno od uštede koju donosi rekurzivni izraz (3.9), kada je zadovoljen uslov:

$$l < \frac{3}{4}\log_2 N - 2. \quad (5.81)$$

Složenost nerekurzivnog pristupa (5.45) koja uključuje proračun dvije dodatne konvolucije i preodabiranje signala 12 puta, koristeći prethodnu analizu iznosi:

$$T_{nr} = T_{N1} + T_{N2} + T_{N3} + T_{N4} + T_{N5} + T_{N6} + T_{N7}. \quad (5.82)$$

Složenost potrebne interpolacije, u skladu sa (5.77) iznosi:

$$T_{int} = N\left(\frac{3}{2}\log_2 N - 1\right) + 2 + 12N\left(\frac{3}{2}\log_2 3N - 1\right). \quad (5.83)$$

Dvije konvolucije (5.42) i (5.43) imaju složenost:

$$T_{N4} = 8NL + N, \text{ i} \quad (5.84)$$

$$T_{N5} = 16NL + N. \quad (5.85)$$

Koristeći uvrštavanjem izraza (5.83), (5.84) i (5.85) u (5.82) i koristeći prethodne rezultate, i činjenicu da su potrebna 4 proračuna STFT u (5.45), ukupna složenost nerekurzivnog pristupa iznosi:

$$\begin{aligned} T_{nr} = & 4N\left(\frac{3}{2}\log_2 N - 1\right) + 4 + 44NL + 6N \\ & + N\left(\frac{3}{2}\log_2 N - 1\right) + 2 + 12N\left(\frac{3}{2}\log_2 3N - 1\right). \end{aligned} \quad (5.86)$$

Primjer 5.5 Vrijeme izvršavanja predloženih algoritama, na računaru sa procesorom Intel(R) Core(TM) i3-2330M sa 2.20GHz i 4GB RAM-a dato je u tabeli 5.1 za nekoliko različitih koraka l . Vrijeme je računato za signal dužine 2256 odbiraka, pri čemu je korišćen prozor dužine $N = 256$ odbiraka. Vrijeme izvršavanja najviše zavisi od proračuna konvolucija. Teorijski je očekivano, na osnovu rezultata u tabeli 3.1 da do uštede u broju operacija pri korišćenju rekurzivne STFT u odnosu na slučaj kada se koristi FFT dođe u slučaju kada je $l \leq 4$. Napomenimo je u dobijeno vrijeme izvršavanja uključeno i vrijeme potrebno za poziv pomoćnih funkcija pri računanju algoritama.

Tabela 5.1: Vrijeme izvršavanja proračuna reprezentacije $PD(n, k)$ korišćenjem ograničenih konvolucija nerekurzivnim putem (prva vrsta); korišćenjem metoda ograničenih konvolucija rekurzivnim putem sa primjenom FFT algoritama za računanje STFT (druga vrsta) i korišćenjem algoritma sa primjenom rekurzivne STFT u prvom koraku (treća vrsta)

l	1	2	3	4	5	6
Nerekurzivni proračun	56.64s	23.46s	16.52s	8.29s	5.06s	3.48s
Rek. proračun sa FFT	26.06s	11.57s	6.81s	4.23s	2.68s	1.65s
Rek. proračun sa RSTFT	26.03s	11.51s	6.80s	4.24s	2.57s	1.76s

Zaključak

Vremensko-frekvencijska analiza je široka i u istraživačkom smislu veoma atraktivna oblast obrade signala. U okviru ove teze razmatrani su neki fundamentalni problemi vremensko-frekvencijske analize: problem numeričke implementacije reprezentacija rekurzivnim putem, definisanje novih reprezentacija i jedan problem estimacije parametara signala.

Veoma često se dešava da je rezultate proračuna reprezentacija neophodno dobiti u najkraćem mogućem roku, naročito u aplikacijama u realnom vremenu. Sa druge strane, efikasniji metodi proračuna uvijek su privlačili pažnju istraživača jer različite numeričke provjere i eksperimenti, naročito ukoliko su veoma kompleksni mogu biti jednostavnije i brže sprovedeni. Budući da se STFT može koristiti za realizaciju veoma široke klase vremensko-frekvencijskih reprezentacija, istraživanje efikasnijih metoda njenog računanja proširuje mogućnosti primjene ove oblasti. Izveden je rekurzivni metod koji smanjuje numeričku složenost STFT-a za slučaj kada se njen proračun vrši u uzastopnim trenucima, ili sa korakom između trenutaka proračuna, što je čest slučaj. Izvršena je teorijska analiza uslova u kojima navedni postupak unosi poboljšanje u odnosu na klasični proračun primjenom FFT algoritama.

Kao primjer primjene vremensko-frekvencijske analize predložen je algoritam za računanje periode micro-Doppler-a u radarskim signalima. Analiza parametara micro-Doppler-a može biti veoma značajna u problematici identifikacije i klasifikacije radarskih meta. U eksperimentima je korišćena STFT, a budući da može biti računata po predloženom rekurzivnom postupku, i imajući u vidu jednostavnost predloženog algoritma, nameću se mogućnosti primjene istog u realnim radarskim aplikacijama.

Nijedna postojeća vremensko-frekvencijska reprezentacija ne omogućava savršeno preciznu procjenu parametara signala. Estimacija je često narušena usljed pojave kros-komponenti i loše koncentracije signala u TF ravni. Stoga je teorijski veoma interesantno razmatrati mogućnost poboljšanja koncentracije, i eliminisanja ili smanjenja uticaja kros komponenti. Kao prilog rješavanju problema koncentracije predložena je reprezentacija višeg reda koja u slučaju polinomijalno-faznih signala do četvrtog reda daje idealnu koncentraciju, što je čini veoma interesantnom sa teorijskog stanovišta. U tezi su dati primjeri koji potvrđuju teorijska izlaganja, i koji reprezentuju superiornost ove reprezentacije u pogledu koncentracije, u odnosu na STFT

i Wigner-ovu distribuciju. Značajno smanjenje pojave kros-komponenti ostvareno je njenom realizacijom zasnovanom na konceptima S-metoda, dok je numerička složenost takve realizacije značajno smanjena predloženim rekurzivnim pristupom.

Sprovedena istraživanja i ostvareni rezultati pokazali su da postoji dobra motivacija za njihov nastavak, u cilju razvijanja tehnika i algoritama koji će u razmatranom kontekstu dovesti do daljih poboljšanja.

Bibliografija

- [1] Lj. Stanković, M. Daković, T. Thayaparan, *Time-Frequency Signal Analysis with Applications*, Artech house, 2013.
- [2] Lj. Stanković, *Digitalna obrada signala*, Naučna knjiga, 1990.
- [3] S. Haykin, B. Van Veen, *Signals and Systems*, Jon Wiley & Sons, 1999.
- [4] A. V. Oppenheim, W. Schafer Ronald, *Digital Signal Processing*, Prentice Hall, 1975.
- [5] P. Flandrin, *Time-frequency/Time-Scale Analysis, Wavelet Analysis and its Applications*, Vol. 10 Academic Press, San Diego, 1999.
- [6] A. Papoulis, *Signal analysis*, McGraw Hill, New York, 1977.
- [7] A. Papoulis, *The Fourier Integral and its Application* McGraw-Hill Companies, June, 1962
- [8] I. Djurović, *Digitalna obrada slike*, Elektrotehnički fakultet, Podgorica, 2006.
- [9] C.T Chen, „*System and signal analysis*, Saunders College Pub., 1989.
- [10] A. Papoulis, *Probability, random variables, and stochastic processes*, New York:McGraw Hill, 1965.
- [11] M. Daković, *Estimacija parametara signala dekompozicijom u vremensko-frekvencijskom domenu sa primjenom na radarske signale*, doktorska disertacija, Podgorica, 2005.
- [12] V. Popović, *Vremensko-frekvencijska analiza u obradi radarskih signala*, doktorska disertacija, Podgorica, 2009.
- [13] B. Boashash, *Time-Frequency Signal Analysis and Processing –A Comprehensive Reference*, Elsevier Science, Oxford, 2003.
- [14] L. Cohen, *Time-Frequency Analysis*, Prentice-Hall, New York, 1995.
- [15] Lj. Stanković, „A method for time-frequency signal analysis,” *IEEE Trans. on Signal Processing*, Vol-42, No.1, Jan.1994.pp.225-229.

- [16] L. Cohen: „Time-Frequency distribution - A review,” *Proc. IEEE*, vol 77, no.7, July 1989, pp. 941-981.
- [17] Lj. Stanković „An analysis of some time-frequency and time-scale distributions,” *Annales des Telecommunications*, no.9/10, Sept./Oct. 1994, pp. 519-538.
- [18] L.Cohen, „Distributions concentrated along the instantaneous frequency,” SPIE, vol.1348, *Advanced Signal Proc., Algorithms, Architectures and Implementation*, 1992, pp. 402-412.
- [19] F. Hlawatsch and G.F. Boudreaux-Bartels, „Linear and quadratic time-frequency signal representations,” *IEEE Signal processing Magazine*, April 1992, pp. 21-67
- [20] Lj. Stanković, „Highly concentrated time-frequency distribution: Pseudo quantum signal representation, ” *IEEE Trans. on Signal Processing*, Vol.5, No.3, Mar.1997, pp.543-551.
- [21] Lj. Stanković, V. Ivanović, Z. Petrović, “Unified approach to the noise analysis in the spectrogram and the Wigner distribution, ” *Annales des telecom.*, vol.51, No.11-12, pp. 585-594, Nov./Dec. 1996.
- [22] Lj. Stanković, „A method for improved energy concentration in the time-frequency analysis of multicomponent signals using the L-Wigner distribution,” *IEEE Trans. on Signal Processing*, Vol-43, No.5, May.1995, pp.1262-1269.
- [23] Lj. Stanković, „A time-frequency distribution concentrated along the instantaneous frequency,” *IEEE Signal Processing Letters*, Vol-3, No.3, Mar.1996, pp.89-91.
- [24] B. Boashash, „Estimating and interpreting the instantaneous frequency of a signal –Part 1: Fundamentals,” *Proc. of the IEEE*, vol. 80, no.4, pp.519-538, April 1992.
- [25] B. Boashash, “Estimating and interpreting the instantaneous frequency of a signal: A tutorial review-Part 2: algorithms and applications,” *Proc. IEEE*, vol. 80, April 1992.
- [26] V. Katkovnik, Lj. Stanković, „Instantaneous frequency estimation using the Wigner distribution with varying and data-driven window length, ” *IEEE Trans. on Signal Proc.*, vol.46, no.9,pp.2315-2326, Sept.1998.
- [27] T. Thayaparan, Lj. Stanković, M. Daković, V. Popović, „Micro-Doppler parameter estimation from a fraction of the period, ” *IET Signal Processing*, Vol. 4, No. 1, 201 - 212, Jan. 2010.
- [28] T. Thayaparan, Lj. Stanković, I. Djurović, „Micro-Doppler-based target detection and feature extraction in indoor and outdoor environments,” *Journal of The Franklin Institute*, Vol. 345, No. 6, pp. 700-722, Sept. 2008.

- [29] T. Thayaparan, S. Abrol, E. Risebrough, Lj. Stanković, D. Lamothe, G. Duff, "Analysis of Radar Micro-Doppler Signatures From Experimental Helicopter and Human Data," *IEE Proc. Radar, Sonar and Navig.*, Volume 1, Issue 4,, pp. 289-299, Aug. 2007.
- [30] Lj. Stanković, T. Thayaparan, I. Djurović, "Separation of Target Rigid Body and Micro-Doppler Effects in ISAR Imaging," *IEEE Trans. on Aerospace and El. Systems*, Vol 42, No. 7, pp. 1496-1506, Oct. 2006.
- [31] V. C. Chen, F. Li, S.-S. Ho, and H. Wechsler, "Micro-Doppler effect in radar: phenomenon, model , and simulation study," Vol. 42, No. 1, pp. 2-21, *IEEE Trans. on Aero. and El. Systems*, 2006.
- [32] B. Boashash; B. Ristich, „Polynomial Wigner-Ville distributions and time-varying higher-order spectra,” *Proceedings of the IEEE-SP International Symposium* , pp.31-34, 4-6 Oct 1992.
- [33] I. Djurović, Lj. Stanković, „Influence of high noise on the instantaneous frequency estimation using time-frequency distributions,” *IEEE Signal Processing Letters*, Vol.7, No.11, Nov.2000.
- [34] E. Sejdić, I. Djurović, Lj. Stanković, „Quantitative Performance Analysis of Scalogram as Instantaneous Frequency Estimator,” *IEEE Transactions on Signal Processing*, Vol. 56, Issue 8, Aug. 2008, pp. 3837-3845.
- [35] S. Kadambe, G.F. Boudreaux-Bartels, „A comparison of the existence of cross terms in the Wigner distributions and squared magnitude of the Wavelet transform and Short time Fourier transform,” *IEEE Tans. on Signal Processing*, vol. 40, Oct. 1992. pp. 2498-2517
- [36] J. Jeong, W.J. Williams, „Mechanism of cross terms in spectrogram,” *IEEE Trans. on Signal Processing*, vol. 40, Oct. 1992. pp. 2498-2517
- [37] P. Flandrin, „Some features of time-frequency representation of multicomponent signal,” *Proc. IEEE Int. Conf. Acoust., Speech, Signal Processing*, 1984, pp. 41B.4.1.-4.1